应用数学和力学，第17卷 第12期（1996年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

关于二层海中的二阶波浪绕射问题*

吴建华[1]　　方　颖[1]

（戴世强推荐，1995年5月4日收到，1996年1月3日收到修改稿）

摘　　要

在本文中，我们用二层海模型，探讨了层化海洋中任意三维物体的二阶波浪绕射问题，给出了多色波场中二阶波浪散射势边值问题的数学提法以及基于一个弱的远场辐射条件下解的表式. 同时，利用Green定理，并通过引入一个辅助势函数，我们导出了结构所受二阶波浪荷载的积分表式. 结果表明，海水的层化特性对结构物所受之二阶差频波浪荷载可能具有显著的影响.

关键词　波浪绕射与散射　海洋与船舶工程　波浪荷载　非线性水波　内波

一、前　　言

近20年来，在海洋与船舶工程中，关于如何理论数值预报离岸结构物所受之波浪荷载的问题，一直是人们十分关注的研究领域. 该研究与结构的安全可靠性设计相关，它涉及到大型海工结构物的波浪绕射与散射问题.

关于均匀海中的波浪绕射与散射问题，人们已提供了大量研究报告，并已取得了长足进展[1~6]. C.C. Mei总结了关于线性问题的有关研究成果[1]；Faltinsen利用正则摄动方法，系统地阐述了二阶稳定的与低频的波浪作用力[2]；一直困扰人们的二阶问题的辐射条件也已获得了较好的表述[3,4]. 关于海水层化对离岸结构物的水动力特性及其所受波浪荷载的影响的问题，近年来，人们已作了一些工作，并取得了一些有意义的研究成果. A. R. Osborne等人测量了海洋内波对深水钻探船的作用力及其运动的影响，表明在某些海域中，海洋开采设备的设计应计及海洋内波引起的荷载[7]. 文献[8]提出了在分层海洋中的线性波浪绕射和散射理论，发现系泊浮体的一阶与二阶运动方程与均匀海情形相似，附加质量与阻尼系数均具有对称的特性，但是在远场辐射波中，不仅存在表面辐射波，而且存在内辐射波；层化的影响在估计浮体的低频水动力特性时应该加以考虑. 对二层海中圆柱浮筒的水动力特性的数值分析表明，如果物体位于上层流体中，层化特性对物体的水动力系数的影响将是显著的，物体越接近密跃层，这种影响越显著[8]. 在文献[9]中，作者讨论了二层海中作用在任意三维物体上的二阶波浪力. 尽管如此，人们对海洋表面波、内波与物体的相互作用问题，仍所知甚少.

---

* 国家自然科学基金和广东省自然科学基金资助项目

1 中山大学力学系，广州 510275

本文中，我们将针对有限等深海底或无限深海底情形，进一步探讨二层海中任意三维大型海工结构物的二阶波浪绕射问题的数学提法，远场辐射条件，解的表式，并给出了不依赖于二阶散射势的结构所受二阶波浪荷载的积分表式。我们下一步的工作是关于二阶波浪绕射问题的远场辐射条件的严格阐述，以及二阶散射势积分形式解与二阶波力积分表式中的无穷自由表面与二层流体分界面上的积分的数值估计和二阶问题的数值分析结果诸问题。

二、边值问题

我们考虑在二层海中的波浪绕射问题。为方便起见，假定海水由二层具有不同密度的流体组成，上层海水的密度为 ρ_1，下层海水的密度为 ρ_2，$\rho_2>\rho_1$，流体不可压缩，运动无旋。取固结于物体上之笛卡儿坐标系 $O\text{-}x_1x_2x_3$，x_3 轴的方向垂直向上，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$，$x_3=0$ 表示平均水表面，$x_3=-h$表示海洋密跃层（二层流体间的界面）的位置。将非线性自由表面条件和二层流体间的界面条件分别在平均水表面和二层流体的平均分界面上作台劳展开，并仅保留其二次项。设海浪谱可近似地用一系列足够多的具有不同频率$\{\omega_n\}$ 和振幅$\{A_n\}$ 的规则平面进行波的线性迭加来表述，并以波浪振幅为小参数将速度势作正则摄动展开，且分别记首阶入射和散射势为

$$\mathrm{Re}\{\varphi_m^I(\boldsymbol{x})\exp(-i\omega_m t)\}\text{和}\mathrm{Re}\{\varphi_m^S(\boldsymbol{x})\exp(-i\omega_m t)\}$$

易知，二阶散射势具有如下形式：

$$\Phi_2^S(\boldsymbol{x},t)=\sum_{n,m=1}\mathrm{Re}\{\Phi_{nm}^+(\boldsymbol{x})\exp(-i\Omega_{nm}^+t)+\Phi_{nm}^-(\boldsymbol{x})\exp(-i\Omega_{nm}^-t)\} \tag{2.1}$$

这里，t为时间，$\Omega_{nm}^\pm=\omega_n\pm\omega_m$，二阶和频与差频散射速度势$\Phi_{nm}^+$ 与Φ_{nm}^- 满足下述方程：

$$\nabla^2\Phi_{nm}^\pm=0,\qquad \boldsymbol{x}\in\mathscr{R} \tag{2.2}$$

$$L_{nm}^\pm\Phi_{nm}^\pm=P_{nm}^\pm(\boldsymbol{x}),\qquad x_3=0\text{上} \tag{2.3}$$

$$\rho_1L_{nm}^\pm\Phi_{nm}^\pm(x_1,x_2,-h+0^+)-\rho_2L_{nm}^\pm\Phi_{nm}^\pm(x_1,x_2,-h-0^+)=U_{nm}^\pm(x_1,x_2) \tag{2.4}$$

$$\partial_3\Phi_{nm}^\pm(x_1,x_2,-h+0^+)-\partial_3\Phi_{nm}^\pm(x_1,x_2,-h-0^+)=V_{nm}^\pm(x_1,x_2) \tag{2.5}$$

$$\partial_3\Phi_{nm}^\pm=0,\qquad x_3=-H\text{上} \tag{2.6}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\nabla(\Phi_{nm}^\pm+\varphi_{nm}^\pm)=0,\qquad \boldsymbol{x}=S_B\text{上} \tag{2.7}$$

及辐射条件。其中，微分算子$L_{nm}^\pm=\partial_3-v_{nm}^\pm$，$gv_{nm}^\pm=(\Omega_{nm}^\pm)^2$，$\partial_j=\partial/\partial x_j(j=1,2,3)$，$\mathscr{R}$为流域，$S_B$为物体的湿表面，$\boldsymbol{n}$为物面的单位外法向矢量，海底深度$H$为常数（当$H\to\infty$时表示无限深水情形），$\varphi_{nm}^+$和$\varphi_{nm}^-$分别表示二阶和频与差频入射势，强迫项$P_{nm}^\pm$，$U_{nm}^\pm$和$V_{nm}^\pm$可以表示为：

$$\begin{aligned}-i2gP_{nm}^\pm=&\Omega_{nm}^\pm\nabla\varphi_n^S\cdot\nabla\varphi_m^{S,\pm}-\omega_n\varphi_n^SL_m\varphi_m^{S,\pm}\\&+2\Omega_{nm}^\pm\nabla\varphi_n^S\cdot\nabla\varphi_m^{I,\pm}-\omega_n\varphi_n^SL_m\varphi_m^{I,\pm}\mp\omega_m\varphi_m^{I,\pm}L_n\varphi_n^S\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}2gU_{nm}^\pm=&i\rho(\Omega_{nm}^\pm\nabla\varphi_n^S\cdot\nabla\varphi_m^{S,\pm}+2\Omega_{nm}^\pm\nabla\varphi_n^S\cdot\nabla\varphi_m^{I,\pm})\Big|_{x_3=-h-0^+}^{x_3=-h-0^+}\\&+(\rho_2-\rho_1)[\eta_m^{S,\pm}D_n\partial_3\varphi_n^S+\eta_m^{S,\pm}D_n\partial_3\varphi_n^I+\eta_m^{I,\pm}D_n\partial_3\varphi_n^S]\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$2V_{nm}^\pm=\nabla_1\cdot(\eta_n^S\nabla_1\varphi_m^{S,\pm})+\nabla_1\cdot(\eta_n^S\nabla_1\varphi_m^{I,\pm})+\nabla_1\cdot(\eta_m^{I,\pm}\nabla_1\varphi_n^S) \tag{2.10}$$

其中，

$$\eta_n^I=i\omega_n^{-1}\partial_3\varphi_n^I(x_1,x_2,-h),\quad \eta_n^S=i\omega_n^{-1}\partial_3\varphi_n^S(x_1,x_2,-h),\quad gv_m=\omega_m^2,\quad \nabla_1=(\partial_1,\partial_2)$$

$$D_n=v_n^{-1}(v_n^2-\partial_3^2),\quad L_m=\partial_3^2-v_m\partial_3,\quad \varphi_m^{I,+}=\varphi_m^I=(\varphi_m^{I,-})^*,\quad \varphi_m^{S,+}=\varphi_m^S=(\varphi_m^{S,-})^*$$

而线性入射势具有如下形式[8]:

$$\varphi_m^I = ig\omega_m^{-1} A_m f(x_3, k_n, v_n)\exp\{i(k_{m1}x_1 + k_{m2}x_2)\} \tag{2.11}$$

这里，波数k_n是色散方程$W(v_n, k_n)=0$的正实根，函数W和f定义为:

$$W(v,k) = (r + T_1T_2)v^2 - r(T_1 + T_2)kv + (r-1)T_1T_2k^2 \tag{2.12}$$

$$f(x_3,k,v) = \frac{\cosh k(x_3+H)}{(1+\delta)\cosh kH} + \frac{1}{(1+\delta)}\begin{cases} \delta\cosh k(x_3+h)/\cosh kh, & x_3\in(h,H) \\ 0, & x_3\in(-h,-H) \end{cases} \tag{2.13}$$

其中,

$$r=\rho_2/\rho_1,\quad k_n=\sqrt{k_{n1}^2+k_{n2}^2},\quad \delta=(r-1)(v-kT_2)v^{-1}(1+T_1T_2)^{-1}$$

$$T_1=\tanh kh,\quad T_2=\tanh k(H-h),\quad T=\tanh kH$$

利用源汇分布方法，线性散射速度势的解可以写成:

$$\varphi_n^S(\boldsymbol{x}) = \int_{S_B} \sigma_n(\boldsymbol{q}) G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q};\ v_n)dS_B,\quad \boldsymbol{q}=(q_1,q_2,q_3)\in S_B \tag{2.14}$$

这里，$\sigma_n(\boldsymbol{q})$表示源汇强度，格林函数G由下述边值问题:

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q};v_n) = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{q}),\qquad \boldsymbol{x}\in\mathscr{R} \tag{2.15}$$

$$(\partial_3 - v_n)L_nG(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q};v_n)=0,\qquad x_3=0\text{上} \tag{2.16}$$

$$\rho_1L_nG(x_1,x_2,-h+0^+,\ \boldsymbol{q};v_n)=\rho_2L_nG(x_1,x_2-h-0^+,\boldsymbol{q};v_n) \tag{2.17}$$

$$\partial_3G(x_1,x_2,-h+0^+,\boldsymbol{q};v_n)=\partial_3G(x_1,x_2,-h-0^+,\boldsymbol{q};v_n) \tag{2.18}$$

$$\partial_3G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q};v_n)=0,\qquad x_3=-H\text{上} \tag{2.19}$$

$$\text{辐射条件,} \tag{2.20}$$

决定，其积分解式可见文献[8].

三、二阶辐射势及物体所受波浪力

众所周知，仅仅用式(2.2)～(2.7)是构不成适定的边值问题的，因此，我们还必须给出二阶和频与差频速度势Φ_{nm}^+与Φ_{nm}^-所满足的适当的远方条件．容易知道，仅要求Φ_{nm}^+和Φ_{nm}^-在无穷远处为零（对三维问题）或有限（对二维问题）是不够的，还必须规定扰动波的传播模式[3,4]．也就是说，求解二阶波浪绕射势时，我们必须给出一个适当的远方辐射条件．而如何给出二阶和频与差频速度势Φ_{nm}^+与Φ_{nm}^-所满足的远方辐射条件，并非易事．问题的症结在于我们对其远方辐射波的传播过程尚缺乏清晰明确的了解．可幸的是，若我们忽视严格的数学论证，而仅对其形式解感兴趣的话，可避开辐射条件所引起的困扰．事实上，利用格林公式，有

$$\begin{aligned}\int_V \rho[\Phi_{nm}^{\pm}(\boldsymbol{q})\nabla^2G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q};v_{nm}^{\pm}) - G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q};v_{nm}^{\pm})\nabla^2\Phi_{nm}^{\pm}(\boldsymbol{q})]d\boldsymbol{q} \\ = \int_{S_B+S_F+S_H+S_I^++S_I^-+S_R} \rho[\Phi_{nm}^{\pm}(\boldsymbol{q})\frac{\partial}{\partial n}G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q};\ v_{nm}^{\pm}) \\ - G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q};\ v_{nm}^{\pm})\frac{\partial}{\partial n}\Phi_{nm}^{\pm}(\boldsymbol{q})]dS\end{aligned} \tag{3.1}$$

其中，S_B表示近水表面以下的物体湿表面积，S_F表示平均水表面，S_I^+和S_I^-分别为二层流体的平均分界面S_I的上岸和下岸，S_R表示半径R_q为足够大之垂直圆柱面．注意到式(2.2)

$\sim$(2.7)及式(2.15)$\sim$(2.20)，我们得到：

$$\rho\Phi^{\pm}_{nm}(\boldsymbol{x})=\frac{1}{v^{\pm}_{nm}}\int_{S_I}[(U^{\pm}_{nm}(\boldsymbol{q})+\rho V^{\pm}_{nm}(\boldsymbol{q}))\frac{\partial}{\partial q_3}-\rho v^{\pm}_{nm}V^{\pm}_{nm}(\boldsymbol{q})]G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q};v^{\pm}_{nm})dS$$

$$+\int_{S_B}\rho\left[\Phi^{\pm}_{nm}(\boldsymbol{q})\frac{\partial}{\partial n}+\frac{\partial}{\partial n}\varphi^{\pm}_{nm}(\boldsymbol{q})\right]G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q};v^{\pm}_{nm})dS$$

$$-\int_{S_F}\rho P^{\pm}_{nm}(\boldsymbol{q})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q};v^{\pm}_{nm})dS$$

$$+\int_{S_R}\rho\left[\Phi^{\pm}_{nm}(\boldsymbol{q})\frac{\partial}{\partial R_q}G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q};v^{\pm}_{nm})-G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{q};v^{\pm}_{nm})\frac{\partial}{\partial R_q}\Phi^{\pm}_{nm}(\boldsymbol{q})\right]dS \tag{3.2}$$

易见，当$R_q\to\infty$时，若上式中最后一个积分收敛于零，则可通过在上式中令$\boldsymbol{x}\in S_B$而获得求解物面上$\Phi^{\pm}_{nm}$值的积分方程，进而得到整个流场的解．利用格林函数G所满足的辐射条件及远方渐近表式，可知，以上条件可退化为：

$$\lim_{R_q\to\infty}\sqrt{R_q}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial R_q}\Phi^{\pm}_{nm}(\boldsymbol{q})-ik^{\pm}_{jnm}\Phi^{\pm}_{nm}(\boldsymbol{q})\right]d\theta\to 0,\qquad j=1,2 \tag{3.3}$$

其中，$k^{\pm}_{1nm}$和$k^{\pm}_{2nm}$为频率为$\Omega^{\pm}_{nm}$时色散方程(2.13)的两个正实根．由此可见，我们可将式(3.3)作为一弱化的辐射条件的提法．值得指出的是，若要以一种严格的方式导出二阶问题的辐射条件，文献[4]所提供的方法，也许是一条切实可行的途径．

为简单起见，下面，我们假定物体表面是垂直的插入水面，这样，作用在物体上的二阶波浪力具有如下形式

$$F^{\pm}_{nm\alpha}=F^{\pm}_{1nm\alpha}+F^{\pm}_{2nm\alpha} \tag{3.4}$$

$$F^{\pm}_{1nm\alpha}=\frac{1}{8}\Big(\int_{S_B}\rho\nabla(\varphi^I_m+\varphi^S_m)\cdot\nabla(\varphi^{I,\pm}_n+\varphi^{S,\pm}_n)n_\alpha dS_B$$

$$\pm\rho_1\omega_n\omega_m\int_{L_{1W}}\rho(\varphi^I_m+\varphi^S_m)(\varphi^{I,\pm}_n+\varphi^{S,\pm}_n)n_\alpha dL_{1W}+\text{c.c.}\Big) \tag{3.5}$$

$$F^{\pm}_{2nm\alpha}=\frac{1}{2i}(\omega_n\pm\omega_m)\int_{S_B}\rho(\varphi^{\pm}_{nm}+\Phi^{\pm}_{nm})n_\alpha dS_B+\text{c.c.} \tag{3.6}$$

这里，L_{1W}为水线．

的确，求解$\Phi^{\pm}_{nm}$是件不易的事情，但若仅对二阶波浪力感兴趣的话，是可绕开这一困难的．事实上，若引入辅助函数，它由如下方程

$$\nabla^2\Psi^{\pm}_{nm\alpha}=0,\qquad \boldsymbol{x}\in\mathscr{R} \tag{3.7}$$

$$L^{\pm}_{nm}\Phi^{\pm}_{nm\alpha}=0,\qquad x_3=0\text{上} \tag{3.8}$$

$$\rho_1L^{\pm}_{nm}\Psi^{\pm}_{nm\alpha}(x_1,x_2,-h+0^+)=\rho_2L^{\pm}_{nm}\Psi^{\pm}_{nm\alpha}(x_1,x_2,-h-0^+) \tag{3.9}$$

$$\partial_3\Psi^{\pm}_{nm\alpha}(x_1,x_2,-h+0^+)=\partial_3\Psi^{\pm}_{nm\alpha}(x_1,x_2,-h-0^+) \tag{3.10}$$

$$\partial_3\Psi^{\pm}_{nm\alpha}=0,\qquad x_3=-H\text{上} \tag{3.11}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\nabla\Psi^{\pm}_{nm\alpha}=n_\alpha,\qquad \boldsymbol{x}=S_B\text{上} \tag{3.12}$$

和Sommerfeld条件决定．利用格林定理和式(3.3)，我们可以得到自由表面与二层流体分界面上的强迫项对二阶波力的贡献．事实上，由格林公式，有

$$\int_{S_B+S_F+S_H+S_I^++S_I^-+S_R}\rho\left[\Phi^{\pm}_{nm}\frac{\partial}{\partial n}\Psi^{\pm}_{nm\alpha}-\Psi^{\pm}_{nm\alpha}\frac{\partial}{\partial n}\Phi^{\pm}_{nm}\right]dS=0 \tag{3.13}$$

利用$\Phi^{\pm}_{nm}$和$\Psi^{\pm}_{nm\alpha}$所满足定解条件及式(3.3)，得到：

$$\int_{S_B}\rho\Phi^{\pm}_{nm}n_\alpha dS=-\int_{S_B}\rho\Psi^{\pm}_{nm\alpha}\nabla\varphi^{\pm}_{nm}\cdot\boldsymbol{n}dS+\rho_1\int_{S_F}\Psi^{\pm}_{nm\alpha}P^{\pm}_{nm}n_\alpha dS$$
$$-\frac{1}{v^{\pm}_{nm}(\rho_2-\rho_1)}\int_{S_I}\left[(\rho_2-\rho_1)\partial_3\Psi^{\pm}_{nm\alpha}U^{\pm}_{nm}+\rho_1\rho_2v^{\pm}_{nm}\Psi^{\pm}_{nm\alpha}\Big|^{x_3=-h+0^+}_{x_3=-h-0^+}V^{\pm}_{nm}\right]dS_I \quad (3.14)$$

四、结果与讨论

由上所述，我们知道，由于我们对二阶波浪绕射问题的远方辐射条件尚缺乏清晰明确的了解，因此，要获得二阶波浪绕射势的严格解案是困难的。但是，若式(3.3)所给出的弱化的辐射条件成立的话，式(3.2)中最后一个积分收敛于零，这样，我们便获得了二阶波浪绕射势的一个解案。基于人们对均匀海情形的了解，证实式(3.3)应无困难[4]。

从式(3.14)中可以看出，二阶波浪散射势对二阶波力的贡献不仅与自由表面上的强迫项相关，而且与二层流体分界面上的强迫项有关，再注意到在式(3.14)中右边的第三个积分中出现了$v^{\pm}_{nm}$的倒数项，因而，海水的层化特性对结构物所受之二阶差频波浪荷载可能具有显著的影响。同时，容易知道，

$$U^{\pm}_{nm}=O(\rho_2-\rho_1),\qquad \Psi^{\pm}_{nm\alpha}\Big|^{x_3=-h+0^+}_{x_3=-h-0^+}=O(\rho_2-\rho_1)$$

因此，海水的层化特性对结构物所受之二阶差频波浪荷载的影响取决于比值$(\rho_2-\rho_1)/v^{\pm}_{nm}$的大小。

关于二阶波浪绕射问题的远场辐射条件的严格阐述以及如何数值计算无穷自由表面与二层流体分界面上的积分的问题，乃是一个有待解决且富有挑战性的课题，亦是我们下一步工作的目标。

参 考 文 献

[1] C. C. Mei, *The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves*, Jone Wiley & Sons, Inc. (1983).

[2] O. M. Faltinsen, Wave loads on offshore structures, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 22 (1990), 35—56.

[3] G. P. Miao and Y. Z. Liu, On the radiation condition of second order wave diffraction problems, *The 9th OMAE Symp*, 1(*PartA*) (1990), 205—212.

[4] Wu Jianhua, Li Shimo and Wu Xiuhen, A second order stationary solution of three dimensional wave diffraction potential, *Acta Mechanica Sinica*, 7(1) (1991).

[5] 陶建华、刘连武，波浪和水流对大直径圆柱的共同作用力，水动力学研究与进展，A辑，8(3) (1993), 265—272.

[6] 吴建华、陈耀松，弱非线性调制波的二阶绕射理论，《中国博士后论文集》（第四集），北京大学出版社 (1991).

[7] A. R. Osborne and T. L. Burch, Internal solitons in the andaman sea, *Science*, 208(4443) (1980), 451—460.

[8] 吴建华、吴秀恒、李世谟，大尺度物体在层化海洋中波浪绕射和散射理论(Ⅰ)、(Ⅱ)、(Ⅲ)，水动力学研究与进展，A(2) (1989), 81—88; 4(3) (1989), 105—110; 5(1) (1990), 74—80.

[9] Wu Jianhua, The second order wave loads in stratified ocean, *Proc. of 7th Intl. Workshop on Water Waves and Floating Bosies*, Val de Reuil, France, May 24—27, (1992).

On the Second Order Wave Diffraction in Two Layer Fluids

Wu Jianhua Fang Ying

(*Department of Mechanics, Zhongshan University, Guangzhou* 510275, *P. R. China*)

Abstract

In this paper, with assumption that the stratified ocean consists of two layer fluids with different densities, the problem of the second order wave diffraction by three dimensional bodies in the stratified ocean is investigated. With the use of the regular perturbation method, the boundary value problem of the second order multi-chromatic wave scattering potential is firstly formulated, and is based on a weakly radiation condition, a formal solution of this boundary value problem is then found. By using Green theorem and introducing an assisting potential, the integral expressions, which do not explicitly connect with the second order scattering potential, of the second order wave loads are also derived. Our analysis indicates that the effects of the stratification upon the second order difference frequency wave loads on the structures may be significant.

Key words wave diffraction and scattering, shipbuilding and offshore engineering, wave loads, nonlinear water waves, internal waves