应用数学和力学，第17卷 第12期（1996年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

关于圆柱壳定解方程的通解问题

薛 毅[1]　　薛大为[2]

（1995年10月16日收到）

摘　要

本文证明了Vlasov[5]所提出的以应变—应力函数$F(\xi,\eta)$所表达的解，为圆柱壳的定解偏微分方程组的通解。

关键词　圆柱壳　定解方程　通解

一、引　言

圆柱壳是工程上经常遇到的一种结构形式，如何计算这类结构，是很有意义的课题．早在1888年，Love[1]就提出了薄壳的弯曲理论；当然，钱伟长[2]提出的板壳问题的内禀理论，则是板壳理论方面的经典之作，迄今仍放光彩．而对于圆柱壳而言，Reissner[3]和Donnell[4]则提出了基本理论．前苏联的Vlasov[5]和Timoshenko & Woinowsky-Krieger[6]的两本著名专著，收集了许多专家及他们自己的贡献；笔者之一的专著，也收集了一些作者和笔者本人的工作[7]．

对于以位移分量u,v和w为基本未知函数的柱壳问题，Vlasov[5]提出了一种求解的应变—应力函数法，他将对三个关于位移分量的联立偏微分方程的求解归结为对一个八阶偏微分方程的求解，从而在许多情况下简化了计算．

但是，用应变—应力函数来表达的三个位移分量u,v,w所对应的解，是否与原有的偏微分方程组解等价，则是应予探讨的问题．本文严格地证明了这两种解法，即以位移分量为基本未知函数的偏微分方程组解法和八阶关于应变—应力函数的偏微分方程解法，在数学上是等价的，从而充实了Vlasov的成果，有助于圆柱壳问题的计算．

二、关于切向位移 u 和 v 的通解

对于弹性圆柱壳，如以位移分量u,v和w作为基本未知量，则基本方程为[6]

---

1 南非约翰内斯堡大学；2 澳门大学 F5T

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\varphi}-\nu\frac{\partial w}{\partial\xi}=-\frac{(1-\nu^2)a^2}{Eh}X\\&\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\varphi}+\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2}-\frac{\partial w}{\partial\varphi}=-\frac{(1-\nu^2)a^2}{Eh}Y\\&\nu\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial v}{\partial\varphi}-w-c^2\Delta\Delta w=-\frac{(1-\nu^2)a^2}{Eh}Z\end{aligned}\right\}\tag{2.1a,b,c}$$

式中，E,ν为壳体材料的杨氏模量和泊松比；h和a为壳体的厚度和中面半径；

$$c^2=\frac{h^2}{12a^2},\quad \xi=\frac{x}{a},\quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

而ξ为沿壳体母线方向的无量纲坐标；φ为圆心角；X,Y和Z分别为ξ,φ和z向外载分量；u,v和w分别为沿ξ,φ和z轴向位移分量。

Vlasov提出[5]，可引入应变—应力函数$F(\xi,\varphi)$而将联立偏微分方程组的解写成

$$\left.\begin{aligned}&u=\frac{\partial^3 F}{\partial\xi\partial\varphi^2}-\nu\frac{\partial^3 F}{\partial\xi^3}+u_0\\&v=-\frac{\partial^3 F}{\partial\varphi^3}-(2+\nu)\frac{\partial^3 F}{\partial\xi^2\partial\varphi}+v_0\\&w=-\Delta\Delta F+w_0\end{aligned}\right\}\tag{2.2a,b,c}$$

式中，u_0,v_0和w_0为联立偏微分方程组(2.1)的任一组特解，$F(\xi,\varphi)$ 则是满足八阶偏微分方程

$$\Delta\Delta\Delta\Delta F+\frac{1-\nu^2}{c^2}\frac{\partial^4 F}{\partial\xi^4}=0\tag{2.3}$$

的函数。

将(2.2)和(2.3)代入(2.1)，可见是满足的。这说明由(2.3)所确定的$F(\xi,\varphi)$所确定的位移函数，即(2.2)式的u,v,和w是(2.1)的解。但这个解是否是通解？即(2.1)的所有的解可否均由(2.2)给出？则是一个重要的问题。因为，如若不是通解，则(2.1)尚有解不由(2.2)给出，这也就是说，Vlasov的解法在有的场合是无效的，且这种场合是怎么样的也不清楚。因此，判定Vlasov解是否为通解有重大的理论和实用意义。

现探讨通解问题如下：令$X=Y=Z=0$并相应地去掉特解u_0,v_0和w_0，则由(2.1)有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\varphi}-\nu\frac{\partial w}{\partial\xi}=0\tag{2.4}$$

$$\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\varphi}+\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2}-\frac{\partial w}{\partial\varphi}=0\tag{2.5}$$

$$\nu\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial v}{\partial\varphi}-w-c^2\Delta\Delta w=0\tag{2.6}$$

将(2.4)式对φ求导，(2.5)式在各项乘了因子ν之后对ξ求导，然后相减，可得

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+(2+\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\right]=-\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}-\nu\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2}\right)\tag{2.7}$$

可见如令

$$u=\frac{\partial^3 F}{\partial\xi\partial\varphi^2}-\nu\frac{\partial^3 F}{\partial\xi^3}\tag{2.8}$$

$$v=-\frac{\partial^3 F}{\partial\varphi^3}-(2+\nu)\frac{\partial^3 F}{\partial\xi^2\partial\varphi} \tag{2.9}$$

则(2.8)、(2.9)二式满足方程(2.7)；如将(2.8)、(2.9)二式和删去了w_0的(2.2c) 式代入基本方程(2.4)～(2.6)，可见它们是满足的，且 $F(\xi,\varphi)$满足(2.3)．这说明 Vlasov 提出的(2.2)式，的确是圆柱壳基本偏微分方程组的解．现在我们要证明由(2.8)、(2.9) 二式所确定的位移分量u和v，包括了u和v的所有可能的解。亦即下述定理成立：

定理 定义算子

$$\Delta_1=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-\nu\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right),\quad \Delta_2=-\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+(2+\nu)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right] \tag{2.10a,b}$$

如对任意两个可微函数$u(\xi,\varphi)$和$v(\xi,\varphi)$，偏微分方程

$$\Delta_2 u=\Delta_1 v \tag{2.11}$$

成立，则必存在一个函数$F(\xi,\varphi)$使

$$u=\Delta_1 F,\quad v=\Delta_2 F \tag{2.12}$$

成立，且所有满足方程(2.11)的函数u和v，均包含在(2.12)式之内．

证明 显然，(2.11)式就是(2.7)式，解答(2.12)就是(2.8)、(2.9)两式．解 (2.12) 满足(2.11)式是显然的．

参照(2.10)可将(2.11)式写成

$$-\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+(2+\nu)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right]u=\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-\nu\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right]v$$

可见存在一个函数$A(\xi,\varphi)$使

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+(2+\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}=-\frac{\partial A}{\partial\xi} \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}-\nu\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2}=\frac{\partial A}{\partial\varphi} \tag{2.14}$$

(2.13)式和(2.14)式可分别写成

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)=-\frac{\partial}{\partial\xi}\left[A+(2+\nu)\frac{\partial u}{\partial\xi}\right] \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi}-A\right)=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\nu\frac{\partial v}{\partial\xi}\right) \tag{2.16}$$

由(2.15)及(2.16)两式可知，存在函数$B(\xi,\varphi)$和$C(\xi,\varphi)$使下式成立：

$$\frac{\partial u}{\partial\varphi}=\frac{\partial B}{\partial\xi},\quad A+(2+\nu)\frac{\partial u}{\partial\xi}=-\frac{\partial B}{\partial\varphi} \tag{2.17a,b}$$

$$\frac{\partial v}{\partial\varphi}-A=\frac{\partial C}{\partial\xi},\quad \nu\frac{\partial v}{\partial\xi}=\frac{\partial C}{\partial\varphi} \tag{2.18a,b}$$

令(2.17b)和(2.18a)中的A相等，得：

$$\frac{\partial}{\partial\xi}[C-(2+\nu)u]=\frac{\partial}{\partial\varphi}(v+B) \tag{2.19}$$

由上式知，存在函数$D(\xi,\varphi)$使

$$C-(2+\nu)u=\frac{\partial D}{\partial\varphi},\ v+B=\frac{\partial D}{\partial\xi}$$

即

$$u=\frac{1}{2+\nu}\left(C-\frac{\partial D}{\partial\varphi}\right),\quad v=\frac{\partial D}{\partial\xi}-B \tag{2.20a,b}$$

由(2.17a)和(2.18b)，知存在两函数$L(\xi,\varphi)$和$M(\xi,\varphi)$使

$$u=\frac{\partial L}{\partial\xi},\quad B=\frac{\partial L}{\partial\varphi} \tag{2.21a,b}$$

$$v=\frac{1}{\nu}\frac{\partial M}{\partial\varphi},\quad C=\frac{\partial M}{\partial\xi} \tag{2.22a,b}$$

成立。将(2.21)式代入(2.19)式，得

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\partial M}{\partial\xi}-(2+\nu)\frac{\partial L}{\partial\xi}\right]=\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{1}{\nu}\frac{\partial M}{\partial\varphi}+\frac{\partial L}{\partial\varphi}\right]$$

故知存在函数$N(\xi,\varphi)$使

$$\frac{\partial M}{\partial\xi}-(2+\nu)\frac{\partial L}{\partial\xi}=\frac{\partial N}{\partial\varphi},\quad \frac{1}{\nu}\frac{\partial M}{\partial\varphi}+\frac{\partial L}{\partial\varphi}=\frac{\partial M}{\partial\xi} \tag{2.23a,b}$$

由上式可知，存在函数$R(\xi,\varphi)$和$S(\xi,\varphi)$使

$$M-(2+\nu)L=\frac{\partial R}{\partial\varphi},\quad N=\frac{\partial R}{\partial\xi} \tag{2.24a,b}$$

$$\frac{M}{\nu}+L=\frac{\partial S}{\partial\xi},\quad N=\frac{\partial S}{\partial\varphi} \tag{2.25a,b}$$

由(2.24b)和(2.25b)有

$$\frac{\partial R}{\partial\xi}=\frac{\partial S}{\partial\varphi}$$

故知存在函数$K(\xi,\varphi)$使

$$R=\frac{\partial K}{\partial\varphi},\quad S=\frac{\partial K}{\partial\xi} \tag{2.26a,b}$$

联立求解(2.24a)和(2.25a)，得

$$M=\frac{\nu}{2(1+\nu)}\left[\frac{\partial R}{\partial\varphi}+(2+\nu)\frac{\partial S}{\partial\xi}\right] \tag{2.27a}$$

$$L=\frac{\nu}{2(1+\nu)}\left[\frac{\partial S}{\partial\xi}-\frac{1}{\nu}\frac{\partial R}{\partial\varphi}\right] \tag{2.27b}$$

将(2.27)代入(2.21a)和(2.22a)，并注意到(2.26)，可得：

$$u=\frac{\nu}{2(1+\nu)}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\partial^2 K}{\partial\xi^2}-\frac{1}{\nu}\frac{\partial^2 K}{\partial\varphi^2}\right] \tag{2.28a}$$

$$v=\frac{1}{2(1+\nu)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{\partial^2 K}{\partial\varphi^2}+(2+\nu)\frac{\partial^2 K}{\partial\xi^2}\right] \tag{2.28b}$$

若命

$$\frac{-K}{2(1+\nu)}=F$$

则(2.28)式就是(2.8)式和(2.9)式，这就证明了(2.8)式和(2.9)式是圆柱壳切向位移u和v的齐次方程的通解。

三、关于径向位移 w(ξ, φ)

将(2.8)、(2.9)二式分别代入(2.4)式和(2.5)式，得

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\Delta\Delta F+w)=0 \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}(\Delta\Delta F+w)=0 \tag{3.2}$$

由(3.1)式得

$$w=-\Delta\Delta F+f_1(\varphi) \tag{3.3}$$

式中，$f_1(\varphi)$为φ的任意函数．而由(3.2)可得

$$w=-\Delta\Delta F+f_2(\xi) \tag{3.4}$$

式中，$f_2(\xi)$为ξ的任意函数，因而由(3.3)和(3.4)二式，应有

$$w=-\Delta\Delta F+k \tag{3.5}$$

式中，k为常数．由于$w=k$相应于圆柱壳体沿半径方向的均匀伸缩而且只引起薄膜力[5]

$$N_x=-\frac{Eh}{1-\nu^2}\frac{\nu k}{a},\ N_\varphi=-\frac{Eh}{1-\nu^2}\frac{k}{a}$$

这在没有均布外载Z时是不可能的；而当有均布外载时Z，常数k可包含在特解$w_0(\xi,\varphi)$之中，故可取$k=0$而不失一般性．于是我们求得了

$$w=-\Delta\Delta F \tag{3.6}$$

将(3.6)、(2.8)、(2.9)三式代入(2.6)式，即得方程(2.3)．于是我们可得结论：Vlasov的应变—应力函数解法与解偏微分方程组法等价．亦即，前述定理证毕．上述结论，有助于从理论上进一步认识圆柱壳的求解问题，从而有理论和实用价值．

参 考 文 献

[1] A. E. H. Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4th ed. (1927).

[2] W. Z. Chien, The intrinsic theory of thin shells and plates, Part I, General theory, *Quarterly of Applied Mathematics*, 1(4) (1944), 297—327.

[3] H. Reissner, Formänderung und spannungen einer dunnwandigen an den Rändern frei aufliegenden, beliebig belasteten Zylinderschale, *Z. Angew Math. und Mech.*, 13 (1933), 133.

[4] L. H. Donnell, Stability of Thin-Walled Tubes under Torsion, NACA TR 479 (1933).

[5] В. З. Власов, *Общая Теория Оболочек и Её Приложения в Технике*, Гостехиздат (1949).

[6] Timoshenko and Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, 2nd Edi., McGraw-Hill (1959).

[7] 薛大为《板壳理论》，北京工业学院出版社 (1988).

On the General Solution of Cylindrical Shell Equations

Peter Yi Xue

(University of Witwatersrand, Johannesburg, Republic of South Africa)

Xue Dawei

(University of Macau, F5T, Macau)

Abstract

It is proved mathematically in this paper that the strain-stress function $F(\xi, \varphi)$ on the cylindrical shell theory suggested by Vlasov[5] will give out the general solution of the simultaneous partial differential equations of cylindrical shell problem. That is to say, there is no any solution of the simultaneous partial differential equations can be omitted due to Vlasov's suggestion. The conclusion suggested in this paper is helpful to the well-known Vlasov's method.

Key words cylindrical shell, general solution, partial differential equation