应用数学和力学，第17卷 第11期（1996年11月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

用内禀法求解某些四阶微分方程的有界性和稳定性成果

西密尔·通兹[1]　　爱丁·帖亚克[2]

（钱伟长推荐，1996年2月16日收到）

摘　　要

本文首先对方程(1.1)建立了Lyapunov函数，然后在$p=0$的情况下，证明了平庸解$x=0$在大范围内的渐近稳定性，和在$p\neq 0$的情况下，研究了(1.1)式的解的有界性问题。这些结论对一些众所周知的成果有所改进。

关键词　四阶微分方程　Lyapunov函数　渐近稳定性　有界性　内禀法

一、引　　论

本文研究下述四阶微分方程：

$$x^{(4)}+\varphi(\ddot{x})\dddot{x}+f(x,\ \dot{x})\ddot{x}+k(x)\dot{x}+h(x)=p(t,\ x,\ \dot{x},\ \ddot{x},\ \dddot{x}) \tag{1.1}$$

其中　φ, f, k, h, p为所表变量的函数，“x”上的点表示对t的导数。φ, f, k, h, p分别为有关变量在一切域内的连续函数。而且，微分$\dfrac{\partial f(x,\ \dot{x})}{\partial x}=f_x(x,\ \dot{x})$，$\dfrac{dh}{dx}=h'(x)$存在且连续。对于各种四阶微分方程的解的有界性和稳定性曾由许多作者讨论过，其中有Afuwape[1],[2]，Asmussen[4]，Barbalat[5]，Ezeilo[11]，Ezeilo和Tejnmola[12]，Hara[13],[14]，Harrow[15]，Lalli和Skrapek[17]，Sinha和Moft[20]等。他们曾对下列方程获得某些成果

$$x^{(4)}+f_1(\ddot{x})\dddot{x}+f_2(\dot{x},\ \ddot{x})+f_3(\dot{x})+f_4(x,\ \dot{x})=p(t,\ x,\ \dot{x},\ \ddot{x},\ \dddot{x})$$

或这个方程的某些特例。这些论文某一部份，也已在[19]中作了总结。研究(1.1)的动机来源于Zeilo[11]，Harrow[15]，Lalli及Skrapek[17]，和俞元洪、陈文灯[22]关于Cauchy问题的解在原点的全局渐近稳定性以及解的有界性的工作。本文的目的是对(1.1)方程求得相似的结论。对此，我们的主要工具是构造一个合适的Lyapunov函数$V(x,\ y,\ z,\ w)$，[6]，[18]曾指出对于四阶微分方程寻找Lyapunov函数是困难的。但是，在文献中，有不少方法曾被推荐来推导Lyapunov函数，并用以研究非线性系统的有界性和稳定性，这些方法曾在[7]中总结过。

---

1 土耳其玉珍翠延大学数学系。
2 土耳其哈西太伯大学数学系。

本文首先用内禀法对(1.1)式构造了一个合适的函数V，这个内禀法是Chin[8]所引用的，其次，本文证明在$p=0$的情况下，在原点$x=0$的平庸解的渐近稳定性，和在$p\neq 0$的情况下，(1.1)的解的有界性（满足$|p(t, x, y, z, w)|\leqslant(A+|y|+|z|+|w|)q(t)$，此处$q(t)$为$t$的非负函数）．

二、构造函数V(x,y,z,w)

设(1.1)式中$p=0$．于是(1.1)式在$p=0$时可以写成相变量形式：

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}=y,\ \dot{y}=z,\ \dot{z}=w,\\&\dot{w}=-\varphi(z)w-f(x,\ y)z-k(x)y-h(x)\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

由此，有

$$\frac{dw}{dz}=-\frac{\varphi(z)w+f(x,\ y)z+k(x)y-h(x)}{w}\tag{2.2}$$

积分给出

$$\frac{1}{2}w^2+\int_0^z\varphi(z)wdz+\int_0^z f(x,\ y)zdz+\int_0^z k(x)ydz+\int_0^z h(x)dz=0\tag{2.3}$$

设
$$I_1=\int_0^z h(x)dz=h(x)z-\int_0^t h'(x)yzdt\tag{2.4}$$

$$I_2=\int_0^z k(x)ydz=\int_0^t k(x)ywdt\tag{2.5}$$

$$I_3=\int^z f(x,\ y)zdz\tag{2.6}$$

$$I_4=\int_0^z\varphi(z)wdz=\int_0^t\varphi(z)w^2dt\tag{2.7}$$

从(2.1)，我们有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{z}{y}$$

积分得
$$-\frac{d}{2}y^2+\int_0^t dyzdt=0\tag{2.8}$$

把(2.8)和(2.3)式相加，并把(2.4)，(2.5)，(2.6)，(2.7)诸式代入(2.3)式所属诸项，得

$$\frac{1}{2}w^2+\int_0^t\varphi(z)w^2dt+\int_0^t f(x,\ y)zdz+\int_0^t k(x)ywdt+h(x)z$$
$$-\int_0^t h'(x)yzdt-\frac{d^2}{2}y^2+\int_0^t dzydt=0\tag{2.9}$$

把(2.9)式和下式相比

$$V+\int_0^t[-\dot{V}]dt=0\tag{2.10}$$

正如参考文献[3]所指出的那样，我们得

$$V_1=\frac{1}{2}W^2+\int_0^z f(x,\ y)zdz+h(x)z-\frac{d}{2}y^2\tag{2.11}$$

和
$$\dot{V}_1=-\varphi(z)w^2-k(x)yw+h'(x)yz-dyz\tag{2.12}$$

设
$$V_2=V_1+cyz\tag{2.13}$$

从(2.11)和(2.12)，我们得

$$V_2=\frac{1}{2}w^2+\int_0^z f(x,\ y)zdz+h(x)z-\frac{d}{2}y^2+cyz \tag{2.14}$$

和
$$\dot V_2=-\varphi(y)w^3-k(x)yw+h'(x)yz-dyz+cyw \tag{2.15}$$

还有，考虑恒等式

$$-\frac{1}{2}z^2+\int_0^y wdy=0 \tag{2.16}$$

上式可以$dy=\dfrac{w}{z}$的积分上求得．设

$$\begin{aligned}I_5=\int_0^y wdy&=wy+\int_0^t[\varphi(z)w+f(x,\ y)z+k(x)y+h(x)]dt\\&=wy+y\int_0^t\varphi(z)dz-\int_0^t\left(z\int_0^t\varphi(z)dz\right)dt+\int_0^t f(x,\ y)zydt\\&\quad+\int_0^t k(x)y^2dt+\int_0^x h(x)dx\end{aligned} \tag{2.17}$$

把(2.17)代入(2.16)，并和(2.10)相比，给出

$$V_3=-\frac{1}{2}z^2+wy+y\int_0^z\varphi(z)dz+\int_0^x h(x)dx \tag{2.18}$$

和
$$\dot V_3=z\int_0^z\varphi(z)dz-f(x,\ y)zy-k(x)y^2 \tag{2.19}$$

设
$$V_4=V_3+\int_0^y f(x,\ y)ydy \tag{2.20}$$

从(2.18)和(2.19)，我们得

$$V_4=-\frac{1}{2}z^2+wy+y\int_0^z\varphi(y)dz+\int_0^x h(x)dx+\int_0^y f(x,\ y)ydy \tag{2.21}$$

和
$$\dot V_4=z\int_0^z\varphi(z)dz-k(x)y^2+y\int_0^y f_x(x,\ y)ydy \tag{2.22}$$

最后，让我们考虑积分

$$\begin{aligned}I_6&=-\int_0^t f(x,\ y)z^2dt\\&=zw-\int_0^t w^2dt+\int_0^z\varphi(z)zdz+\int_0^y k(x)ydy+h(z)y-\int_0^t h'(x)y^2dt\end{aligned} \tag{2.23}$$

把积分$\int_0^t f(x,\ y)z^2dt$加在(2.23)的两端，并(2.10)式相比，我们得

$$V_5=zw+\int_0^z\varphi(z)zdz+\int_0^y k(x)ydy+h(x)y \tag{2.24}$$

和
$$\dot V_5=-f(x,\ y)z^2+w^2+h'(x)y^2 \tag{2.25}$$

设取 $V=[\alpha V_2+\beta V_4+\gamma V_5]$

其中α，β和γ分别为待定常数．于是，我们得到(2.1)的某一函数V及其相应的$\dot V$如下：

$$2V=2\beta\int_0^x h(x)dx+2\beta\int_0^y f(x,\ y)ydy-\alpha dy^2+2\gamma\int_0^y k(x)ydy$$

$$+2ay\int_0^z f(x,\ y)zdz+2\gamma\int_0^t \varphi(z)zdz-\beta z^2+aw^2+2\gamma h(x)y$$

$$+2ah(x)z+2acyz+2\beta y\int_0^z \varphi(z)dz+2\beta yw+2\gamma zw \tag{2.26}$$

及
$$\dot{V}=-a^2\varphi(z)w^2+acz^2+ah'(x)yz-adyz+\beta z\int_0^z \varphi(z)dz$$

$$+\beta y\int_0^y f_x(x,\ y)ydy-\beta k(x)y^2-\gamma f(x,\ y)z^2+\gamma h'(x)y^2+\gamma w^2$$

$$+dcyw-ak(x)yw \tag{2.27}$$

应该指出，在(2.26)式中适当选用 a，β 和 γ 等常数，我们可以求得某些作者业已研究过的某几种Lyapunov函数。实际上，当$a=1$，$\beta=\dfrac{ad}{c}$，和$\gamma=a$时，我们通过重新排列，得到在文献[6]，[9]，[16]，[21]中所处理的方程的 Lyapunov函数，这些方程都是(1.1)式的特殊情况。

三、(1.1)式的解的有界性和稳定性

让我们考虑(1.1)式的相变量形式

$$\left.\begin{array}{l}\dot{x}=y,\ \dot{y}=z,\ \dot{z}=w\\ \dot{w}=-\varphi(z)w-f(x,\ y)z-k(x)y-h(x)+p(t,\ x,\ y,\ z,\ w)\end{array}\right\} \tag{3.1}$$

取
$$\varphi_1(z)=\frac{1}{z}\int_0^z \varphi(z)dz\quad (z\neq 0),\ \varphi_1(0)=\varphi(0)$$

在$p\neq 0$的情况下，我们有

定理1 假设下列条件得到满足：

(i) $h(0)=0$，

(ii) 设有正常量a,b,c,d,δ及ε，对一切 x，y，z而言，$f(x,\ y)\geqslant b$，$abc-c^2-ad\varphi(z)\geqslant\delta>0$，其中$\varepsilon\leqslant\dfrac{\delta}{2acD}$，$D=ab+\dfrac{bc}{d}$，

(iii) 对所有x和 $h(x)\operatorname{sgn}x\to\infty$，$|x|\to\infty$而言，$0<d-\dfrac{a\delta}{4c}<h'(x)\leqslant d$，

(iv) 对所有x而言，$0\leqslant k(x)-c\leqslant\dfrac{\varepsilon a}{4}\sqrt{ac}$，

(v) 对所有z而言，$\varphi(z)\geqslant a$，$\varphi_1(z)-\varphi(z)<\dfrac{\delta}{2a^2c}$，

(vi) 对所有x，y而言，$yf_x(x,\ y)\leqslant 0$。

于是系统(3.1)的平庸解在全局讲来是渐近稳定的。

备注1 从条件(ii)，(iv)和(v)中，我们得到

$$\varphi(z)<\frac{bc}{d},\quad c<ab \tag{3.2}$$

备注2 定理 1 对[19]和[22]中的一些结论有所改进。

在$p(t, x, y, z, w)\neq 0$的情况下，我们有

定理2 设下述条件满足：

(i) 定理 1 中的条件(ii)～(vi)适用。

(ii) $|p(t, x, y, z, w)|\leqslant(A+|y|+|z|+|w|)q(t)$，其中$q(t)$是$t$的非负的连续函数，并在$t\geqslant 0$所有范围内满足$\int_0^t q(s)ds\leqslant B<\infty$，$A$和$B$为正常量。

于是，对所有已给的有限x_0，y_0，z_0，w_0值而言，必有一常量$K=K(x_0, y_0, z_0, w_0)$存在，使系统(3.1)的任意解$(x(t), y(t), z(t), w(t))$为

$$x(0)=x_0,\ y(0)=y_0,\ z(0)=z_0,\ w(0)=w_0 \tag{3.3}$$

所决定，而且在所有$t\geqslant 0$而言，满足

$$|x(t)|\leqslant K,\ |y(t)|\leqslant K,\ |z(t)|\leqslant K,\ |w(t)|\leqslant K \tag{3.4}$$

为了证明这个定理，我们主要运用(2.26)所定义的连续函数

$$\begin{aligned}2V=&2\beta\int_0^x h(x)dx+2\beta\int_0^y f(x, y)ydy-ady^2+2\gamma\int_0^y k(x)ydy\\&+2\alpha\int_0^z f(x, y)zdz+2\gamma\int_0^z\varphi(z)zdz-\beta z^2+\alpha w^2+2\gamma h(x)y\\&+2\alpha h(x)z+2\alpha cyz+2\beta y\int_0^z\varphi(z)dz+2\beta yw+2\gamma zw\end{aligned}$$

其中 $\alpha=\varepsilon+\dfrac{1}{a}$，$\beta=\varepsilon+\dfrac{d}{c}$，$\gamma=1$。

通过下述引理，我们将证明，$V(x, y, z, w)$是系统(2.1)的Lyapunov函数。

引理1 假定定理 1 的条件适用。于是，正常数$D_i=D_i(a, b, c, d, \varepsilon, \delta)$ $(i=1, 2, 3, 4)$，使

$$V\geqslant D_1\int_0^x h(x)dx+D_2y^2+D_3z^2+D_4w^2 \tag{3.5}$$

对所有x，y，z，w都满足。

证明 把$2V$函数重写如下：

$$\begin{aligned}2V=&\frac{1}{c}[h(x)+cy+\alpha cz]^2+\frac{1}{\varphi_1(z)}[w+\varphi_1(z)z+\beta\varphi_1(z)y]^2\\&+\left[\alpha-\frac{1}{\varphi_1(z)}\right]w^2+2\int_0^z[\alpha f(x, y)-\beta-\alpha^2c]zdz-\beta^2\varphi_1(z)y^2\\&+2\int_0^y[\beta f(x, y)-ad]ydy+2\int_0^y(k(x)-c)ydy\\&+\left[2\beta\int_0^x h(x)dx-\frac{1}{c}h^2(x)\right]+\left[2\int_0^z\varphi(z)zdz-\varphi_1(z)z^2\right]\end{aligned}$$

从(i)和(iii)，很易求得

$$\begin{aligned}W_1\equiv&\left[2\beta\int_0^x h(x)dx-\frac{1}{c}h^2(x)\right]=2\left(\varepsilon+\frac{d}{c}\right)\int_0^x h(x)dx-\frac{1}{c}h^2(x)\\=&\frac{2}{c}\int_0^x[d-h'(x)]h(x)dx+2\varepsilon\int_0^x h(x)dx-\frac{1}{c}h^2(0)\end{aligned}$$

$$\geqslant 2\varepsilon\int_0^x h(x)dx.$$

现在让我们考虑表达式

$$W_2=2\int_0^y[\beta f(x,\ y)-\alpha h'(x)]ydy-\beta^2\varphi_1(z)y^2+2\int_0^y(k(x)-c)ydy$$

根据条件(iv)，上式的第二个括弧内的值是非负的．对于第一个括弧而言，在使用了中值定理以后，从条件(ii)，(iii)，(v)和(3.2)，我们有

$$\begin{aligned}
W_2&\geqslant 2\int_0^y[\beta f(x,\ y)-\alpha d]ydy-\beta^2\varphi_1(z)y^2\\
&=2\int_0^y[\beta f(x,\ y)-\alpha d]zdz-\beta^2\varphi(\theta z)y^2\\
&\geqslant[\beta b-\alpha d-\beta^2\varphi(\theta z)]y^2\\
&=\beta[b-\alpha c-\beta\varphi(\theta z)]y^2+\alpha[\beta c-d]y^2\\
&\geqslant\beta\left[b-\frac{c}{a}-\frac{d}{c}\varphi(\theta z)\right]y^2-\varepsilon\beta\left[ab+\frac{bc}{d}\right]y^2\\
&=\beta\left[b-\frac{c}{a}-\frac{d}{c}\varphi(\theta z)\right]y^2-\varepsilon\beta Dy^2\\
&=\frac{\beta}{ac}[abc-c^2-ad\varphi(\theta z)]y^2-\varepsilon\beta Dy^2\\
&\geqslant\frac{\beta\delta}{ac}y^2-\beta\varepsilon Dy^2\geqslant\frac{\beta\delta}{2ac}y^2\\
&\geqslant\frac{d\delta}{2ac^2}y^2
\end{aligned}$$

其中　$0\leqslant\theta\leqslant 1$.

现在考虑表达式

$$\begin{aligned}
W_3&=2\int_0^z[\alpha f(x,\ y)-\beta-\alpha^2c]zdz+\left[2\int_0^z\varphi(z)zdz-\varphi_1(z)z^2\right]\\
&=W_{31}+W_{32}
\end{aligned}$$

用相似的消去法，通过使用条件(ii)和(v)，我们有

$$\begin{aligned}
W_{31}&=2\int_0^z[\alpha f(x,\ y)-\beta-\alpha^2c]zdz\\
&\geqslant[\alpha b-\beta-\alpha^2c]z^2\\
&=\alpha[b-\alpha c-\beta\varphi(z)]z^2+\beta\varphi(z)\left[\alpha-\frac{1}{\varphi(z)}\right]z^2\\
&\geqslant\alpha[b-\alpha c-\beta\varphi(z)]z^2\\
&=\alpha\left[b-\left(\varepsilon+\frac{1}{a}\right)c-\left(\varepsilon+\frac{d}{c}\right)\varphi(z)\right]z^2\\
&=\frac{\alpha}{ac}[abc-c^2-ad\varphi(z)]z^2-\alpha\varepsilon[c+\varphi(z)]z^2\\
&\geqslant\frac{\alpha\delta}{ac}z^2-\alpha\varepsilon\left[ab+\frac{bc}{a}\right]z^2\\
&=\left[\frac{\alpha\delta}{ac}-\alpha\varepsilon D\right]z^2\geqslant\left[\frac{\alpha\delta}{ac}-\frac{\alpha D\delta}{2acD}\right]z^2\geqslant\frac{\delta}{2a^2c}z^2
\end{aligned}$$

从(v)，我们得到

$$W_{32}\equiv\int_0^z[\varphi(z)-\varphi_1(z)]zdz$$

$$\geqslant\int_0^z\frac{-\delta}{2a^2c}zdz=-\frac{\delta}{4a^2c}z^2$$

所以，

$$W_3\geqslant\frac{\delta}{4a^2c}z^2$$

最后，我们有

$$W_4=\left[a-\frac{1}{\varphi_1(z)}\right]w^2\geqslant\varepsilon w^2$$

把上面的结果加在一起，得

$$2V\geqslant2\varepsilon\int_0^x h(x)dx+\frac{d\delta}{2ac^2}y^2+\frac{\delta}{4a^2c}z^2+\varepsilon w^2$$

这就证明了引理。

引理2　假定定理1的所有条件都适用。于是，当$D_i=D_i(a, b, c, \varepsilon, \delta)$　$(i=5, 6, 7)$为正常量，而且(x, y, z, w)是(2.1)式的任意解时，我们证明

$$\dot V\equiv\frac{d}{dt}V(x, y, z, w)\leqslant-(D_5y^2+D_6z^2+D_7w^2) \tag{3.6}$$

证明　我们考虑$\dot V$，它是(2.27)式给出的V式的时间导数：

$$\begin{aligned}\dot V=&-[d-h'(x)]\left[y+\frac{az}{2}\right]^2-[\beta k(x)-d]y^2-[f(x, y)-ac-\beta\varphi_1(z)]z^2\\&+\frac{a^2}{4}[d-h'(x)]z^2-[a\varphi(z)-1]w^2+By\int_0^y f_x(x, y)ydy\\&-a[k(x)-c]yw\end{aligned} \tag{3.7}$$

通过上文相似的估算，在使用了条件(ii)，(iii)，(iv)，(v)，(vi)后，从(3.7)式，我们求得

$$\dot V\leqslant-\varepsilon cy^2-\frac{\delta}{4ac}z^2-\varepsilon aw^2-a[k(x)-c]yw$$

让我们考虑表达式

$$W_5\equiv-\frac{\varepsilon c}{4}y^2-\frac{\varepsilon a}{4}w^2-a[k(x)-c]yw$$

这里指出，上述表达式所有三个系数都不是正的，而且，从条件(ii)和(iv)，对有所有x值而言

$$a^2[k(x)-c]^2<\frac{4}{a^2}[k(x)-c]^2<\frac{\varepsilon^2ac}{4}$$

所以　$$\dot V\leqslant-\frac{3}{4}\varepsilon cy^2-\frac{\delta}{4ac}z^2-\frac{3}{4}\varepsilon aw^2$$

这里可以指出，如何选用$D_i(i=5, 6, 7)$业已清楚，而且引理2也获得证明。

定理1的证明　由引理1和定理1的条件(iii)，

$$\left.\begin{aligned}&V(x, y, z, w)=0,\ x^2+y^2+z^2+w^2=0,\\&V(x, y, z, w)>0,\ x^2+y^2+z^2+w^2\neq0,\\&V(x, y, z, w)\to\infty,\ x^2+y^2+z^2+w^2\to\infty\end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

并设$(x(t),\ y(t),\ z(t),\ w(t))$为(2.1)的任意解，而且考虑函数$V(t)=V(x(t),y(t),z(t),w(t))$和这一解相关．根据引理2，我们有

$$V(t)\leqslant V(0)\quad(\text{对}t\geqslant 0\text{而言})$$

于是，定理 1 的证明和 Ezeilo[10] 的证明相同．所以，(2.1)的平庸解在全局中是渐近稳定的．

定理 2 的证明 这里的证明基本上可以根据 Antosiewicz[3] 所使用的方法进行．设$(x(t),\ y(t),\ z(t),\ w(t))$为满足起始条件(3.3)的(3.1)式的解．考虑函数$V(t)=V(x(t),y(t),z(t),w(t))$，其中$V(x,\ y,\ z,\ w)$为证明定理 1 时所用的函数$V$．所以$V$满足(3.8)．在证明(3.4)时，只要证明有一常量$K=K(x_0,\ y_0,\ z_0,\ w_0)>0$，它使

$$V(t)\leqslant K\qquad(t\geqslant 0)$$

由于现在$h(0)$不一定要求等于零，我们只需要在证明引理 1 时，进行下述估算：

$$W_1\geqslant 2\varepsilon\int_0^x h(x)dx-\frac{1}{c}h^2(0)$$

取$D_0=\frac{1}{c}h^2(0)$，于是，在定理 2 的条件(i)下，引理 1 的结论可以改写为

$$V\geqslant D_1\int_0^x h(x)dx+D_2y^2+D_3z^2+D_4w^2-D_0\tag{3.9}$$

而且，由于$p\neq 0$，引理 2 的结论可以改写为

$$\dot V(x,\ y,\ z,\ w)\leqslant-(D_5y^2+D_6z^2+D_7w^2)+[\alpha w+\gamma z+\beta y]p(t,\ x,\ y,\ z,\ w)$$

设$D_8=\max(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$，我们有

$$\dot V\leqslant D_8[|y|+|z|+|w|][A+|y|+|z|+|w|]g(t),$$

使用不等式

$$|w|\leqslant 1+w^2\text{和}2|yz|\leqslant y^2+z^2$$

我们得

$$\dot V\leqslant D_9[3+4(y^2+z^2+w^2)]g(t)\tag{3.10}$$

这里$D_9=D_8(A+1)$．

设$D_{10}=\min(D_2,\ D_3,\ D_4)$，以(3.9)，我们有

$$V\geqslant D_{10}[y^2+z^2+w^2]-D_0\tag{3.11}$$

用(3.10)，和(3.11)，我们有

$$\dot V\leqslant D_{11}q(t)+D_{12}Vq(t)\tag{3.12}$$

其中

$$D_{11}=3D_9+\frac{4D_0D_9}{D_{10}},\quad D_{12}=\frac{4D_9}{D_{10}}$$

从0到t积分(3.12)，我们得

$$V(t)-V(0)\leqslant D_{11}\int_0^t q(s)ds+D_{12}\int_0^t V(s)q(s)ds,$$

置$D_{13}=V(0)+D_{11}B$，使用定理 2 的条件(ii)，我们有

$$V(t)\leqslant D_{13}+D_{12}\int_0^t V(s)q(s)ds$$

Gronwall-Bellman不等式给出

$$V(t)\leqslant D_{13}\exp\left[D_{12}\int_0^t q(s)ds\right]$$

这就完成了定理 2 的证明.

参 考 文 献

[1] A. U. Afuwape, On the convergence of solutions of certain fourth order differential equations. *An Stiint Univ., Al L. Cuza, Lasi Sect, Ia Mat.*, (N.S.) 27(1) (1981), 133—138.

[2] A. U. Afuwape, Convergence of the solutions for the equation $x^{(4)}+a\dddot{x}+b\ddot{x}+g(\dot{x})+h(x)=p(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x})$, *Internat. J. Math. and Math. Sci.*, 11(4) (1988), 727—734.

[3] H. A. Autosiewicz, On non-linear differential equations of the second order with integrable forcing term, *J. London Math. Soc.*, 3 (1955), 64—67.

[4] M.A.Asmussen, On the behavior of solutions of certain differential equations of the fourth order, *Ann. Mat. Pura. Appl.*, 89 (1971), 121—143.

[5] I. Barbalat, *Eqns.Diff.et Fonctionneless Non-Linearies*, Hermann, Paris (1973), 80—91.

[6] M. L. Cartwright, On the stability of solutions of certain differential equations of the fourth order, *Ouart. J. Mech. and Applied Math.*, 9 (1956), 185—195.

[7] P. S. M. Chin, Generalized integral method to derive Lyapunov functions for non-linear systems, *Int. J. Control*, 46(3) (1987), 933—943.

[8] P. S. M. Chin, Stability of non linear systems via the intrinsic method, *Int. J. Control*, 48(4) (1988), 1561—1567.

[9] P. S. M. Chin, Stability results for the solutions of certain fourth-order autonomous differential equations, *Int. J. Control*, 49(4) (1989), 1163—1173.

[10] J. O. C. Ezeilo, On the boundedness and the stability of solutions of some differential equations of the fourth order, *J. Math. Anal. Appl.*, 5 (1962), 136—146.

[11] J. O. C. Ezeilo, A stability result for solutions of a certain fourth order differential equation, *J. London Math. Soc.*, 37 (1962), 28—32.

[12] J. O. C. Ezeilo and H. O. Tejumola, On the boundedness and the stability properties of solutions of certain fourth order differential equations, *Ann. Mat. Pura. Appl.*, (IV), 95 (1973), 131—145.

[13] T. Hara, A remark on the asymptotic behavior of the solution of $\dddot{x}+f(\ddot{x})\dddot{x}+\phi(\dot{x}, \ddot{x})+g(\dot{x})+h(x)=p(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x})$, *Porc. Japan Acad.*, 48 (1972), 353—355.

[14] T.Hara, On the asymptotic behavior of the solutions of some third and fourth order nonautonomous differential equations, *Publ. RIMS*, Kyoto Univ., 9(3) (1974), 649—673.

[15] M. Harrow, Further results on the boundedness and the stability of solutions of some differential equations of the fourth order, *SIAM J. Math. Anal.*, 1 (1970), 189—194.

[16] Y. H. Ku (顾毓秀), Lyapunov function of a fourth-order system, *I.E.E.E.*

Trans. Autom. Control, 9 (1964), 273—278.

[17] B. S. Lalli and W. S. Skrapek, On the boundedness and stability of solutions of some differential equations of the fourth order. *SIAM. J. Math. Anal.*, 2 (1971), 221—225.

[18] E. Morman. W. Trench and R. Drake. *Research in Methods of Generating Liapunov Functions*. (Pennsylvania: Drexel Institute of tchnology) (1979).

[19] R. Reissig, G. Sansone and R. Conti, *Nonlinear Differential Equations of Higher Order*, Noordhoff International Publishing (1974).

[20] A. S. C. Sinha and R. G. Hoft, Stability of a nonautonomous differential equation of the fourth order, *SIAMJ. Control*, 9 (1971), 8—14.

[21] A. Tiryaki and C. Tunc, Constructing Lyapunov functions for certain fourth-order autonomous differential equations, *Indian J. Pure Appl. Math.*, 26(3) (1995), 225—232.

[22] 俞元洪、陈文灯，一类四阶微分方程解的有界性和稳定性，应用数学和力学，11(9) (1990), 827—832.

On the Boundedness and the Stability Results for the Solution of Certain Fourth Order Differential Equations via the Intrinsic Method

Cemil TUNÇ

(*Mathematics Department, Yüzüncü Yıl University*, 65080 *Van/TURKEY*)

Aydın TİRYAKİ

(*Mathematics Department, Hacettepe University*, 06532 *Beytepe Ankara/TURKEY*)

Abstract

In this paper, we first present constructing a Lyapunov function for (1.1) and then we show the asymptotic stability in the large of the trivial solution $x=0$ for case p o, and the boundedness result of the solutions of (1.1) for case $p=0$. These results improve seveal well-known results.

Key words nonlinear differential equations of the fourth order, Lyapunov function, stability, boundedness, intrinsic method