

# 韧性金属大变形拟流动角点理论及应用\*

胡平<sup>1</sup> 柳玉启<sup>1</sup> 郭威<sup>1</sup> 台 风<sup>1</sup>

(陈大鹏推荐, 1995年7月24日收到)

## 摘 要

本文提出韧性金属弹塑性大变形拟流动角点理论 (quasi-flow corner theory)。该理论从塑性变形正交法则出发, 将“模量衰减函数”及屈服面的尖点效应引入本构模型, 从而实现了由正交法则本构模型向非正交法则本构模型以及从塑性加载向物理弹性卸载的光滑过渡, 使一般无角点各向异性硬化屈服函数与有角点硬化情形相结合成为可能。用于数值模拟各向异性金属薄板单向拉伸失稳与剪切带分析与实验结果作比较, 表明本文理论的有效性。

**关键词** 拟流动角点理论 模量衰减函数 剪切带 各向异性

## 一、引 言

近年来, 在金属塑性成形过程中的应变局部化现象已引起国内、外材料科学与力学工作者的极大兴趣。计算模拟结果已经表明: 局部化现象对材料本构模型十分敏感。就金属薄板拉伸颈缩与剪切断裂而言, 被认为推导过程缺乏充分道理<sup>[1]</sup>的 $J_2D$ 理论反而比基于经典正交法则的流动理论( $J_2F$ )更符合实验结果; 因而导致了非经典(非正交)大变形本构理论的研究。文献[2]提出各向同性 $J_2D$ 理论; 文献[3]基于屈服面尖点效应, 提出 $J_2$ 角点理论( $J_2C$ ); 文献[4]受文献[3]启示提出 $J_2G$ 理论。这些 $J_2$ 类非经典本构理论的共同特点是: 采用了遵循非正交法则的应力应变关系。由于注意力集中于材料变形失稳后的局部化过程, 忽视了塑性变形初期屈服面光滑的物理特征。

本文则从流动法则出发, 通过在弹性本构张量中引入“拟弹性模量”演化函数, 在塑性本构张量中引入各向异性屈服准则和后继屈服面的角点效应, 提出适于韧性金属材料大变形分析的拟流动角点理论。旨在实现由基于正交法则的流动理论向基于非正交法则的角点理论, 以及由塑性加载向弹性卸载的光滑连续过渡; 并将二维无角点各向异性屈服曲面与有角点硬化情形相结合, 以便更合理地模拟各向异性金属板材的大变形拉伸失稳与应变局部化全过程。

## 二、拟流动角点理论

对于具有微小弹性有限塑性变形特征的大多数韧性金属材料, 考虑到加载表面的外凸性, 假定总的对数应变率 $\dot{\epsilon}_i$ 可以分解为拟弹性应变率 $\dot{\epsilon}_i^e$ 和拟塑性应变率 $\dot{\epsilon}_i^p$ 之和, 即

\* 本文由国家青年自然科学基金资助。

<sup>1</sup> 吉林工业大学, 长春 130025。

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \tag{2.1}$$

由文献[5],  $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$ 服从如下关系

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e = \frac{1}{E_c} \left[ \frac{1}{2} (1 + \mu_c) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \mu_c \delta_{ij} \delta_{kl} \right] \dot{\sigma}_{kl} \tag{2.2}$$

式中, 拟弹性模量 $E_c$ 可一般地表示为扬氏模量 $E$ 的衰减函数

$$E_c = E \cdot \left[ \frac{1}{2} (1 + E_s/E) - \frac{1}{\pi} (1 - E_s/E) \tan^{-1} \left( \frac{\varepsilon - \varepsilon^*}{a_0} \right) \right] \tag{2.3}$$

满足体积形变定律的拟泊松系数 $\mu_c$ 表示为

$$\mu_c = \frac{1}{2} - \frac{E_c}{E} \left( \frac{1}{2} - \mu \right) \tag{2.4}$$

式中  $E_s$ 为单向拉伸Kirchhoff应力-对数应变( $\sigma$ - $\varepsilon$ )曲线的割线模量,  $\mu$ 为常规的泊松比,  $\varepsilon$ 为变形当前时刻的应变度量,  $\varepsilon^*$ 则为与材料性质及变形方式有关的常值,  $a_0$ 为一小常数。(2.3)式中的 $E_c$ 可以表现模量 $E$ 随塑性变形向 $E_s$ 的光滑演化。

由正交法则及“一致性条件”, (2.1)式中的 $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ 可由下式表示<sup>[5]</sup>:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \left( \frac{\dot{\sigma}}{Mf} \right)^2 \left[ \frac{1}{E_t} - \frac{1}{E_c} \right] \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} = \dot{\sigma}_{ij,kl}^p \dot{\sigma}_{kl} \tag{2.5}$$

式中  $f$ 为 $\sigma_{ij}$ 的 $M$ 阶齐次屈服函数,  $E_t$ 为 $\sigma$ - $\varepsilon$ 曲线的切线模量。利用恒等式

$$\frac{1 + \mu_c}{E_c} = \frac{1 + \mu}{E} + \frac{3}{2} \left( \frac{1}{E_c} - \frac{1}{E} \right) \tag{2.6}$$

且令

$$I_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \tag{2.7}$$

则(2.1)、(2.2)和(2.5)式可以合并写成

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij} &= \frac{1}{E} \left[ \frac{1}{2} (1 + \mu) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \mu \delta_{ij} \delta_{kl} \right] \dot{\sigma}_{kl} \\ &+ \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{1}{E_c} - \frac{1}{E} \right) I_{ijkl} + \left( \frac{\dot{\sigma}}{Mf} \right)^2 \left( \frac{1}{E_t} - \frac{1}{E_c} \right) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \right] \dot{\sigma}_{kl} \\ &= (B_{ij,kl}^e + B_{ij,kl}^p) \dot{\sigma}_{kl} \end{aligned} \tag{2.8}$$

易知,  $B_{ij,kl}^e$ 即为真实的弹性柔度张量, 因此真实塑性对数应变率 $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ 为

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = B_{ij,kl}^p \dot{\sigma}_{kl} \tag{2.9}$$

考虑材料失稳的微观滑移机制<sup>[6]</sup>, 假定变形某一时刻屈服面加载点处产生了尖点, 且随塑性变形的发展而愈加尖锐。设尖角处  $\dot{\sigma}_{ij}$ 与偏量 $\sigma'_{ij}$ 的夹角为 $\theta$ (如图1所示), 图中的 $\theta_0$ 和 $\theta_c$ 将尖点处的加卸载分成三个区域: 假定 $0^\circ \leq \theta \leq \theta_0$ 为完全塑性加载区;  $\theta > \theta_c$ 为弹性卸载区;

$\theta_0 \leq \theta \leq \theta_c$ 为部分加载区。在该区域, 塑性应变率的增长将逐渐缓慢直至趋于零而实现弹性卸载。为保证这一过程的连续性, 依据文献[3], 引入 $\dot{\sigma}_{ij}$ 与 $\sigma'_{ij}$ 之间的夹角函数 $\rho(\theta)$ :

$$\rho(\theta) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \theta \leq \theta_0 \text{ (完全加载)} \\ \cos^2 \left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{\theta - \theta_0}{\theta_c - \theta_0} \right) \right] & \theta_0 \leq \theta \leq \theta_c \text{ (部分加载)} \\ 0 & \theta_c \leq \theta \leq \pi \text{ (弹性卸载)} \end{cases} \tag{2.10}$$

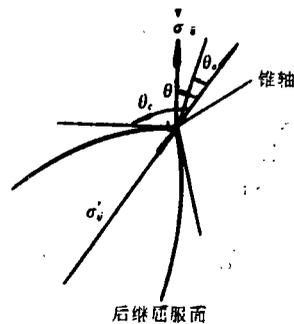


图1 屈服面的角点效应

将加载点处塑性势  $W_p$  写成如下二次齐次式

$$W_p = \frac{1}{2} \rho(\theta) B_{ijkl}^p \check{\sigma}_{ij} \check{\sigma}_{kl} \quad (2.11)$$

总的应力速率势为

$$W = \frac{1}{2} B_{ijkl}^e \check{\sigma}_{ij} \check{\sigma}_{kl} + \frac{1}{2} \rho(\theta) B_{ijkl}^p \check{\sigma}_{ij} \check{\sigma}_{kl} = W_e + W_p \quad (2.12)$$

而总的对数应变率张量可以写为:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial \check{\sigma}_{ij} \partial \check{\sigma}_{kl}} \check{\sigma}_{kl} = B_{ijkl}(\theta) \check{\sigma}_{kl} \quad (2.13)$$

令

$$\lambda_{ij} = \gamma \sigma'_{ij} \quad (2.14)$$

$$M_{ij} = B_{ijkl}^p \lambda_{kl} \quad (2.15)$$

将  $\lambda_{ij}$  按  $B_{ijkl}^p$  规一化 (即令  $\lambda_{ij} M_{ij} = 1$ ) 解出  $\gamma$ , 进而求出

$$\lambda_{ij} = (B_{ijkl}^p \sigma'_{ij} \sigma'_{kl})^{-\frac{1}{2}} \sigma'_{ij} \quad (2.16)$$

于是,  $\sigma'_{ij}$  与  $\check{\sigma}_{ij}$  之间的夹角的方向余弦可以表为<sup>3</sup>,

$$\cos\theta = \frac{B_{ijkl}^p \lambda_{ij} \check{\sigma}_{kl}}{(B_{mnpq}^p \check{\sigma}_{mn} \check{\sigma}_{rs})^{\frac{1}{2}}} = \frac{M_{ij} \check{\sigma}_{ij}}{(B_{mnpq}^p \check{\sigma}_{mn} \check{\sigma}_{rs})^{\frac{1}{2}}} \quad (2.17)$$

利用式(2.8)~(2.10)和(2.13)~(2.17), 确定当前加载点处的塑性对数应变率为

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = [\alpha(\theta) B_{ijkl}^p + \beta(\theta) M_{ij} M_{kl}] \check{\sigma}_{kl} = \check{B}_{ijkl}^p(\theta) \check{\sigma}_{kl} \quad (2.18)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \alpha(\theta) &= \rho(\theta) [1 - \kappa(\theta) \cot\theta] \\ \beta(\theta) &= \rho(\theta) \kappa(\theta) (\sin\theta \cdot \cos\theta)^{-1} \\ \kappa(\theta) &= -\frac{1}{2} \rho'(\theta) / \rho(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

易知, 当  $\sigma'_{ij} // \check{\sigma}_{ij}$  (与光滑屈服面相对应) 时,  $\theta = 0^\circ$ , 因而,  $\rho(\theta) = 1, \kappa(\theta) = 0, \alpha(\theta) = 1, \beta(\theta) = 0$ , (2.18)式便退化为完全加载的(2.9)式, 而当  $\rho(\theta) = 0$  (与弹性卸载相对应) 时, (2.18)式将自动地给出  $\dot{\epsilon}_{ij}^p = 0$ .

于是, 适用于任意屈服函数的拟流动角点理论的本构方程可统一地写为:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = [B_{ijkl}^e + \check{B}_{ijkl}^p(\theta)] \check{\sigma}_{kl} \quad (2.20)$$

对于各向同性强化Mises屈服函数, (2.9)式中的  $B_{ijkl}^p$  可以写成:

$$B_{ijkl}^p = \frac{3}{2} \left[ \left( \frac{1}{E_t} - \frac{1}{E} \right) I_{ijkl} + \frac{3}{2} \left( \frac{1}{E_t} - \frac{1}{E} \right) \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{kl}}{\bar{\sigma}^2} \right] \quad (2.21)$$

注意到

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{3}{2} I_{ijkl} \sigma'_{ij} \sigma'_{kl}, \quad \check{\sigma}'_{ij} \check{\sigma}'_{ij} = I_{ijkl} \check{\sigma}_{ij} \check{\sigma}_{kl} \quad (2.22)$$

可以解出:

$$\lambda_{ij} = \left( \frac{1}{E_t} - \frac{1}{E} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\sigma'_{ij}}{\bar{\sigma}}, \quad M_{ij} = \frac{3}{2} \left( \frac{1}{E_t} - \frac{1}{E} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sigma'_{ij}}{\bar{\sigma}} \quad (2.23)$$

若令  $\check{\sigma}$  为Cauchy等效应力  $\bar{\sigma}$  的Jaumann力率, 则

$$\dot{\check{\sigma}} = \dot{\bar{\sigma}} = \frac{3}{2} \frac{1}{\bar{\sigma}} \sigma'_{ij} \check{\sigma}_{ij} \quad (2.24)$$

于是, (2.17)式简化为:

$$\cos\theta = \frac{\left(\frac{1}{E_t} - \frac{1}{E}\right)^{\frac{1}{2}} \dot{\sigma}}{\left[\frac{3}{2}\left(\frac{1}{E_o} - \frac{1}{E}\right)\dot{\sigma}'_{ij}\dot{\sigma}'_{ij} + \left(\frac{1}{E_t} - \frac{1}{E_o}\right)\dot{\sigma}^2\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.25)$$

由(2.3)式知: 当 $\bar{\varepsilon} \ll \varepsilon^*$ 时,  $E_o \rightarrow E$ , 上式的 $\theta \rightarrow 0$ , 这意味着塑性变形初期,  $\dot{\sigma}'_{ij}$ 平行于 $\sigma'_{ij}$ . 随着塑性变形的发展,  $E_o$ 逐渐偏离 $E$ 而趋向于割线模量 $E_s$ , 上述拟流动角点理论将逐步转化为文献[3]的J2C理论.

值得强调指出的是: 按J2C理论的角度定义, 在材料塑性变形一开始就不能保证 $\sigma'_{ij} // \sigma_{ij}$ , 因而其屈服曲面的角点效应贯穿于塑性变形直至失稳与断裂的全过程. 就塑性变形的早期阶段而言, 显然J2C理论不遵循塑性流动的正交性法则, 这与由位错滑移导致塑性变形的细观物理理论和屈服面光滑的唯象本构理论相偏离. 而本文给出的拟流动角点理论, 由于“拟弹性模量” $E_o$ 演化的连续性, 因而实现了塑性变形由正交性法则的流动理论向非正交法则的角点理论的光滑过渡, 且保证了材料失稳后, 塑性加载向弹性卸载转移的连续性.

易知: 当 $E_o = E$ 时, 本文理论将退化为经典的流动理论, 即Prandtl-Reuss方程; 若令 $E_o = E_s$ 在Mises意义下便退化为文献[3]的J2C理论. 在非比例加载情况下, 这些理论得到的计算结果是明显不同的<sup>[6]</sup>.

### 三、数值试验

将拟流动角点理论((2.20)式)引入逐级更新Lagrange有限元方法<sup>[7]</sup>, 采用文献[8]的二维各向异性屈服函数以及文献[9]的“交叉三角元”(crossed triangles)技术, 数值模拟三种面内各向异性金属薄板的单向拉伸失稳与应变局部化过程, 并与实验结果进行比较, 检验本文理论的有效性.

#### 1. 实验

取国产D15型硒钢板(试件I)和标准冷轧08Al薄板(试件II)以及1Cr18Ni9Ti不锈钢板(试件III)制成标准拉伸试件并划定标距. 每种试件取5个一组进行单拉实验参数测定, 以保证测定结果的统计可靠性. 表1给出测得的材料参数统计平均值.(表中 $R_0$ 、 $R_{45}$ 、

表1 试件材料参数

	$R_0$	$R_{45}$	$R_{90}$	厚度 $h_0(\text{mm})$	弹性模量 $E(\text{MPa})$	应变硬化 指数 $n$	材料性质
试件I	0.311	0.517	0.424	0.42	194330	0.168	体心立方多晶体
试件II	1.961	1.204	2.176	1.00	201000	0.243	体心立方多晶体
试件III	0.9351	1.5439	1.067	0.84	202000	0.40	面心立方多晶体

$R_{90}$ 分别表示沿与轧制方向成 $0^\circ$ 、 $45^\circ$ 和 $90^\circ$ 拉伸测得的各向异性系数). 再取每组5个试件做拉断实验(沿 $90^\circ$ 轧制方向). 图2(a)~(c)分别给出三种材料试件拉断后的断裂形貌; 同时测得断裂时刻的最大延伸率和颈缩率分别为0.20, 0.42, 0.52和0.0642, 0.351, 0.263(在根部).

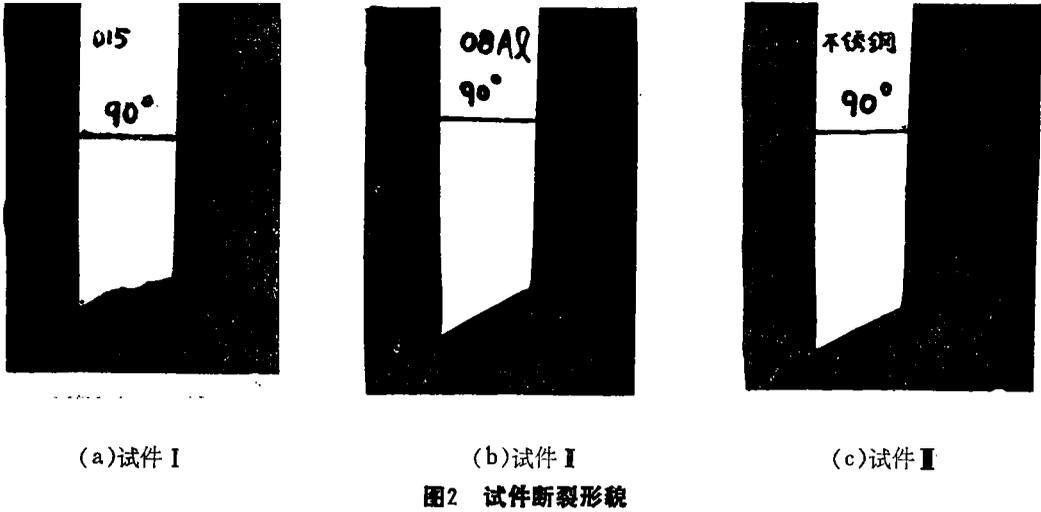


图2 试件断裂形貌

2. 计算

在预先标定的标距内，利用对称性取1/4试件进行计算。初始构形的网格剖分见图3。引入文献[8]可考虑面内各向异性的非二次屈服函数：

$$f = a|k_1 + k_2|^M + a|k_1 - k_2|^M + c|2k_2|^M - 2\sigma^M = 0 \tag{3.1}$$

式中

$$k_1 = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \eta\sigma_{22}), \quad k_2 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \eta\sigma_{22}}{2}\right)^2 + p^2\sigma_{12}^2}$$

$$\eta = \sqrt{R_0(1+R_{90}) / [(1+R_0)R_{90}]}$$

$$a = 2 - c = 2 - \sqrt{R_0R_{90} / [(1+R_0)(1+R_{90})]}$$
(3.2)

$M$ 为非二次屈服函数指数， $p$ 为等双拉与单向拉伸主应力之比。由(3.1)式求出 $f$ 对 $\sigma_{ij}$ 的偏导数，代入(2.8)、(2.9)、(2.17)和(2.20)式，进而引入有限元模型。取(2.3)式中的 $\epsilon^*$ 和 $\sigma_0$ 分别0.8 $n$ 和0.03 $n$ ( $n$ 为应变硬化指数)，(2.10)式中的 $\theta_0 = 22.5^\circ$ ， $\theta_c = 125^\circ$ 。依据文献[8]，对于面心立方多晶体取 $M = 9$ ，而对于体心立方多晶体取 $M = 6$ 。整个计算过程按端部等位移加载。以达到不同试件拉断时刻的延伸率为停机准则。图4绘出断裂临界态的变形形貌(左侧对称地绘出等应变分布曲线)，图5则为加、卸载全过程的载荷-延伸率-颈缩率曲线，图中 $A_0$ 为横断面积而 $\sigma_0$ 为初始屈服应力， $DL$ 为标距处绝对位移， $DD$ 为颈缩量。从图5可以看出：计算得到的颈缩率与实验结果十分吻合。而图4表明：卸载后整个结构沿裂口方向形成明显的剪切带，带内为明显的高应变区，也是最终的断裂位置。具有较小各向异性系数的材料其剪切带与水平方向夹角愈小，计算结果与实验有很好的—致性。

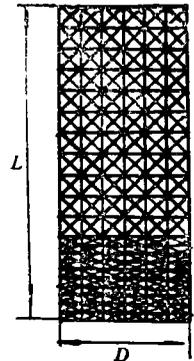


图3 有限元网格

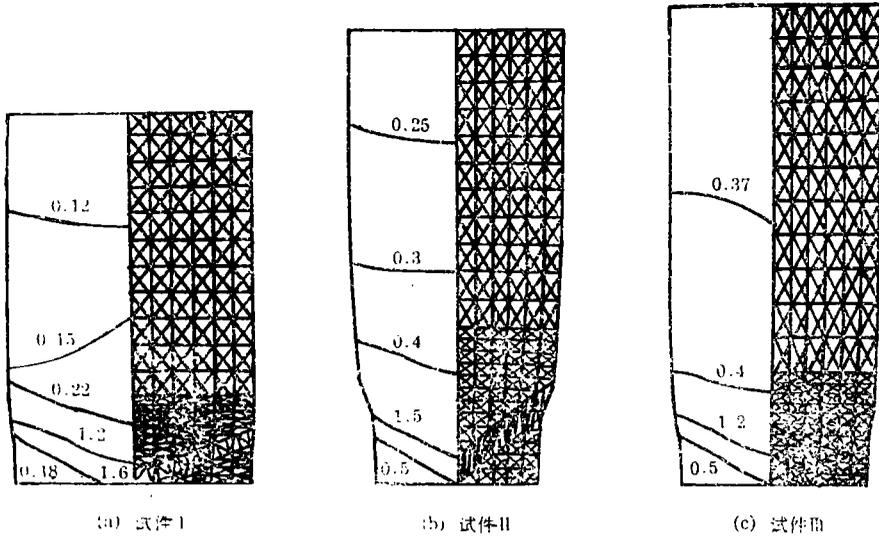


图4 不同试件沿90°轧制方向拉伸的断裂形貌

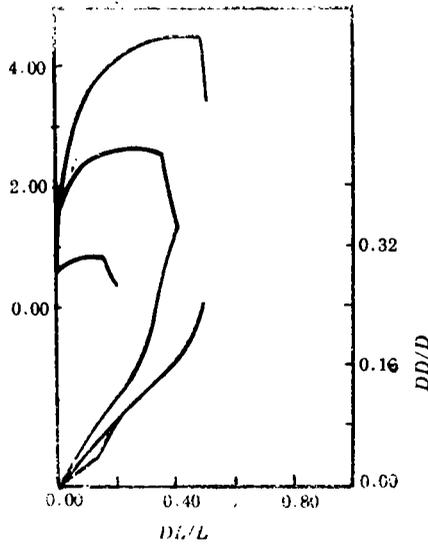


图5 加、卸载-延伸率-颈缩率曲线

### 四、结 论

1. 本文提出了适于韧性金属材料弹塑性大应变分析的拟流动角点理论。该理论可引入一般各向异性屈服函数，并实现了由基于正交法则的流动理论向基于非正交法则的角点理论的连续和光滑过渡，同时也保证了由塑性加载向弹性卸载过渡的连续性。三种不同材料金属薄板单向拉伸变形失稳与应变局部化过程的计算结果表明了本文理论的有效性。

## 参 考 文 献

- [1] 黄克智, 《非线性连续介质力学》, 第一版, 北京大学、清华大学出版社 (1989), 408—414.
- [2] S. Stören and J. R. Rice, Localized necking in thin sheet, *J. Mech. Phys. Solids*, 23 (1975), 421—441.
- [3] J. Christofferson and J. W. Hutchinson, A class of phenomenological corner theories of plasticity, *J. Mech. Phys. Solids*, 27 (1979), 465—487.
- [4] M. Gotoh, A class of plastic constitutive equations with vertex effect—I: General theory, *Int. J. Solids Struct.*, 21(11) (1985), 1101—1116.
- [5] 胡平、连建设、李运兴, 弹塑性有限变形的拟流动理论, *力学学报*, 26 (1994), 275—283.
- [6] 胡平, 塑性与超塑性金属材料应变局部化力学行为的数值研究, 吉林工业大学博士论文 (1993).
- [7] P. Hu, J. Lian and J. W. Chen, Finite element numerical analysis of sheet metal under uniaxial tension with a new yield criterion, *J. Mater. Proc. Tech.*, 31 (1992), 245—253.
- [8] F. Barlat and J. Lian, Plastic behavior and stretchability of sheet metals, Part I: A yield function for orthotropic sheets under plane stress conditions, *Int. J. Plasticity*, 5 (1989), 51—86.
- [9] J. C. Nagtegaal, D. M. Parks and J. R. Rice, On numerically accurate finite element solution in the fully plastic range, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 4 (1974), 153.

## Quasi-Flow Corner Theory on Large Plastic Deformation of Ductile Metals and Its Applications

Hu Ping Liu Yuqi Guo Wei Tai Feng

(Jilin University of Technology, Changchun 130025, P. R. China)

### Abstract

A quasi-flow corner theory on large plastic deformation of ductile metals is proposed in this paper. From orthogonal rule of plastic flow, the theory introduces a "modulus reduced function" and a corner effect of yield surface into the constitutive model of elastic-plastic large deformation. Thereby, the smooth and continuous transitions from orthogonal constitutive model to non-orthogonal one, and from plastic loading to elastic unloading are realized. In addition, the theory makes it possible to connect general anisotropic yield functions with corner hardening effect. The comparison between numerical simulation and experimental observation for the uniaxial tensile instability and shear band deformation of anisotropic sheet metals shows the validity of the present quasi-flow corner theory.

**Key words** quasi-flow corner theory, modulus reduced function, shear band, anisotropy