

# 二维潜水运动方程的分裂解法

徐绍辉<sup>1</sup> 朱学愚<sup>1</sup> 朱国荣<sup>1</sup>

(李家春推荐, 1995年5月11日收到)

## 摘 要

本文通过对二维潜水运动方程的变形, 按其在形式上所代表的意义不同, 用和分裂方法, 把它分解成“对流”和“扩散”两部分. 对前者, 用交替方向有限差分法求解; 对后者, 用交替方向 Picard 迭代法进行计算, 从而达到获得整个问题的解的目的. 最后, 用数值例子验证了所提方法的有效性, 并与线性化的有限差分法作了对比, 证明本文所提方法在计算精度上有所提高.

**关键词** 潜水运动方程 非线性 分裂法 交替方向法 Picard 迭代

## 一、引 言

众所周知, 二维潜水运动的控制方程

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa H \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \kappa H \frac{\partial H}{\partial y} \right) + W = \mu \frac{\partial H}{\partial t}$$

为一非线性的抛物型方程. 目前, 在地下水渗流的数值模拟研究中, 其常见的做法是, 将括号中的  $\kappa H$  用  $\kappa H$  来代替 ( $H$  是含水层的平均厚度), 那么, 可把  $\kappa H$  看作常数移到括号外面来, 上述方程就变成

$$\kappa H \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \kappa H \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + W = \mu \frac{\partial H}{\partial t}$$

它类似于承压水运动方程的形式 (为一线性抛物型方程), 可用常规的数值法, 如有限差分法、有限单元法及边界单元法等来求解.

作者认为, 在潜水水位  $H$  的变幅  $\Delta H$  不大的情况下, 该处理方法还是可行的; 但当潜水水位的变幅  $\Delta H$  较大时, 仍然用这样的处理方法来解决上述问题, 将会产生较大的误差. 为了保证所求问题的精度, 本文拟通过对潜水运动方程的推演变形, 用分裂方法来达到数值计算的目的.

## 二、二维潜水运动方程的变形

在这里, 我们考虑一比较简单的情况, 假定潜水含水层均质, 各向同性, 底板水平, 无

<sup>1</sup> 南京大学地球科学系, 南京 210093.

源汇项, 则描述这样一种地质模型的控制方程为:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa H \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \kappa H \frac{\partial H}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial H}{\partial t} \quad ((x, y) \in \Omega, t \in (0, T]) \quad (2.1)$$

式中  $H$  为潜水含水层的水位(也是含水层的厚度)( $L$ ),  $\kappa$  为潜水含水层的渗透系数( $TL^{-1}$ ),  $\mu$  是给水度,  $t$  是时间( $T$ ),  $x, y$  是空间坐标( $L$ ).

(2.1)式左边第一项:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa H \frac{\partial H}{\partial x} \right) = \kappa \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} + \kappa H \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \quad (2.2)$$

(2.1)式左边第二项:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \kappa H \frac{\partial H}{\partial y} \right) = \kappa \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial y} + \kappa H \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \quad (2.3)$$

把(2.2)和(2.3)代入(2.1)得:

$$\kappa \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} + \kappa H \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \kappa \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial y} + \kappa H \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \mu \frac{\partial H}{\partial t} \quad (2.4)$$

而  $\kappa \frac{\partial H}{\partial x} = v_x$ ,  $\kappa \frac{\partial H}{\partial y} = v_y$ ,  $v_x, v_y$  分别为  $x, y$  方向上的渗透流速, 所以, (2.4)式变为:

$$v_x \frac{\partial H}{\partial x} + v_y \frac{\partial H}{\partial y} + \kappa H \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \kappa H \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \mu \frac{\partial H}{\partial t} \quad (2.5)$$

### 三、变形后的潜水运动方程的和分裂

(2.5)式类似于对流弥散方程, 左端前两项相当于“对流”部分, 后两项则可看成“扩散”部分, 据此形式上所表示的意义不同, 在  $(n\Delta t, (n+1)\Delta t)$  时段内(2.5)式可分裂为(3.1)式和(3.2)式:

$$v_x \frac{\partial H_1}{\partial x} + v_y \frac{\partial H_1}{\partial y} = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial H_1}{\partial t} \quad (3.1)$$

$(x, y) \in \Omega, t \in \left( n\Delta t, \left( n + \frac{1}{2} \right) \Delta t \right)$ ,  $\Omega$  为求解区域.

初始条件为:  $H_1(x, y, n\Delta t) = H(x, y, n\Delta t)$

边界条件与未分裂前相同.

$$\kappa H_2 \frac{\partial^2 H_2}{\partial x^2} + \kappa H_2 \frac{\partial^2 H_2}{\partial y^2} = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial H_2}{\partial t} \quad (3.2)$$

$(x, y) \in \Omega, t \in \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) \Delta t, (n+1)\Delta t \right)$ ,  $\Omega$  为求解区域.

初始条件为:  $H_2(x, y, \left( n + \frac{1}{2} \right) \Delta t) = H_1(x, y, \left( n + \frac{1}{2} \right) \Delta t)$

边界条件为与未分裂前相同.

$\Delta t$  为时间间隔,  $n=0, 1, \dots, NT, NT \cdot \Delta t = T$

$T$  为指定的计算时刻.

式中,  $H_1$  为“对流”时的水位,  $H_2$  是“扩散”时的水位.

综上所述, 则  $H(x, y, (n+1)\Delta t) = H_2(x, y, (n+1)\Delta t)$ , 也就是说, 以  $n\Delta t$  时

刻的水位作为 $n\Delta t$ 时刻“对流”问题的水位的初始值,在前半个时间步长 $1/2\Delta t$ 内,求得它在第 $(n+1/2)\Delta t$ 时的值 $H_1$ ,作为在后半个时间步长 $1/2\Delta t$ 时段内“扩散”问题的初值,解出“扩散”问题在 $(n+1)\Delta t$ 时刻的水位值,  $H_2(x,y,(n+1)\Delta t)$ ,即为整个问题在 $(n+1)\Delta t$ 时刻的解。

若 $v_x, v_y$ 用上一时刻的水位求得,则(3.1)式是一二维双曲型方程,(3.2)式为一非线性抛物型方程。以下为简便起见,在导出(3.1)、(3.2)式得解法时,我们省去 $H_1(x,y,t)$ 、 $H_2(x,y,t)$ 的下标“1”、“2”。

#### 四、分裂后的方程的有限差分解法

下面我们先来推求(3.1)式的差分解法,为了保持 $v_x, v_y$ 的光滑性,提高其精度,我们在差分网格上用三次样条插值法来计算 $v_x = \kappa \frac{\partial H}{\partial x}$ ,  $v_y = \kappa \frac{\partial H}{\partial y}$ 中上一时段的 $\frac{\partial H}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial H}{\partial y}$ ,倘若整个计算区域被分成矩形网格, $x$ 方向有 $N$ 个结点, $y$ 方向有 $M$ 个结点。

在 $x$ 方向上的区间 $(x_i, x_{i+1})$ 内,设三次样条插值多项式 $s_1(x_i, y_j)$ , ( $j$ 固定)满足插值条件:  $s_1(x_i, y_j) = H_{i,j}$  ( $i=1,2,\dots,N$ )  $j$ 固定, ( $j=1,2,\dots,M$ ),  $s_1(x_i, y_j)$ 在结点 $(x_i, y_j)$ 处函数及一阶偏导数、二阶偏导数连续。设 $s_1(x_i, y_j)$  ( $j$ 固定)的一阶偏导数为 $m_{i,j}$  ( $i=1,2,\dots,N-1$ ),经过推演,我们可以得到方程组:

$$\lambda_i m_{i+1,j} + 2m_{i,j} + \mu_i m_{i-1,j} = g_{i,j} \quad (i=1,2,\dots,N-1; j \text{ 固定}) \quad (4.1)$$

其中,

$$\lambda_i = \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i}, \quad \mu_i = 1 - \lambda_i \quad (i=1,2,\dots,N)$$

$$g_{i,j} = 3 \left( \lambda_i \frac{H_{i,j} - H_{i-1,j}}{h_{i-1}} + \mu_i \frac{H_{i+1,j} - H_{i,j}}{h_i} \right) \quad (i=1,2,\dots,N-1; j \text{ 固定})$$

$$h_{i-1} = x_i - x_{i-1}, \quad h_i = x_{i+1} - x_i$$

因计算区域是矩形划分,所以,  $h_i = h$  ( $i=1,2,\dots,N$ ),  $h$ 是 $x$ 方向的空间步长。进而

$$\lambda_i = \frac{1}{2}, \quad \mu_i = \frac{1}{2}$$

$$g_{i,j} = \frac{3}{2h} (H_{i+1,j} - H_{i-1,j}) \quad (i=1,2,\dots,N-1; j \text{ 固定})$$

(4.1)式也可进一步简化为:

$$m_{i-1,j} + 4m_{i,j} + m_{i+1,j} = 2g_{i,j} \quad (i=1,2,\dots,N-1; j \text{ 固定}) \quad (4.2)$$

(4.2)式是一三对角方程组,用追赶法可以求得 $m_{i,j}$  ( $i=1,2,\dots,N-1; j$ 固定)

也就是 $\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_{i,j} = m_{i,j}$  ( $i=1,2,\dots,N-1; j$ 固定)

在边界处:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_{0,j} = \frac{H_{1,j} - H_{0,j}}{h} = m_{0,j} \quad (j \text{ 固定})$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_{N,j} = \frac{H_{N,j} - H_{N-1,j}}{h} = m_{N,j} \quad (j \text{ 固定})$$

同理, 在 $y$ 方向上, 也可以求得:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)_{i,j} = m_{i,j} \quad (j=1,2,\dots,M-1, i \text{ 固定})$$

在边界处:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)_{i,0} = \frac{H_{i,1} - H_{i,0}}{h'} \quad (i \text{ 固定})$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)_{i,M} = \frac{H_{i,M} - H_{i,M-1}}{h'} \quad (i \text{ 固定})$$

式中  $h'$  为 $y$ 方向上的空间步长。

这样, 我们可以得到每个差分网格结点上的  $v_x, v_y$ , 方程 (3.1) 可看作是一常系数的二维双曲型方程。下面用交替方向隐式格式来解 (3.1) 式。

在 $x$ 方向上:

$$v_x^{(n)} \frac{H_{i+1,j}^{(n+1/4)} - H_{i,j}^{(n+1/4)}}{2\Delta x} + v_y^{(n)} \frac{H_{i,j+1}^{(n)} - H_{i,j-1}^{(n)}}{2\Delta y} = \frac{1}{2} \mu \frac{H_{i,j}^{(n+1/4)} - H_{i,j}^{(n)}}{\Delta t/4}$$

整理得:

$$\begin{aligned} & \frac{v_x^{(n)} \Delta t}{4h} H_{i-1,j}^{(n+1/4)} + \mu H_{i,j}^{(n+1/4)} - \frac{v_x^{(n)} \Delta t}{4h} H_{i+1,j}^{(n+1/4)} \\ & = \mu H_{i,j}^{(n)} + \frac{v_y^{(n)} \Delta t}{4h'} (H_{i,j+1}^{(n)} - H_{i,j-1}^{(n)}) \quad (i=1,2,\dots,N-1; j \text{ 固定}) \quad (4.3) \end{aligned}$$

在 $y$ 方向上:

$$\begin{aligned} & v_x^{(n+1/4)} \frac{H_{i+1,j}^{(n+1/4)} - H_{i-1,j}^{(n+1/4)}}{2\Delta x} + v_y^{(n)} \frac{H_{i,j+1}^{(n+1/2)} - H_{i,j-1}^{(n+1/2)}}{2\Delta y} \\ & = \frac{1}{2} \mu \frac{H_{i,j}^{(n+1/2)} - H_{i,j}^{(n+1/4)}}{\Delta t/4} \end{aligned}$$

整理得:

$$\begin{aligned} & \frac{v_y^{(n)} \Delta t}{4h'} H_{i,j-1}^{(n+1/2)} + \mu H_{i,j}^{(n+1/2)} - \frac{v_y^{(n)} \Delta t}{4h'} H_{i,j+1}^{(n+1/2)} \\ & = \mu H_{i,j}^{(n+1/4)} + \frac{v_x^{(n+1/4)} \Delta t}{4h} (H_{i+1,j}^{(n+1/4)} - H_{i-1,j}^{(n+1/4)}) \quad (j=1,2,\dots,M-1; i \text{ 固定}) \quad (4.4) \end{aligned}$$

(4.3)、(4.4) 式都是三对角方程组, 先把  $n\Delta t$  时刻的水位  $H_{i,j}^{(n)}$  ( $i=1,2,\dots,N; j=1,2,\dots,M$ )

看成已知, 在 $x$ 方向用追赶法求出  $(n+\frac{1}{4})\Delta t$  时阶各个  $H_{0,j}^{(n+1/4)}, H_{1,j}^{(n+1/4)}, \dots, H_{N,j}^{(n+1/4)}$  ( $j$  固

定,  $j=1,2,\dots,M$ ) 的值, 然后, 把各个  $H_{i,j}^{(n+1/4)}$  代入 (4.4) 式, 再用追赶法求得在  $(n+\frac{1}{2})\Delta t$

时阶的各个  $H_{i,1}^{(n+1/2)}, H_{i,2}^{(n+1/2)}, \dots, H_{i,M}^{(n+1/2)}$  ( $i$  固定,  $i=1,2,\dots,N$ )。从而, 就可求出

(3.1) 式在  $(n+\frac{1}{2})\Delta t$  时阶的水位  $H_{i,j}^{(n+1/2)}$  ( $i=1,2,\dots,N; j=1,2,\dots,M$ )。对于 (3.2) 式,

由于它是一二维的非线性偏微分方程，我们用交替方向的 Picard 迭代法来求解它。

Picard 迭代的基本思想是：对离散形成的非线性代数方程组，把常数项部分及非线性项部分移到方程的右端，对解做一初始估计来计算非线性项，然后解线性代数方程组，把解得的结果代回到方程的右端，重复解线性代数方程组，当满足某一迭代准则时，迭代停止。此时，所求得解即为所要求的结果。通常，把上一时阶所求得解作为初始估计。

(3.2) 式  $\kappa H \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \kappa H \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial H}{\partial t}$   $t \in \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) \Delta t, (n+1) \Delta t \right)$  在  $x$  方向上的离散为：

$$\frac{\mu}{2} \frac{H_{i,j}^{(n+3/4)} - H_{i,j}^{(n+1/2)}}{\Delta t/4} = \kappa H_{i,j}^{(n+3/4)} \frac{H_{i-1,j}^{(n+3/4)} - 2H_{i,j}^{(n+3/4)} + H_{i+1,j}^{(n+3/4)}}{\Delta x^2} \\ + \kappa H_{i,j}^{(n+1/2)} \frac{H_{i-1,j}^{(n+1/2)} - 2H_{i,j}^{(n+1/2)} + H_{i+1,j}^{(n+1/2)}}{\Delta y^2}$$

整理得：

$$H_{i,j}^{(n+3/4)} = \frac{\kappa \Delta t}{2\mu h^2} H_{i,j}^{(n+3/4)} (H_{i-1,j}^{(n+3/4)} - 2H_{i,j}^{(n+3/4)} + H_{i+1,j}^{(n+3/4)}) \\ + \frac{\kappa \Delta t}{2\mu h'^2} H_{i,j}^{(n+1/2)} (H_{i,j-1}^{(n+1/2)} - 2H_{i,j}^{(n+1/2)} + H_{i,j+1}^{(n+1/2)}) + H_{i,j}^{(n+1/2)} \quad (4.5)$$

在(4.5)式中，右端第一项是非线性项，对每一固定的  $j$ ，以  $H_{i-1,j}^{(n+1/2)}$ ， $H_{i,j}^{(n+1/2)}$  和  $H_{i+1,j}^{(n+1/2)}$  分别作为对  $H_{i-1,j}^{(n+3/4)}$ ， $H_{i,j}^{(n+3/4)}$  和  $H_{i+1,j}^{(n+3/4)}$  的估计值，对应代入(4.5)式中第一项，算出对整个第一项的估计值，右端第二项和第三项为已知值，这三项相加，即可求得对  $H_{i,j}^{(n+3/4)}$  的第一次迭代值，把算得的各个  $^{(1)}H_{i,j}^{(n+3/4)}$  ( $i=1,2,\dots,N$ ;  $j$  固定) 代回到右端第一项，与第二、三项相加，求得第二次迭代值  $^{(2)}H_{i,j}^{(n+3/4)}$  ( $i=1,2,\dots,N$ ;  $j$  固定)，一直重复下去，直到  $H_{i,j}^{(n+3/4)}$  的第  $m$  次迭代值与第  $m-1$  次迭代值之差，小于预先给定的常数  $\varepsilon$  ( $\varepsilon$  为一给定的充分小的正常数)，即

$$\left| {}^{(m)}H_{i,j}^{(n+3/4)} - {}^{(m-1)}H_{i,j}^{(n+3/4)} \right| < \varepsilon$$

成立，则  ${}^{(m)}H_{i,j}^{(n+3/4)}$  ( $i=1,2,\dots,N$ ;  $j$  固定) 即为所求的  $H_{i,j}^{(n+3/4)}$  ( $i=1,2,\dots,N$ , 对每个固定的  $j$ ,  $j=1,2,\dots,M$ )

在  $y$  方向上：

$$\frac{\mu}{2} \frac{H_{i,j}^{(n+1)} - H_{i,j}^{(n+3/4)}}{\Delta t/4} = \kappa H_{i,j}^{(n+1)} \frac{H_{i,j-1}^{(n+1)} - 2H_{i,j}^{(n+1)} + H_{i,j+1}^{(n+1)}}{\Delta y^2} \\ + \kappa H_{i,j}^{(n+3/4)} \frac{H_{i-1,j}^{(n+3/4)} - 2H_{i,j}^{(n+3/4)} + H_{i+1,j}^{(n+3/4)}}{\Delta x^2}$$

整理得：

$$\begin{aligned}
 H_{i,j}^{(n+1)} = & \frac{\kappa \Delta t}{2\mu h^2} H_{i,j}^{(n+1)} (H_{i,j-1}^{(n+1)} - 2H_{i,j}^{(n+1)} + H_{i,j+1}^{(n+1)}) \\
 & + \frac{\kappa \Delta t}{2\mu h^2} H_{i,j}^{(n+3/4)} (H_{i-1,j}^{(n+3/4)} - 2H_{i,j}^{(n+3/4)} + H_{i+1,j}^{(n+3/4)}) \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

(4.6)式右端第一项也是一非线性项,对每一固定的*i*(*i*=1,2,⋯,*N*),实施与求解*x*方向的值时一样的迭代,直到满足迭代准则,这时的 ${}^{(m)}H_{i,j}^{(n+1)}$ (*j*=1,2,⋯,*M*; *i*固定, *i*=1,2,⋯,*N*)即为所要求的整个问题在(*n*+1) $\Delta t$ 时的解 $H_{i,j}^{(n+1)}$ (*i*=1,2,⋯,*N*; *j*=1,2,⋯,*M*)

综合(4.3)~(4.6)式,我们就可以得到以*n* $\Delta t$ 为初始时刻,经 $\Delta t$ 时段后,在(*n*+1) $\Delta t$ 时刻的解 $H_{i,j}^{(n+1)}$ (*i*=1,2,⋯,*N*; *j*=1,2,⋯,*M*),依次下去,就能够计算出指定时刻*T*(*T*=*NT*· $\Delta t$ , *NT*为总时段数)时的潜水水位。

## 五、数值例子

江西某矿是一裂隙岩溶水充水矿床,为了了解矿坑疏干涌水量,从九一年底到九二年初,进行了群孔抽水试验,根据对研究区所建立的概念性模型,与其相对应的数学模型可写为:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa H \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \kappa H \frac{\partial H}{\partial y} \right) - \sum_{j=1}^m Q_j \delta(x-x_j, y-y_j) + W = \mu \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$H(x, y, 0) = H_0(x, y)$$

$$H(x, y, t) |_{r_1} = H_1(x, y, t) \quad ((x, y) \in \Gamma_1)$$

$$\left. \frac{\partial H(x, y, t)}{\partial n} \right|_{r_2} = 0 \quad ((x, y) \in \Gamma_2)$$

式中  $Q_j$ 为第*j*号井抽水量(米<sup>3</sup>/天)

*m*为抽水井总数

$\delta(x-x_j, y-y_j)$ 为二维狄拉克 $\delta$ 函数

*W*为其它源汇项(米<sup>3</sup>/日)

整个计算区的面积为60平方公里,共离散成465个矩形单元,653个结点。根据地质和水文地质条件,划分了13个非均质参数分区。计算工作分二步进行,首先利用群孔抽水试验的前期资料,对数学模型做了校正;然后,借助于群孔抽水试验的后期资料,用本文所提出的方法及线性化方法对该问题进行了正演数值计算。在310号节点(G206号观测孔)处,实测值、线性化的有限差分法及本文所提算法的计算结果见对比曲线,图1。

从图上可以看出,本文所提出的计算方法的计算结果,比线性化的有限差分法的计算结果,更接近于实测值。

## 六、结 论

尽管本文所提求解二维潜水运动方程的计算方法的推导过程稍显繁冗,但在计算过程中,通过分裂后,用交替方向法求解,保证了数值稳定性。特别地,只是解一些简单的三对

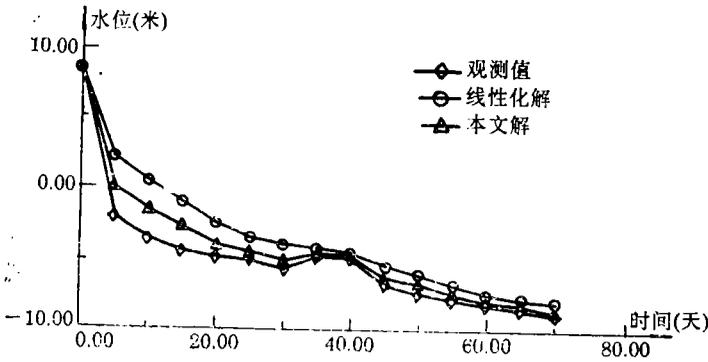


图 1

角方程组, 容易编制计算程序, 节省计算机内存, 提高了计算效率。并且, 从数值算例的结果看, 该法比以往的线性化方法, 在精度上也有所提高, 因此, 在求解与此类似的非线性方程时, 本文所提方法是有其参考价值的。

## 参 考 文 献

- [ 1 ] 王新民等, 《应用数值方法》, 吉林教育出版社 (1992).  
 [ 2 ] 孙炳正, 《地下水流的数学模型和数值方法》, 地质出版社 (1981).  
 [ 3 ] 吴江航等, 《计算流体动力学的理论、方法及应用》, 科学出版社 (1988)

## Splitting Method for Two-Dimensional Phreatic Flow Equation

Xu Shaohui Zhu Xueyu Zhu Guorong

(Dept. of Earth Science, Nanjing University,  
Nanjing 210093, P. R. China)

## Abstract

In this paper according to their difference in "physical meaning", two-dimensional phreatic flow equation, which has been transformed, is divided into two parts.....advection and dispersion by the splitting method. For the former, alternating direction finite difference method will be used and for the latter, it is resolved by alternating direction Picard iteration, therefore, the aim of computing the solution of whole problem will be reached. At last, the validity of the algorithms is proved by the numerical example. The comparison of the proposed method with the conventional finite difference (linearized) is made. The results show that the precision of calculation by the method proposed in this paper is better than the conventional methods.

**Key words** phreatic flow equation, nonlinear, splitting method, finite difference method, Picard iteration