应用数学和力学，第17卷 第11期（1996年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

一类非线性积-微分方程极值解的存在性定理

宋 光 兴[1]

（林宗池推荐，1995年5月4日收到）

摘 要

本文讨论非线性积-微分方程初值问题

$$\left.\begin{array}{l} u'(t)=f(t,u(t),T_1u(t),T_2u(t)) \\ u(0)=x_0 \end{array}\right\}$$

的极值解的存在性。其中

$$T_1u(t)=h_1(t)+\int_0^t K_1(t,s)g_1(s,u(s))ds,$$

$$T_2u(t)=h_2(t)+\int_0^1 K_2(t,s)g_2(s,u(s))ds.$$

利用单调迭代法和上、下解方法，得到了最小解和最大解的存在性定理。

关键词 积-微分方程 单调迭代方法 极值解

一、引 言

关于积-微分方程解的存在性问题，许多学者有所研究，并得到了许多较为深刻的结果（见文[1]、[2]、[3]等）。但在以往的研究中，涉及含未知函数的积分时，一般均为线性的。在本文中，我们利用单调迭代方法及上、下解方法，对含未知函数的积分为非线性的积-微分方程进行研究，得到了此类方程的最小解与最大解存在性定理。

本文主要讨论非线性积-微分方程初值问题

$$\left.\begin{array}{l} u'(t)=f(t,u(t),T_1u(t),T_2u(t)) \\ u(0)=x_0 \end{array}\right\} \tag{1.1}$$

其中 $T_1u(t)=h_1(t)+\int_0^t K_1(t,s)g_1(s,u(s))ds$，$T_2u(t)=h_2(t)+\int_0^1 K_2(t,s)g_2(s,u(s))ds$，$K_i(t,s)(i=1,2)$在各自定义域上非负连续，$h_i(t)(i=1,2)$在$[0,1]$上连续，$f\in C[I\times R\times R\times R,R]$，$I=[0,1]$，$R=(-\infty,+\infty)$。

为了叙述方便起见，我们列出下面将要用到的一些基本假设：

(H$_1$) 存在$u_0,v_0\in C(I,R)$，$u_0\leqslant v_0$(即$u_0(t)\leqslant v_0(t)$，$t\in I$)，使

$$u_0'(t)\leqslant f(t,u_0(t),T_1u_0(t),T_2u_0(t)),u_0(0)\leqslant x_0;$$

---

1 石油大学数理系，山东东营 257062.

$$v_0'(t)\geqslant f(t,v_0(t),T_1v_0(t),T_2v_0(t)),v_0(0)\geqslant x_0.$$

(H_2) 存在$M_i>0(i=0,1)$，当$u\geqslant\bar{u}$，$v\geqslant\bar{v}$，$w\geqslant\bar{w}$时

$$f(t,u,v,w)-f(t,\bar{u},\bar{v},\bar{w})\geqslant -M_0(u-\bar{u})-M_1(v-\bar{v}).$$

(H_3) $g_i(t,u)(i=1,2)$关于u连续单调增，且存在$N_1>0$，使当$u\geqslant v$时

$$g_1(t,u)-g_1(t,v)\leqslant N_1(u-v)\qquad (\forall u,v\in C[I,R],u\geqslant v,t\in I)$$

记$[u_0,v_0]=\{u\in C(I,R)\mid u_0(t)\leqslant u(t)\leqslant v_0(t),t\in I\}$.

二、基本引理

引理 假设条件(H_1)、(H_2)、(H_3)成立，则对任意给定的$\eta\in[u_0,v_0]$，线性积-微分方程初值问题

$$\left.\begin{aligned}&u'(t)=f(t,\eta(t),T_1\eta(t),T_2\eta(t))-M_0(u(t)-\eta(t))-\int_0^t M_1N_1K_1(t,s)(u(s)-\eta(s))ds\\&u(0)=x_0\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

在$[u_0,v_0]$上存在唯一解.

证 显然，方程(2.1)与下列积分方程等价

$$\begin{aligned}u(t)=x_0&+\int_0^t f(s,\eta(s),T_1\eta(s),T_2\eta(s))ds\\&+\int_0^t\left[M_0+\int_a^t(M_1N_1K_1(s,a))ds\right]\eta(a)da\\&-\int_0^t\left[M_0+\int_a^t(M_1N_1K_1(s,a))ds\right]u(a)da\end{aligned}\tag{2.2}$$

而方程(2.2)是关于未知函数$u(t)$的第二类 Volterra 型线性积分方程，故由文[5]知，方程(2.2)存在唯一解$u(t)$（此解与$\eta(t)$有关）. 显然，此解也是方程(2.1)的唯一解.

下面证明，此解$u\in[u_0,v_0]$.

事实上，由$\eta\in[u_0,v_0]$，即$u_0\leqslant\eta\leqslant v_0$及积分算子$T_i(i=1,2)$的定义知，$T_iu_0\leqslant T_i\eta\leqslant T_iv$ $(i=1,2)$.

从而由条件(H_2)、(H_3)知

$$\begin{aligned}&f(s,\eta(s),T_1\eta(s),T_2\eta(s))-f(s,u_0(s),T_1u_0(s),T_2u_0(s))\\&\geqslant -M_0(\eta(s)-u_0(s))-M_1(T_1\eta(s)-T_1u_0(s))\\&=-M_0(\eta(s)-u_0(s))-M_1\int_0^s K_1(s,a)[g_1(a,\eta(a))-g_1(a,u_0(a))]ds\\&\geqslant -M_0(\eta(s)-u_0(s))-\int_0^s(M_1N_1K_1(s,a))(\eta(a)-u_0(a))ds\end{aligned}$$

又由条件(H_1)，知

$$u_0(t)\leqslant x_0+\int_0^t f(s,u_0(s),T_1u_0(s),T_2u_0(s))ds$$

因此，由方程(2.2)及上述结果，有

$$\begin{aligned}u(t)-u_0(t)=x_0&+\int_0^t f(s,\eta(s),T_1\eta(s),T_2\eta(s))ds\\&+\int_0^t\left[M_0+\int_a^t(M_1N_1K_1(sa))ds\right]\eta(a)da\end{aligned}$$

$$-\int_0^t\left[M_0+\int_a^t(M_1N_1K_1(s,a))ds\right]u(a)da-u_0(t)$$

$$\geqslant\int_0^t[f(s,\eta(s),T_1\eta(s),T_2\eta(s))-f(s,u_0(s),T_1u_0(s),T_2u_0(s))]ds$$

$$+\int_0^t\left[M_0+\int_a^t(M_1N_1K_1(s,a))ds\right]\eta(a)da$$

$$-\int_0^t\left[M_0+\int_a^t(M_1N_1K_1(s,a))ds\right]u(a)da$$

$$\geqslant-\int_0^t M_0(\eta(s)-u_0(s))ds-\int_0^t ds\int_0^s(M_1N_1K_1(s,a))(\eta(a)-u_0(a))da$$

$$+\int_0^t\left[M_0+\int_a^t(M_1N_1K_1(s,a))\,ds\right](\eta(a)-u(a))da$$

$$=-\int_0^t\left[M_0+\int_a^t(M_1N_1K_1(s,a))ds\right](\eta(a)-u_0(a))da$$

$$+\int_0^t\left[M_0+\int_a^t(M_1N_1K_1(s,a))ds\right](\eta(a)-u(a))da$$

$$=-\int_0^t\left[M_0+\int_a^t(M_1N_1K_1(s,a))ds\right](u(a)-u_0(a))da$$

即
$$(u(t)-u_0(t))+\int_0^t\left[M_0+\int_a^t(M_1N_1K_1(s,a))ds\right](u(a)-u_0(a))da\geqslant 0\quad(t\in I)$$

故由文[4]知，$u(t)-u_0(t)\geqslant 0\quad(t\in I)$

即 $u_0\leqslant u$

同理可证 $u\leqslant v_0$。

综上所述，方程(2.1)的解在$[u_0,v_0]$中。证毕。

注1 由引理的证明可知，对积分算子 $T_2u(t)=h_2(t)+\int_0^t K_2(t,s)g_2(s,u(s))ds$，只须要求为有界增，而不必要求其核$K_2(t,s)$在$I\times I$上非负连续，引理结论也成立。

根据引理结论，我们可以定义算子

$$A:[u_0,v_0]\longrightarrow[u_0,v_0]$$

$\forall\eta\in[u_0,v_0]$，$A\eta=u$，其中 u 是对应 η 方程(2.1)的唯一解。

显然，函数$u(t)$是积-微分方程(1.1)的解，当且仅当 u 是A的不动点，即$Au=u$。

三、主要定理及证明

定理 设条件(H_1)、(H_2)、(H_3)满足，则积-微分方程初值问题(1.1)在$[u_0,v_0]$上存在最小解$\bar{u}(t)$与最大解$\bar{v}(t)$。且迭代序列$u_n=Au_{n-1}(n=1,2,\cdots)$，$u_0\leqslant u_1\leqslant\cdots\leqslant u_n\leqslant\cdots$单增收敛于$\bar{u}$；$v_n=Av_{n-1}(n=1,2,\cdots)$，$v_0\geqslant v_1\geqslant\cdots\geqslant v_n\geqslant\cdots$单减收敛于$\bar{v}$，即$u_n\to\bar{u}$，$v_n\to\bar{v}$（当$n\to\infty$）。其中算子$A$由前面定义。

证 首先证明$A:[u_0,v_0]\to[u_0,v_0]$是单调增算子。

设$\eta_1,\eta_2\in[u_0,v_0]$，$\eta_1\leqslant\eta_2$，且$A\eta_1=u_1$，$A\eta_2=u_2$。由积分算子 $T_i(i=1,2)$ 的定义。显然有

$$T_i\eta_1\leqslant T_i\eta_2\quad(i=1,2)$$

由算子A的定义及方程(2.2)，有

$$u_1(t)=x_0+\int_0^t f(s,\eta_1(s),T_1\eta_1(s),T_2\eta_1(s))ds$$
$$+\int_0^t\left[M_0+\int_a^t(M_1N_1K_1(s,a))ds\right]\eta_1(a)da$$
$$-\int_0^t\left[M_0+\int_a^t(M_1N_1K_1(s,a))ds\right]u_1(a)da$$
$$u_2(t)=x_0+\int_0^t f(s,\eta_2(s),T_1\eta_2(s),T_2\eta_2(s))ds$$
$$+\int_0^t\left[M_0+\int_a^t(M_1N_1K_1(s,a))ds\right]\eta_2(a)da$$
$$-\int_0^t\left[M_0+\int_a^t(M_1N_1K_1(s,a))ds\right]u_2(a)da$$

将上两式相减，并注意到条件(H_2)、(H_3)，得

$$u_2(t)-u_1(t)=\int_0^t[f(s,\eta_2(s),T_1\eta_2(s),T_2\eta_2(s))-f(s,\eta_1(s),T_1\eta_1(s),T_2\eta_1(s))]ds$$
$$+\int_0^t\left[M_0+\int_a^t(M_1N_1K_1(s,a))ds\right](\eta_2(a)-\eta_1(a))da$$
$$-\int_0^t\left[M_0+\int_a^t(M_1N_1K_1(s,a))ds\right](u_2(a)-u_1(a))da$$
$$\geqslant-\int_0^t\left[M_0+\int_a^t(M_1N_1K_1(s,a))ds\right](u_2(a)-u_1(a))da\quad(t\in[0,1]).$$

类似引理的证明，由文[4]知，$u_2(t)-u_1(t)\geqslant0\quad(t\in[0,1])$。即$u_1\leqslant u_2$。

故A是单调增算子。

其次，证明序列$u_n=Au_{n-1}$，$v_n=Av_{n-1}(n=1,2,\cdots)$为单调收敛序列。

由算子A的定义及$u_1=Au_0$，$v_1=Av_0$，易知$u_1,v_1\in[u_0,v_0]$。因此，$u_0\leqslant u_1$，$v_1\leqslant v_0$。

由A的单调增性及$u_0\leqslant v_0$，易知

$$u_0\leqslant u_1\leqslant\cdots\leqslant\cdots u_n\leqslant\cdots\leqslant v_n\leqslant\cdots\leqslant v_1\leqslant v_0$$

所以，$\{u_n\}$是单调增序列，$\{v_n\}$是单调减序列，且均为一致有界的。

再由 $$u_n'(t)=f(t,u_{n-1}(t),T_1u_{n-1}(t),T_2u_{n-1}(t))-M_0(u_n(t)-u_{n-1}(t))$$
$$-\int_0^t(M_1N_1K_1(t,s))(u_n(s)-u_{n-1}(s))ds\qquad(n=1,2,\cdots).$$

易知，$\{u_n'(t)\}$在$[0,1]$上是一致有界的。从而$\{u_n(t)\}$在$[0,1]$上是等度连续的。

故由Ascoli-Arzela定理知，存在$\{u_n(t)\}$的子列$\{u_{n_k}\}$在$[0,1]$上一致收敛于某函数$\bar{u}(t)$。而由$\{u_n(t)\}$是单调序列知，$\{u_n(t)\}$在$[0,1]$上一致收敛于$\bar{u}(t)$。

同理可证，$v_n(t)(n=0,1,2,\cdots)$在$[0,1]$上一致收敛于某函数$\bar{v}(t)$。

显然，$u_n(t)\leqslant\bar{u}(t)\leqslant\bar{v}(t)\leqslant v_n(t),t\in[0,1](n=0,1,\cdots)$。

即 $$u_n\leqslant\bar{u}\leqslant\bar{v}\leqslant v_n\quad(n=0,1,\cdots).$$

再证明，$\bar{u},\bar{v}$均是方程(1.1)在$[u_0,v_0]$上的解。

由$u_n(t)=Au_{n-1}(t)\ (n=1,2,\cdots)$及$A$的定义与(2.2)式，知

$$u_n(t)=x_0+\int_0^t f(s,u_{n-1}(s),T_1u_{n-1}(s),T_2u_{n-1}(s))ds$$

$$+\int_0^t\left[M_0+\int_a^t(M_1N_1K_1(s,a))ds\right](u_{n-1}(a)-u_n(a))da$$

$$(n=1,2,\cdots).$$

在上式两端令$n\to\infty$，并注意到f，g_i的连续性及$u_n(t)$一致收敛于$\bar{u}(t)$，得

$$\bar{u}(t)=x_0+\int_0^t f(s,\bar{u}(s),T_1\bar{u}(s),T_2\bar{u}(s))ds.$$

从而$\bar{u}'(t)=f(t,\bar{u}(t),T_1\bar{u}(t),T_2\bar{u}(t),\bar{u}(0)=x_0$.
即$\bar{u}(t)$是积-微分方程(1.1)的解.

同理可证，$\bar{v}(t)$也是积-微分方程(1.1)的解.

最后证明，$\bar{u}(t),\bar{v}(t)$分别是积-微分方程(1.1)的最小解与最大解.

设$u\in[u_0,v_0]$是方程(1.1)的解，则$Au=u$。由$u_0\leqslant u\leqslant v_0$及$A$的单增性，知

$$u_n\leqslant u\leqslant v_n\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

在上不等式各边令$n\to\infty$，可得

$$\bar{u}\leqslant u\leqslant\bar{v}$$

即$\bar{u},\bar{v}$分别是积-微分方程(1.1)在$[u_0,v_0]$上的最小解与最大解. 证毕.

注2 本文结果可直接推广到Banach空间上的积-微分方程初值问题.

注3 本文的主要特点是，在所讨论的积-微分方程中，含未知函数的积分均为非线性的，这在以往的文献中，尚未见到.

致谢 对孙经先教授的悉心指导致以衷心的感谢!

参 考 文 献

[1] 孙经先、刘立山，Banach空间中混合型微分-积分方程的单调迭代法，系统科学与数学，13(2)(1993)，160—166.

[2] Sun Jingxian and Zhao Zengqin, Extremal solutions of initial value problem for integro-differential equations of mixed type in Banach spaces, *Ann. Diff. Eqs.*, 8(4) (1992), 469—475.

[3] S. K. Kaul and A. S. Vatsala, Monotone method for integro-differential equation with periodic boundary conditions, *Applicable Analysis*, 21 (1986), 297—305.

[4] V. Lakshmikantham and S. Leela, *Differential and Integral Inequalities*, Acad., Press (1969).

[5] R. Kress, *Linear Integral Equations*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1989).

Existence Theorems of Extremal Solutions for a Class of Nonlinear Integro-Differential Equations

Song Guangxing

(University of Petroleum, Dongying, Shandong 258062, P. R. China)

Abstract

In this paper, the following initial value problem for nonlinear integro-differential equation

$$\left.\begin{aligned} &u'(t)=f(t,u(t),T_1u(t),T_2u(t)) \\ &u(t)_0=x_0 \end{aligned}\right\}$$

is considred, where

$$T_1u(t)=h_1(t)+\int_0^t K_1(t,s)g_1(s,u(s))ds,$$

$$T_2u(t)=h_2(t)+\int_0^1 K_2(t,s)g_2(s,u(s))ds.$$

Using the method of upper and lower solutions and the monotone iterative technique, we obtain existence results of minimal and maximal solutions.

Key words integro-differential equation, monotone iterative technique, extremal solution