应用数学和力学，第17卷 第10期（1996年10月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

有限变形问题拟主轴法*

郑 泉 水[1]

（1996年3月16日收到）

摘 要

所谓拟主轴标架，是一个单位正交标架，且相对于该标架的剪应变分量很小。作为Hill的主轴法的一种实用推广，我们在拟主轴标架下建立了应变、转动、旋率、应变率、共轭应力和应力率在拟主轴标架下的近似表示形式。发展拟主轴法的目的，是试图既保留主轴法的主要优点，又可作为某种分析大变形问题的高效数值示析方法的基础。

关键词 小剪切标架 拟主轴法 实用大变形方法

一、引 言

非线性连续介质力学中针对不同的材料以及不同的材料特性，需要用到多种类型应力、应变、转动、应力率、变形率、旋率等的精确或近似表示。特别地，由于非线性非弹性本构方程的实验往往很复杂、很困难，对它们的实际实验确定，一般都需要事先作出许多简化后才能切实进行。从而，一个具体的本构关系一般都是与参与该本构关系的应力、应变、转动、应力率、变形率、旋率等的具体类型密切相关的近似关系。在上述背景下由Hill[1,2]在Biot[3]的应变主轴标架思想基础上系统发展起来的"主轴法"独辟捷径，在求各种类型应变、转动、应变率、转动率、共旋率、共轭应力等等方面的表示是非常简明有力的。主轴法充分利用了在应变主轴标架下各种应变以及有限转动张量（即变形梯度极分解中的转动张量）具有十分简单的形式这个显著特点，获得了（用其它方法往往难于达到的）大量重要基础性结果。十多年前，郭仲衡教授[4]就在《力学进展》上及时系统地向国内读者介绍了主轴法。

主轴法的结果是在应变主轴下表示的，人们曾一度认为难以把这些结果转化为不赖于主轴坐标的抽象或内蕴表示。郭仲衡等[5]在主轴法的基础上，利用各向同性张量函数表示定理，发展起来可以一般性地实现上述转化的"主轴内蕴法"（参见本期梁浩云的论文及其参考文献[6]）.不过，由此转化得来的有关内蕴表示的形式往往比较复杂，失去了主轴法中的表示形式十分简单明了这个显著特点。

是否可以在主轴法的基础上直接发展出某种分析大变形问题的高效数值分析方法呢？这看来是很困难的，因为主轴法需要事先知道应变主轴，而绝大多数实际大变形问题的应变主轴则正是有待于具体求解的内容之一。由于大变形问题的求解一般只能用数值分析方法（如

---

* 国家教委优秀青年教师基金和国家杰出青年科学基金资助课题

1 清华大学工程力学系，北京 100084

有限单元法）进行，这就更加不能保证变形体内各点都能准确地给出应变主轴，从而关于主轴法在近似分析中如何应用的问题存在许多理论上的困难。这大概也是至今未见这方面成功的实际工作的主要原因。

然而在有限元法中，一旦知道一个单元节点处的应变主轴，则该单元内部的应变主轴就可以近似表示出来；而知道了在t时刻的主轴，则$t+\Delta t$时刻的主轴就大体上或近似知道了。由此自然提出的问题是：我们能不能够参照主轴法发展出一种仅需事先近似知道应变主轴的方法，它既保留有主轴法的主要优点，又可作为某种分析大变形问题的高效方法的基础？本文讨论的"拟主轴法"就是针对上述目的的。

在第二节详细描述拟主轴主要特性之前，我们先来回顾一下主轴法的几个基本关系。物体发生变形后的变形梯度记为$\mathbf{F}$，右和左Cauchy-Green变形张量分别记作$\mathbf{C}$和$\mathbf{B}$，即

$$\mathbf{C}=\mathbf{F}^T\mathbf{F},\qquad \mathbf{B}=\mathbf{F}\mathbf{F}^T \tag{1.1}$$

它们都是正定对称张量。在本文，上标T和-1分别代表转置和逆。按照[1)]

$$\mathbf{F}=\mathbf{Q}\mathbf{U}=\mathbf{V}\mathbf{Q},\qquad \mathbf{U}=\sqrt{\mathbf{C}},\quad \mathbf{V}=\sqrt{\mathbf{B}} \tag{1.2}$$

给出$\mathbf{F}$的极分解，其中转动张量$\mathbf{Q}$称作有限转动张量，正定对称张量$\mathbf{U}$和$\mathbf{V}$分别叫做右和左伸长张量。由于$\mathbf{C}$和$\mathbf{B}$以及$\mathbf{U}$和$\mathbf{V}$都是正定对称张量，且只相差一个转动：

$$\mathbf{C}=\mathbf{Q}^T\mathbf{B}\mathbf{Q},\qquad \mathbf{U}=\mathbf{Q}^T\mathbf{V}\mathbf{Q} \tag{1.3a}$$

或

$$\mathbf{B}=\mathbf{Q}\mathbf{C}\mathbf{Q}^T,\qquad \mathbf{V}=\mathbf{Q}\mathbf{U}\mathbf{Q}^T \tag{1.3b}$$

它们以及$\mathbf{U}$和$\mathbf{V}$的逆具有相关的谱表示如下：

$$\mathbf{C}=\sum_i \Lambda_i^2\mathbf{N}_i\otimes\mathbf{N}_i,\quad \mathbf{U}=\sum_i \Lambda_i\mathbf{N}_i\otimes\mathbf{N}_i,\quad \mathbf{U}^{-1}=\sum_i \Lambda_i^{-1}\mathbf{N}_i\otimes\mathbf{N}_i \tag{1.4a}$$

$$\mathbf{B}=\sum_i \Lambda_i^2\mathbf{n}_i\otimes\mathbf{n}_i,\quad \mathbf{V}=\sum_i \Lambda_i\mathbf{n}_i\otimes\mathbf{n}_i,\quad \mathbf{V}^{-1}=\sum_i \Lambda_i^{-1}\mathbf{n}_i\otimes\mathbf{n}_i \tag{1.4b}$$

其中单位正交标架$\{\mathbf{n}_i\}$和$\{\mathbf{N}_i\}$分别称作Euler和Lagrange标架，统称应变主轴标架，Λ_i为主伸长比，求和号对$i=1,2,3$求和，$\otimes$代表张量积。有限转动张量$\mathbf{Q}$和变形梯度$\mathbf{F}$与主轴标架有下述形式的简单关系：

$$\mathbf{n}_i=\mathbf{Q}\mathbf{N}_i,\quad \mathbf{Q}=\mathbf{n}_i\otimes\mathbf{N}_i,\quad \mathbf{F}=\sum_i \Lambda_i\mathbf{n}_i\otimes\mathbf{N}_i \tag{1.5}$$

一个量中凡是出现成对的相同指标，除非特别说明外，对该成对指标一律采用求和约定，如(1.5)中的$\mathbf{n}_i\otimes\mathbf{N}_i$就是$\sum_i \mathbf{n}_i\otimes\mathbf{N}_i$的简写。Hill的主轴法便是建立在(1.4)和(1.5)等的简单表示性质基础上的。

设$f(x)$是正半实轴$(0,\infty)$上满足

$$f(1)=0,\quad f'(1)=1 \tag{1.6a}$$

的任何严格单调增函数。本文后面还将用到如下的两个参数：

$$m_f=[1+f''(1)]/2,\quad k_f=f'''(1)/6 \tag{1.6b}$$

由f诱导的下述$\mathbf{U}$的各向同性对称张量值函数

$$\mathbf{S}_f=f(\mathbf{U})=\sum_i f(\Lambda_i)\mathbf{N}_i\otimes\mathbf{N}_i \tag{1.7}$$

称作为Hill类应变。例如，若进一步取

$$f_n(x)=(x^{2n}-1)/2n,\quad f_0(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\ln x \tag{1.8}$$

1) 关于有限变形的理论可参考一般的连续介质力学方面的著作，如[7]。

则对应Seth类应变

$$\mathbf{S}_n=f(\mathbf{U})=(\mathbf{U}^{2n}-\mathbf{I})/2n \tag{1.9}$$

其中$\mathbf{I}$为单位二阶张量．Seth类应变包括了最常见的Biot应变$\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{S}_{1/2}=\mathbf{U}-\mathbf{I}$，Green应变$\mathbf{E}=\mathbf{S}_1=(\mathbf{C}-\mathbf{I})/2$，以及对数应变$\mathbf{H}=\mathbf{S}_0=\ln\mathbf{U}$等．

由(1.4)显而易见，应变在应变主轴标架下的分量只有对角线元素即正应变可能不为零，而偏分量即剪应变则全部为零．所谓拟主轴标架，指的是一个标准正交标架，应变在该标架下的剪应变分量都很小．故拟主轴标架也称作为小剪切标架，这将在第二节详作讨论．第三到第五节，将分别建立应变、转动、旋率、应变率、共轭应力和它们的时间率在拟主轴标架下的近似表示形式．最后，我们讨论了拟主轴法应用于增量法和有限元法的基本构思．

二、拟 主 轴 标 架

在物体的初始构形上任意取定单位正交标架$\{\mathbf{E}_i\}$,$\mathbf{E}_i$方向的变形伸长比以及$\mathbf{E}_i$和$\mathbf{E}_j(i\neq j)$两方向的变形剪切分别记成λ_i和γ_{ij}即

$$\lambda_i=|\mathbf{F}\mathbf{e}_i|=\sqrt{\mathbf{E}_i\cdot\mathbf{C}\mathbf{E}_i}\qquad(\text{对}i\text{不求和}) \tag{2.1a}$$

$$\lambda_i\lambda_j\sin\gamma_{ij}=\mathbf{E}_i\cdot\mathbf{C}\mathbf{E}_j\qquad(i\neq j,\ \text{不求和}) \tag{2.1b}$$

记C_{ij}为右Cauchy-Green变形张量$\mathbf{C}$在$\{\mathbf{E}_i\}$下的分量，$[\mathbf{C}]_E$代表该分量的矩阵，则由(2.1)有

$$[\mathbf{C}]_E=\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&C_{13}\\ &C_{22}&C_{23}\\ & &C_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1^2&\lambda_1\lambda_2\sin\gamma_{12}&\lambda_1\lambda_3\sin\gamma_{13}\\ &\lambda_2^2&\lambda_2\lambda_3\sin\gamma_{23}\\ & &\lambda_3^2\end{bmatrix} \tag{2.2}$$

矩阵中省略了对称分量．参照主轴标架$\{\mathbf{N}_i\}$，则有

$$[\mathbf{C}]_N=\mathrm{diag}(\Lambda_1^2,\Lambda_2^2,\Lambda_3^2) \tag{2.3}$$

即矩阵$[\mathbf{C}]_N$中只有对角线元素不为零．

通过(1.1)和(2.2)，可将C_{ij}和(λ_i,γ_{ij})简单地由变形梯度张量$\mathbf{F}$表示出来；但欲求有限转动张量$\mathbf{Q}$和右伸长张量$\mathbf{U}$的$\mathbf{F}$表示，则需用到一组相当复杂的算法公式[8,9]，从这些复杂的不变性算法公式出发很不容易导出在各种近似意义下的实用近似公式．

引进基本参数

$$\gamma_E=\sqrt{\gamma_{23}^2+\gamma_{31}^2+\gamma_{12}^2} \tag{2.4}$$

称作为总剪切应变．显然，γ_E不是一个坐标不变量，它与标架$\{\mathbf{E}_i\}$的选取密切相关．γ_E等于零的充分和必要条件是$\{\mathbf{E}_i\}$恰为主轴标架$\{\mathbf{N}_i\}$，即只有$\gamma_N=0$．如果γ_E很小，即$\gamma_E\ll1$，就称$\{\mathbf{E}_i\}$为一个小剪切标架．

一个矢量$\mathbf{u}$的范数定义为$\mathbf{u}$的长度$|\mathbf{u}|$；而一个二阶张量$\mathbf{A}$的范数$\|\mathbf{A}\|$由$\|\mathbf{A}\|^2=\mathbf{A}:\mathbf{A}=\mathrm{tr}\mathbf{A}\mathbf{A}^T=A_{ij}A_{ij}$所定义，这里tr代表迹数，:代表双点积．设$\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$和$\boldsymbol{\psi}_\varepsilon$是两个以$\varepsilon$为小参数的标量、矢量或二阶张量，如果存在与$\varepsilon$无关的正数$K$和$n$，使得当$\varepsilon\to0^+$时成立$\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon-\boldsymbol{\psi}_\varepsilon\|\leqslant K\varepsilon^n$，则说$\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$和$\boldsymbol{\psi}_\varepsilon$相差$\varepsilon^n$量级，并记成$\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon=\boldsymbol{\psi}_\varepsilon+O(\varepsilon^n)$．

注意到

$$\gamma_{ij}=O(\gamma_E),\quad \sin\gamma_{ij}=\gamma_{ij}+O(|\gamma_{ij}|^3)=O(\gamma_E)\qquad(i\neq j) \tag{2.5}$$

故从(2.2)得

$$\gamma_{ij}=(\lambda_i\lambda_j)^{-1}C_{ij}+O(\gamma_E^3)\qquad(i\neq j,\ \text{不求和}) \tag{2.6}$$

在小剪切标架$\{\mathbf{E}_i\}$下和$\mathbf{U}=\mathbf{I}+\boldsymbol{\varepsilon}$和$\mathbf{U}^{-1}$的分量矩阵分别表示为

$$[\mathbf{U}]_E=\begin{bmatrix}1+\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13}\\ & 1+\varepsilon_{22} & \varepsilon_{23}\\ & & 1+\varepsilon_{33}\end{bmatrix},\quad [\mathbf{U}^{-1}]_E=\begin{bmatrix}1/\lambda_1' & \zeta_{12} & \zeta_{13}\\ & 1/\lambda_2' & \zeta_{23}\\ & & 1/\lambda_3'\end{bmatrix} \tag{2.7a,b}$$

后面我们会证明下述关于偏量的量级估计：

$$\varepsilon_{ij}=O(\gamma_E),\ \zeta_{ij}=O(\gamma_E)\qquad (i\neq j) \tag{2.8}$$

于是，把(2.2)、(2.6)和(2.7)代入关系$\mathbf{U}^2=\mathbf{C}$和$\mathbf{U}\mathbf{U}^{-1}=\mathbf{I}$，就可求得

$$\varepsilon_{ii}=\lambda_i-1+O(\gamma_E^2),\ \lambda_i'=\lambda_i+O(\gamma_E^2)\qquad (i\text{不求和}) \tag{2.9a}$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{\lambda_i\lambda_j}{\lambda_i+\lambda_j}\gamma_{ij}+O(\gamma_E^2),\ \zeta_{ij}=\frac{-1}{\lambda_i+\lambda_j}\gamma_{ij}+O(\gamma_E^2)\qquad (i\neq j,\ \text{不求和}) \tag{2.9b}$$

下面讨论拟主轴标架与邻近主轴标架之间的关系．现设单位正交标架$\{\mathbf{E}_i\}$很靠近Lagrange标架$\{\mathbf{N}_i\}$，即存在一个小转动张量$\mathbf{R}$，$\|\mathbf{R}-\mathbf{I}\|\ll 1$，使得$\mathbf{E}_i=\mathbf{R}\mathbf{N}_i$．记$\mathbf{R}$的转角为$\beta$($0\leqslant\beta\leqslant\pi$)，则

$$\|\mathbf{R}-\mathbf{I}\|=2\sqrt{1-\cos\beta}=2\sqrt{2}\sin(\beta/2)=\sqrt{2}\beta+O(\beta^3) \tag{2.10}$$

故$\|\mathbf{R}-\mathbf{I}\|\ll 1$等价于$\beta\ll 1$．

记单位矢量$\mathbf{r}$为$\mathbf{R}$的转轴，r_i为$\mathbf{r}$在$\{\mathbf{N}_i\}$下的分量，则$\mathbf{R}$的典则表示以及$\mathbf{R}$的分量矩阵可写出为

$$\mathbf{R}=\cos\beta\mathbf{I}+\sin\beta\mathbf{r}\times\mathbf{I}+(1-\cos\beta)\mathbf{r}\otimes\mathbf{r} \tag{2.11}$$

$$[\mathbf{R}]_N=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ & 1 & 0\\ & & 1\end{bmatrix}+\sin\beta\begin{bmatrix}0 & -r_3 & r_2\\ r_3 & 0 & -r_1\\ -r_2 & r_1 & 0\end{bmatrix}+(1-\cos\beta)\begin{bmatrix}r_1^2-1 & r_1r_2 & r_1r_3\\ & r_2^2-1 & r_2r_3\\ & & r_3^2-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1-\xi^2(1-r_1^2) & \xi(-\eta r_3+\xi r_1r_2) & \xi(\eta r_{23}+\xi r_1r_3)\\ \xi(\eta r_3+\xi r_1r_2) & 1-\xi^2(1-r_2^2) & \xi(-\eta r_1+\xi r_{21}r_3)\\ \xi(-\eta r_2+\xi r_1r_3) & \xi(\eta r_1+\xi r_2r_3) & 1-\xi^2(1-r_3^2)\end{bmatrix} \tag{2.12}$$

其中

$$\xi=\sqrt{2}\sin(\beta/2)=\beta/\sqrt{2}+O(\beta^3),\ \eta=\sqrt{2}\cos(\beta/2)=\sqrt{2}+O(\beta^2) \tag{2.13}$$

注意到

$$C_{ij}=\mathbf{E}_i\cdot\mathbf{C}\mathbf{E}_j=\mathbf{N}_i\cdot\mathbf{R}^T\mathbf{C}\mathbf{R}\mathbf{N}_j\qquad\text{或}\qquad [\mathbf{C}]_E=([\mathbf{R}]_N)^T[\mathbf{C}]_N[\mathbf{R}]_N \tag{2.14}$$

把(2.3)和(2.12)代入这一矩阵关系，并利用正交性$R_{ki}R_{kj}=\delta_{ij}$，便可得到

$$\begin{aligned}C_{11}&=\Lambda_i^2R_{i1}^2=\Lambda_1^2+(\Lambda_2^2-\Lambda_1^2)R_{21}^2+(\Lambda_3^2-\Lambda_1^2)R_{31}^2\\ &=\Lambda_1^2+\xi^2[(\Lambda_2^2-\Lambda_1^2)(\eta r_3+\xi r_1r_2)^2+(\Lambda_3^2-\Lambda_1^2)(\eta r_2-\xi r_1r_3)^2]\end{aligned} \tag{2.15a}$$

$$\begin{aligned}C_{23}&=\sum_i\Lambda_i^2R_{i2}R_{i3}=(\Lambda_2^2-\Lambda_1^2)R_{22}R_{23}+(\Lambda_3^2-\Lambda_1^2)R_{32}R_{33}\\ &=\xi\eta r_1(\Lambda_3^2-\Lambda_2^2)+\xi^2r_2r_3(\Lambda_2^2+\Lambda_3^2-2\Lambda_1^2)-\xi^3[(1-r_2^2)(-\eta r_1\\ &\quad+\xi r_2r_3)(\Lambda_2^2-\Lambda_1^2)+(1-r_3^2)(\eta r_1+\xi r_2r_3)(\Lambda_3^2-\Lambda_1^2)]\end{aligned} \tag{2.15b}$$

等等．

记$\mathbf{U}'$和$\boldsymbol{\varepsilon}'$分别为$\mathbf{U}$和$\boldsymbol{\varepsilon}$的偏张量，引进另外一个与坐标无关的基本参数

$$\varepsilon_0=\|\mathbf{U}'\|=\|\boldsymbol{\varepsilon}'\|=\sqrt{[(\Lambda_1-\Lambda_2)^2+(\Lambda_2-\Lambda_3)^2+(\Lambda_3-\Lambda_1)^2]/3} \tag{2.16}$$

不难得出，在约束 $x+y+z=0$ 和 $x^2+y^2+z^2=\sqrt{3}\varepsilon_0$ 下的坐标 x 的最大许可值为 $\sqrt{2}\varepsilon_0$。与(2.16)相比较，就得

$$|A_i-A_j|\leqslant\sqrt{2}\varepsilon_0 \qquad (i\neq j) \tag{2.17}$$

由(2.17)、(2.13)和(2.15)，我们有

$$C_{11}=\lambda_1^2=A_1^2+O(\varepsilon_0\beta^2),\ C_{23}=\lambda_2\lambda_3\sin\gamma_{23}=(A_3^2-A_2^2)r_1\beta+O(\varepsilon_0\beta^2) \tag{2.18a}$$

或
$$\lambda_1=A_1+O(\varepsilon_0\beta^2),\quad \gamma_{23}=\frac{A_3^2-A_2^2}{A_3A_2}r_1\beta+O(\varepsilon_0\beta^2) \tag{2.18b}$$

类似(2.18)还可给出关于 $\lambda_2,\lambda_3,\gamma_{31}$ 和 γ_{12} 的表达式。把(2.18b)中的 γ_{ij} 近似代入(2.4)，得

$$\gamma_E=\sqrt{\left(\frac{A_2^2-A_3^2}{A_2A_3}r_1\right)^2+\left(\frac{A_3^2-A_1^2}{A_3A_1}r_2\right)^2+\left(\frac{A_1^2-A_2^2}{A_1A_2}r_3\right)^2}\ \beta+O(\varepsilon_0\beta^2) \tag{2.19}$$

注意到 $\mathbf{N}_3$-平面内最大剪切应变为

$$\Gamma_3=\arctan[|A_1^2-A_2^2|/(2A_1A_2)] \tag{2.20}$$

再由于 $r_ir_i=1$ 及(2.17)，得就

$$\gamma_E=O(\varepsilon_0\beta)=O(\Gamma_{\max}\beta) \tag{2.21}$$

其中，$\Gamma_{\max}=\max\{\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3\}$ 为最大剪切应变。

由(2.10)，标架 $\{\mathbf{E}_i\}$ 靠近 $\{\mathbf{N}_i\}$ 味意着 $\beta\ll1$；而变形的畸变部分很小意味着 $\Gamma_{\max}\ll1$。到此，从(2.21)我们就得到下述两个基本性质：

（i）每个靠近应变主轴标架的单位正交标架都可作为小剪切标架；反之则不然。

(ii) 当变形的畸变部分很小（而不管体积应变部分多大）时，任何一个单位正交标架都可作为小剪切标架。

我们称小剪切标架为拟主轴标架。本章以下的全部讨论都将置于拟主轴标架下进行。

最后，我们来证明前面用到过的(2.8)。仿照(2.14)～(2.18)就有

$$U_{23}=\varepsilon_{23}=(A_3-A_2)r_1\beta+O(\varepsilon_0\beta^2)=\frac{A_2A_3}{A_2+A_3}\gamma_{23}+O(\varepsilon_0\beta^2) \tag{2.22a}$$

$$U_{23}^1=\zeta_{23}=(A_3^{-1}-A_2^{-1})r_1\beta+O(\varepsilon_0\beta^2)=\frac{-1}{A_2+A_3}\gamma_{23}+O(\varepsilon_0\beta^2) \tag{2.22b}$$

上述(2.22a)和(2.22b)关系中的最后面的等式利用了(2.18b)的第二式。到此就证明了(2.8)。

三、应变的各种度量和有限转动张量

这一节给出Hill类应变 $\mathbf{S}_f=f(\mathbf{U})$ 在一个拟主轴标架 $\{\mathbf{E}_i\}$ 下的分量用其诱导函数 f 的表示，还给出关于有限转动张量 $\mathbf{Q}$ 在 $\{\mathbf{E}_i\}$ 下的分量表示。

首先来看 $\mathbf{U}$ 的三个主不变量，Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ。本文以下将采用约等号≃，代表略去了误差项 $O(\gamma_E^2)$。从(2.7)和(2.9)求得

$$\mathrm{I}\simeq\mathrm{I}_E,\quad \mathrm{II}\simeq\mathrm{II}_E,\quad \mathrm{III}\simeq\mathrm{III}_E \tag{3.1}$$

其中

$$\mathrm{I}_E=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\quad \mathrm{II}_E=\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1,\quad \mathrm{III}_E=\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \tag{3.2}$$

由于 $f(\mathbf{U})$ 是 $\mathbf{U}$ 的各向同性对称张量值函数，根据由张量函数表示定理（参见[10]）可得

$$\mathbf{S}_f=f(\mathbf{U})=\sum_i f(\Lambda_i)\mathbf{N}_i\otimes\mathbf{N}_i=a_0\mathbf{I}+a_1\mathbf{U}+a_2\mathbf{U}^2 \tag{3.3}$$

其中a_0,a_1,a_2均为Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ的函数，它们与$f(\Lambda_i)$的关系为

$$f(\Lambda_i)=a_0+a_1\Lambda_i+a_2\Lambda_i^2 \qquad (i=1,2,3) \tag{3.4}$$

把$\mathbf{U}$和$\mathbf{C}=\mathbf{U}^2$在$\{\mathbf{E}_i\}$下的分量结果(2.2)和(2.7)代入(3.3)，并注意到(2.9)就得

$$S_{11}^{(f)}\cong a_0+a_1\lambda_1+a_2\lambda_1^2\cong a_{0E}+a_{1E}\lambda_1+a_{2E}\lambda_1^2 \tag{3.5a}$$

$$S_{12}^{(f)}\cong a_1\varepsilon_{12}+a_2\lambda_1\lambda_2\gamma_{12}\cong[a_1+a_2(\lambda_1+\lambda_2)]\varepsilon_{12}\cong[a_{1E}+a_{2E}(\lambda_1+\lambda_2)]\varepsilon_{12} \tag{3.5b}$$

在(3.5a)和(3.5b)的最后约等式中，都利用了(3.1)以及关于a_0,a_1,a_2对它们的自变量Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ的可微假设．注意到I_E，II_E，III_E相应于主值为$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$的主不变量，于是，对照(3.4)就得

$$f(\lambda_i)=a_{0E}+a_{1E}\lambda_i+a_{2E}\lambda_i^2 \tag{3.6a}$$

$$f(\lambda_i)-f(\lambda_j)=[a_{1E}+a_{2E}(\lambda_i+\lambda_j)](\lambda_i-\lambda_j) \qquad (i\neq j,\text{不求和}) \tag{3.6b}$$

把(3.6)代入(3.5)，引进

$$\varphi_{ij}^{(f)}=\begin{cases}\dfrac{f(\lambda_i)-f(\lambda_j)}{\lambda_i-\lambda_j} & (\lambda_j\neq\lambda_i)\\[2ex] \lim\limits_{\lambda_j\to\lambda_i}\dfrac{f(\lambda_i)-f(\lambda_j)}{\lambda_i-\lambda_j}=f'(\lambda_i) & (\lambda_j=\lambda_i)\end{cases} \tag{3.7}$$

就最终得到

$$[\mathbf{S}_f]_E\cong\begin{bmatrix} f(\lambda_1) & \varphi_{12}^{(f)}\varepsilon_{12} & \varphi_{13}^{(f)}\varepsilon_{13}\\ & f(\lambda_2) & \varphi_{23}^{(f)}\varepsilon_{23}\\ & & f(\lambda_3)\end{bmatrix} \tag{3.8}$$

特别地，令$f(x)$分别为$x-1$，$(x^2-1)/2$和$\ln x$，按照(3.8)就给出最常见三种工程应变Biot应变$\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{U}-\mathbf{I}$，Green应变$\mathbf{E}=(\mathbf{U}^2-\mathbf{I})/2$和对数应变$\mathbf{H}=\ln\mathbf{U}$在拟主轴$\{\mathbf{E}_i\}$下的分量表示如下：

Biot应变：$\varepsilon_{ii}\cong\lambda_i-1$ （i不求和），$\varepsilon_{ij}\cong\dfrac{\lambda_i\lambda_j}{\lambda_i+\lambda_j}\gamma_{ij}$ $\quad(i\neq j,\text{不求和})$ (3.9a)

Green应变：$E_{ii}\cong(\lambda_i^2-1)/2$ （i不求和），$\varepsilon_{ij}\cong\lambda_i\lambda_j\gamma_{ij}/2$ $\quad(i\neq j,\text{不求和})$ (3.9b)

对数应变：$H_{ii}\cong\ln\lambda_i$ （i不求和），$\varepsilon_{ij}\cong\dfrac{\lambda_i\lambda_j(\ln\lambda_i-\ln\lambda_j)}{\lambda_i^2-\lambda_j^2}\gamma_{ij}$ $\quad(i\neq j,\text{不求和})$ (3.9c)

引进参数

$$\varepsilon=\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \tag{3.10}$$

当$\varepsilon\ll1$时相应的问题称作为小应变问题．例如，板壳大变形是典型的小应变—大转动问题．对于小应变问题，显然有

$$\gamma_E=O(\varepsilon),\quad \lambda-1=O(\varepsilon) \tag{3.11}$$

对$f(\lambda_i)$在$\lambda_i=1$处作Taylor展开，注意到(1.6)，就得

$$f(\lambda_i)=(\lambda_i-1)+(m_f-1/2)(\lambda_i-1)^2+k_f(\lambda_i-1)^3+\cdots \tag{3.12}$$

把(3.12)代入到(3.7)和(3.8)，给出$\mathbf{S}_f$的近似表示如下：

$$S_{ii}^{(f)}=\varepsilon_{ii}+(m_f-1/2)\varepsilon_{ii}^2+O(\varepsilon^3) \qquad (i\text{不求和}) \tag{3.13a}$$

$$S_{ij}^{(f)}=[1+(m_f-1/2)\Sigma_{ij}+k_f(\Sigma_{ij}^2-\Delta_{ij})]\varepsilon_{ij}+O(\varepsilon^3) \qquad (i\neq j,\text{不求和}) \tag{3.13b}$$

其中

$$\Sigma_{ij}=\varepsilon_{ii}+\varepsilon_{jj},\quad \Delta_{ij}=\varepsilon_{ii}\varepsilon_{jj} \qquad (i\neq j,\text{不求和}) \tag{3.14}$$

最后，把$\mathbf{U}^{-1}$的近似式(2.7b)，代入有限转动张量的算式$\mathbf{Q}=\mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}$，并利用(2.9b)的第二式，就得到$\mathbf{Q}$在拟主轴标架$\{\mathbf{E}_i\}$下略去$O(\gamma_E^2)$后的近似算式如下

$$[\mathbf{Q}]_E\cong\begin{bmatrix}\dfrac{F_{11}}{\lambda_1} & \dfrac{F_{12}}{\lambda_2} & \dfrac{F_{13}}{\lambda_3}\\[2ex] \dfrac{F_{21}}{\lambda_1} & \dfrac{F_{22}}{\lambda_2} & \dfrac{F_{23}}{\lambda_3}\\[2ex] \dfrac{F_{31}}{\lambda_1} & \dfrac{F_{32}}{\lambda_2} & \dfrac{F_{33}}{\lambda_3}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\dfrac{F_{12}\gamma_{12}}{\lambda_1+\lambda_2}+\dfrac{F_{13}\gamma_{13}}{\lambda_1+\lambda_3} & \dfrac{F_{11}\gamma_{12}}{\lambda_1+\lambda_2}+\dfrac{F_{13}\gamma_{23}}{\lambda_2+\lambda_3} & \dfrac{F_{11}\gamma_{13}}{\lambda_1+\lambda_3}+\dfrac{F_{12}\gamma_{23}}{\lambda_2+\lambda_3}\\[2ex] \dfrac{F_{22}\gamma_{12}}{\lambda_1+\lambda_2}+\dfrac{F_{23}\gamma_{13}}{\lambda_1+\lambda_3} & \dfrac{F_{21}\gamma_{12}}{\lambda_1+\lambda_2}+\dfrac{F_{23}\gamma_{23}}{\lambda_2+\lambda_3} & \dfrac{F_{21}\gamma_{13}}{\lambda_1+\lambda_3}+\dfrac{F_{22}\gamma_{23}}{\lambda_2+\lambda_3}\\[2ex] \dfrac{F_{32}\gamma_{12}}{\lambda_1+\lambda_2}+\dfrac{F_{33}\gamma_{13}}{\lambda_1+\lambda_3} & \dfrac{F_{31}\lambda_{12}}{\lambda_1+\lambda_2}+\dfrac{F_{33}\gamma_{23}}{\lambda_2+\lambda_3} & \dfrac{F_{31}\gamma_{13}}{\lambda_1+\lambda_3}+\dfrac{F_{32}\gamma_{23}}{\lambda_2+\lambda_3}\end{bmatrix} \tag{3.15}$$

上述表示的右边第一个矩阵，正是主轴法中的相应表示.

四、旋率和应变率

记$\mathbf{G}$为速度梯度，于是变形梯度$\mathbf{F}$的物质时间导数为$\dot{\mathbf{F}}=\mathbf{G}\mathbf{F}$. 分别记$\mathbf{D}=(\mathbf{G}+\mathbf{G}^T)/2$和$\mathbf{\Omega}=(\mathbf{G}-\mathbf{G}^T)/2$为变形率张量和物质旋率张量，即$\mathbf{G}$的对称部分和反称部分，$\mathbf{\Omega}$的轴矢量即速度旋率记作$\boldsymbol{\omega}$.

任意选取一个常单位正交标架$\{\mathbf{i}_i\}$，且不妨规定它与拟主轴标架$\{\mathbf{E}_i\}$定向一致. 定义所谓拟Lagrange转动的转动张量$\mathbf{R}^L$及拟Euler转动$\mathbf{R}^E$如下：

$$\mathbf{R}^L=\mathbf{E}_i\otimes\mathbf{i}_i,\quad \mathbf{R}^E=\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{i}_i=\mathbf{Q}\mathbf{R}^L \tag{4.1}$$

其中

$$\mathbf{e}_i=\mathbf{Q}\mathbf{E}_i \tag{4.2}$$

构成所谓拟Euler标架. 式(4.1)给出了标架$\{\mathbf{E}_i\}$与$\mathbf{R}^L$以及标架$\{\mathbf{e}_i\}$与$\mathbf{R}^E$的一一对应关系. 引进反对称张量

$$\mathbf{\Omega}^P=\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T=\Omega_{ij}^P\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j=\boldsymbol{\omega}^P\times\mathbf{I} \tag{4.3a}$$

$$\mathbf{\Omega}^L=\dot{\mathbf{R}}^L(\mathbf{R}^L)^T=\Omega_{ij}^L\mathbf{E}_i\otimes\mathbf{E}_j=\boldsymbol{\omega}^L\times\mathbf{I} \tag{4.3b}$$

$$\mathbf{\Omega}^E=\dot{\mathbf{R}}^E(\mathbf{R}^E)^T=\Omega_{ij}^E\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j=\boldsymbol{\omega}^E\times\mathbf{I} \tag{4.3c}$$

分别称作相对旋率、拟Lagrange旋率和拟Euler旋率. 注意$\mathbf{\Omega}^P$和$\mathbf{\Omega}^E$是Euler型的，而$\mathbf{\Omega}^L$是Lagrange型的反对称张量. 从$\mathbf{R}^L=\mathbf{Q}\mathbf{R}^E$又得

$$\mathbf{\Omega}^E=\mathbf{\Omega}^P+\mathbf{Q}\mathbf{\Omega}^L\mathbf{Q}^T,\quad\text{即}\quad \Omega_{ij}^E=\Omega_{ij}^P+\Omega_{ij}^L \tag{4.4}$$

对$\mathbf{E}_i$和$\mathbf{e}_i$求物质导数，利用(4.2)和(4.3)就有

$$\dot{\mathbf{E}}_i=\mathbf{\Omega}^L\mathbf{E}_i=\Omega_{ji}^L\mathbf{E}_j,\quad \mathbf{\Omega}^L=\dot{\mathbf{E}}_i\otimes\mathbf{E}_i \tag{4.5a}$$

$$\dot{\mathbf{e}}_i=\mathbf{\Omega}^E\mathbf{e}_i=\Omega_{ji}^E\mathbf{e}_j,\quad \mathbf{\Omega}^E=\dot{\mathbf{e}}_i\otimes\mathbf{e}_i \tag{4.5b}$$

由$\mathbf{C}=\mathbf{F}^T\mathbf{F}=C_{ij}\mathbf{E}_i\otimes\mathbf{E}_j$作物质导数，可得$\dot{\mathbf{C}}=2\mathbf{F}^T\mathbf{D}\mathbf{F}=\dot{C}_{ij}\mathbf{E}_i\otimes\mathbf{E}_j+\mathbf{\Omega}^L\mathbf{C}-\mathbf{C}\mathbf{\Omega}^L$，故

$$\dot{C}_{ij}=2(\mathbf{F}\mathbf{E}_i)\cdot\mathbf{D}(\mathbf{F}\mathbf{E}_j)+(\mathbf{E}_i\times\mathbf{C}\mathbf{E}_j+\mathbf{E}_j\times\mathbf{C}\mathbf{E}_i)\cdot\boldsymbol{\omega}^L \tag{4.6}$$

把(2.2)代入(4.6)，得

$$\lambda_1\dot{\lambda}_1=(\mathbf{FE}_1)\cdot\mathbf{D}(\mathbf{FE}_1)+\lambda_1(\lambda_2\sin\gamma_{12}\mathbf{E}_3-\lambda_3\sin\gamma_{13}\mathbf{E}_2)\cdot\boldsymbol{\omega}^L$$
$$\leqslant|\mathbf{FE}_1|^2\|\mathbf{D}\|+\lambda_1\sqrt{(\lambda_2\sin\gamma_{12})^2+(\lambda_3\sin\gamma_{13})^2}\,|\boldsymbol{\omega}^L|$$

$$\overline{\lambda_1\lambda_2\sin\gamma_{12}}^{\bullet}=2(\mathbf{FE}_1)\cdot\mathbf{D}(\mathbf{FE}_2)+[(\lambda_2^2+\lambda_1^2)\mathbf{E}_3+\lambda_1\lambda_3\sin\gamma_{13}\mathbf{E}_1-\lambda_2\lambda_3\sin\gamma_{23}\mathbf{E}_2]\cdot\boldsymbol{\omega}^L$$
$$\leqslant2|\mathbf{FE}_1||\mathbf{FE}_2|\|\mathbf{D}\|+\sqrt{(\lambda_2^2-\lambda_1^2)^2+\lambda_3^2[(\lambda_1\sin\gamma_{13})^2+(\lambda_2\sin\gamma_{23})^2]}\,|\boldsymbol{\omega}^L|$$

注意到$|\mathbf{Fe}_i|=\lambda_i$以及(2.4)、(2.17)和(2.18)，由上列不等式就可进一步得到

$$\dot{\lambda}_1\leqslant\lambda_1\|\mathbf{D}\|+\sqrt{\lambda_2^2+\lambda_3^2}\,|\boldsymbol{\omega}^L|\gamma_E \tag{4.7a}$$

$$\overline{\lambda_1\lambda_2\sin\gamma_{12}}^{\bullet}\leqslant2\lambda_1\lambda_2\|\mathbf{D}\|+\sqrt{[(\lambda_2-\lambda_1)^2+\lambda_3^2\gamma^2](\lambda_1^2+\lambda_2^2)}\,|\boldsymbol{\omega}^L| \tag{4.7b}$$

可见

$$\dot{\lambda}_i=O(\|\mathbf{D}\|+|\boldsymbol{\omega}^L|\gamma_E),\quad \dot{\gamma}_{12}=O(\|\mathbf{D}\|+|\boldsymbol{\omega}^L|\sqrt{\gamma_E^2+\varepsilon_0^2}) \tag{4.8}$$

其中ε_0由(2.16)定义，为$\mathbf{U}$或$\boldsymbol{\varepsilon}$的偏张量的大小．引进基本参数

$$D_E=\|\mathbf{D}\|+|\boldsymbol{\omega}^L|\sqrt{\gamma_E^2+\varepsilon_0^2} \tag{4.9}$$

那么$\dot{\gamma}_i$及$\dot{\gamma}_{ij}$和$\dot{\gamma}_E$均为$O(D_E)$量．

下面试求$\boldsymbol{\Omega}^P$, $\boldsymbol{\Omega}^L$, $\boldsymbol{\Omega}^E$用$\mathbf{D}$和$\boldsymbol{\Omega}$ 表达的公式．对$\mathbf{U}$作物质导数并利用(4.5)和(4.8)就可求得

$$\lambda_{ii}=\dot{\lambda}_i+O(D_E\gamma_E)\qquad(i\text{不求和}) \tag{4.10a}$$

$$\lambda_{ij}=\dot{\varepsilon}_{ij}+(\lambda_j-\lambda_i)\Omega_{ij}^L+O(D_E\gamma_E)\qquad(i\neq j,\text{不求和}) \tag{4.10b}$$

等等．对$\mathbf{F}=\mathbf{QU}$求物质导数后右乘$\mathbf{F}^{-1}$，并利用$\dot{\mathbf{F}}=\mathbf{GF}$，求得$\mathbf{G}=\boldsymbol{\Omega}^P+\mathbf{Q}\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{Q}^T$，以及

$$\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1}+\mathbf{U}^{-1}\dot{\mathbf{U}}=2\mathbf{Q}^T\mathbf{D}\mathbf{Q}=2D_{ij}\mathbf{E}_i\otimes\mathbf{E}_j \tag{4.11a}$$

$$\dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1}-\mathbf{U}^{-1}\dot{\mathbf{U}}=2\mathbf{Q}^T(\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{\Omega}^P)\mathbf{Q}=2(\Omega_{ij}-\Omega_{ij}^P)\mathbf{E}_i\otimes\mathbf{E}_j \tag{4.11b}$$

其中 D_{ij}, Ω_{ij}和 Ω_{ij}^P分别是$\mathbf{D}$, $\boldsymbol{\Omega}$和$\boldsymbol{\Omega}^P$相对于拟 Euler 标架$\{\mathbf{e}_i\}$下的．记$\dot{\mathbf{U}}=\lambda_{ij}\mathbf{E}_i\otimes\mathbf{E}_j$，代入(4.11)又可得

$$\lambda_{ij}=\frac{2\lambda_i\lambda_j}{\lambda_i+\lambda_j}D_{ij}+O(D_E\gamma_E)\qquad(i,j\text{不求和}) \tag{4.12a}$$

$$\Omega_{ij}=\Omega_{ij}^P+\frac{\lambda_i-\lambda_j}{\lambda_i+\lambda_j}D_{ij}+O(D_E\gamma_E)\qquad(i\neq j,\text{不求和}) \tag{4.12b}$$

拟主轴法的一个很大特点就是拟主轴标架$\{\mathbf{E}_i\}$不必与变形运动时刻相关．在一段小的时间间隔内可取$\{\mathbf{E}_i\}$保持不变，即取$\Omega^L=0$．为了看出$\Omega^L=0$对拟主轴标架的影响，注意到$t+\Delta t$时变形梯度为$(\mathbf{I}+\Delta t\mathbf{G})\mathbf{F}+O(|\Delta t|^2)$，故$t+\Delta t$时的Cauchy-Green变形张量为

$$\mathbf{C}(t+\Delta t)=\mathbf{C}+2\Delta t\mathbf{F}^T\mathbf{D}\mathbf{F}+O(|\Delta t|^2) \tag{4.13}$$

由此可求得$t+\Delta t$时的总剪切$\gamma_E(t+\Delta t)$为

$$\gamma_E(t+\Delta t)=\gamma_E+O(D_E\Delta t) \tag{4.14}$$

可见，为了保证$\{\mathbf{E}_i\}$成为$t+\Delta t$时的拟主轴标架，只要时间增量Δt小到

$$|\Delta t|=O(\gamma_E/D_E) \tag{4.15}$$

接下来我们讨论应变率的近似．为了简单起见，将采用约等号≈代表略去了$O(D_E\gamma_E)$量级的误差．对Hill类应变 $\mathbf{S}_f=S_{ij}^{(f)}\mathbf{E}_i\otimes\mathbf{E}_j$作物质时间导数，利用(4.5)就得

$$\dot{\mathbf{S}}_f=(\dot{S}_{ij}^{(f)}+\Omega_{ik}^L S_{kj}^{(f)}+\Omega_{jk}^L S_{ki}^{(f)})\mathbf{E}_i\otimes\mathbf{E}_j \tag{4.16}$$

注意到(3.8)以及$\dot{\gamma}_E=O(D_E)$，故从(4.16)有

$$\mathbf{E}_i\cdot\dot{\mathbf{S}}_f\mathbf{E}_i\approx f(\lambda_i)\qquad(i\text{不求和}) \tag{4.17a}$$

$$\mathbf{E}_i\cdot\dot{\mathbf{S}}_f\mathbf{E}_j\approx \dot{S}_{ij}^{(f)}+[f(\lambda_j)-f(\lambda_i)]\Omega_{ij}^L\approx \varphi_{ij}^{(f)}[\dot{\varepsilon}_{ij}+(\lambda_j-\lambda_i)\,\Omega_{ij}^L] \qquad (i\neq j,\text{不求和}) \tag{4.17b}$$

再利用(4.11)就得

$$\dot{\mathbf{S}}_f\approx\sum_{i,j}\psi_{ij}^{(f)}D_{ij}\mathbf{E}_i\otimes\mathbf{E}_j \tag{4.18}$$

其中

$$\psi_{ij}^{(f)}=\frac{2\lambda_i\lambda_j}{\lambda_i+\lambda_j}\ \varphi_{ij}^{(f)} \qquad (i\neq j,\text{不求和}) \tag{4.19}$$

略去了误差 $O(D_E\gamma_E)$ 后的公式(4.18)和(4.19) 与主轴法下的相应公式相同。特别地，关于Biot应变$\boldsymbol{\varepsilon}$，Green应变$\mathbf{E}$和对数应变$\mathbf{H}$的物质导数结果如下：

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\approx\sum_{i,j}\frac{2\lambda_i\lambda_j}{\lambda_i+\lambda_j}D_{ij}\mathbf{E}_i\otimes\mathbf{E}_j,\quad \dot{\mathbf{E}}\approx\sum_{i,j}\lambda_i\lambda_jD_{ij}\mathbf{E}_i\otimes\mathbf{E}_j \tag{4.20a,b}$$

$$\dot{\mathbf{H}}\approx\sum_{i,j}\left(\frac{2\lambda_i\lambda_j}{\lambda_i+\lambda_j}\right)\left(\frac{\ln\lambda_i-\ln\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_j}\right)D_{ij}\mathbf{E}_i\otimes\mathbf{E}_j \tag{4.20c}$$

五、共轭应力与共旋应力率

按照Hill的方案，与应变$\mathbf{S}_f$构成功率共轭的应力$\mathbf{T}_f$由下述关系来定义

$$J\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{D}=\mathbf{T}_f:\dot{\mathbf{S}}_f \tag{5.1}$$

其中$J=\det\mathbf{F}$为变形体积比，$\boldsymbol{\sigma}$为Cauchy应力张量。若记σ_{ij}为$\boldsymbol{\sigma}$在拟Euler标架$\{\mathbf{e}_i\}$下的分量，把(4.18)引入(5.1)后，即可写得$\mathbf{T}_f$的相对于拟Lagrange标架$\{\mathbf{E}_i\}$下的分量$T_{ij}^{(f)}$的显式表示：

$$T_{ij}^{(f)}\approx J\psi_{ij}^{(f)^{-1}}\sigma_{ij} \qquad (i,j\text{不求和}) \tag{5.2}$$

例如，与Biot应变$\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{S}_{1/2}$、Green应变$\mathbf{E}=\mathbf{S}_1$和对数应变$\mathbf{H}=\mathbf{S}_0$共轭的应力分别为

Jaumann应力
$$\mathbf{T}_{1/2}\approx\sum_{i,j}J\frac{\lambda_i+\lambda_j}{2\lambda_i\lambda_j}\sigma_{ij}\mathbf{E}_i\otimes\mathbf{E}_j=\frac{1}{2}J(\mathbf{Q}^T\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-1}+\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}) \tag{5.3a}$$

Kirchhoff应力
$$\mathbf{T}_1\approx\sum_{i,j}J(\lambda_i\lambda_j)^{-1}\sigma_{ij}\mathbf{E}_i\otimes\mathbf{E}_j=\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} \tag{5.3b}$$

$$\mathbf{T}_0\approx\sum_{i,j}[1+O(\varepsilon^2)]J\sigma_{ij}\mathbf{E}_i\otimes\mathbf{E}_j=J\mathbf{Q}^T\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}+O(\|\boldsymbol{\sigma}\|\varepsilon^2) \tag{5.3c}$$

此外，与$\mathbf{S}_{-1}$对应的应力$\mathbf{T}_{-1}$为

$$\mathbf{T}_{-1}\approx\sum_{i,j}J\lambda_i\lambda_j\sigma_{ij}\mathbf{E}_i\otimes\mathbf{E}_j=J\mathbf{F}^T\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F} \tag{5.3d}$$

注意到张量$\mathbf{T}_R=J\mathbf{Q}^T\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}$是一个与刚性转动无关的量，叫转动了的应力张量。由(5.3c)可见，$\mathbf{T}_0=\mathbf{T}_R+O(\|\boldsymbol{\sigma}\|\varepsilon^2)$。不存在一个Hill类应变严格地与$\mathbf{T}_R$共轭。

由(5.2)可见，Hill共轭应力$\mathbf{T}_f$线性地依赖于Cauchy应力张量$\boldsymbol{\sigma}$，由此引进相应的线性变换如下

$$\mathbf{T}_f=J\mathbf{K}_f:\boldsymbol{\sigma} \tag{5.4}$$

$$\mathbf{K}_f\approx\sum_{i,j}\psi_{ij}^{(f)^{-1}}\mathbf{E}_i\otimes\mathbf{E}_j\otimes\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j \tag{5.5a}$$

$\mathbf{K}_f$显然是可逆的，其逆为

$$\mathbf{K}_f^{-1} \approx \sum_{i,j} \psi_{ij}^{(f)} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_j \tag{5.5b}$$

对(5.4)求物质时间导数，注意到$\dot{J} = J\,\mathrm{tr}\mathbf{D}$并引进

$$\mathbf{M}_f = \dot{\overline{\ln \mathbf{K}_f}}, \quad 或\dot{\mathbf{K}}_f = \mathbf{K}_f \mathbf{M}_f \tag{5.6}$$

则引出所谓的广义Jaumann导数[4]$\delta_f \boldsymbol{\sigma}/\delta t$如下

$$\dot{\mathbf{T}}_f = J\mathbf{K}_f : (\delta_f \boldsymbol{\sigma}/\delta t) \tag{5.7a}$$

$$\delta_f \boldsymbol{\sigma}/\delta t = (\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{tr}\mathbf{D}) + \mathbf{M}_f : \boldsymbol{\sigma} \tag{5.7b}$$

下面具体求出$\mathbf{M}_f$. 对(5.5)作物质导数，并利用(5.7)得

$$\dot{\mathbf{K}}_f \approx \sum_{i,j} [(\dot{\overline{\psi_{ij}^{(f)^{-1}}}}) + \psi_{kj}^{(f)^{-1}}(\Omega_{ik}^L + \Omega_{ik}^E) + \psi_{ik}^{(f)^{-1}}(\Omega_{jk}^L + \Omega_{jk}^E)] \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_j \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \tag{5.8}$$

再与$\mathbf{M}_f$的定义(5.6)相比较，就不难求得$\mathbf{M}_f$在拟Euler标架$\{\mathbf{e}_i\}$下的分量如下：

$$M_{ij}^{(f)} \approx -\dot{\overline{\ln \psi_{ij}^{(f)}}} + \psi_{ij}^{(f)} [\psi_{kj}^{(f)^{-1}}(\Omega_{ik}^L + \Omega_{ik}^E) + \psi_{jk}^{(f)^{-1}}(\Omega_{jk}^L + \Omega_{jk}^E)] \qquad (i,j不求和) \tag{5.9}$$

例如，关于共轭应力$\mathbf{T}_1$，$\mathbf{T}_{-1}$和$\mathbf{T}_R$的广义Jaumann导数求得如下：

$$\delta_{\pm 1} \boldsymbol{\sigma}/\delta t \approx \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{tr}\mathbf{D} + (\boldsymbol{\sigma\Omega} - \boldsymbol{\Omega\sigma}) \mp (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{D} + \mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}) \tag{5.10a}$$

$$\delta_R \boldsymbol{\sigma}/\delta t \approx \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{tr}\mathbf{D} + (\boldsymbol{\sigma\Omega}^P - \boldsymbol{\Omega}^P\boldsymbol{\sigma}) \tag{5.10b}$$

最后，我们在小应变条件$\varepsilon = \|\varepsilon\| \ll 1$下对(5.7b)和(5.9)进行化简. 经简化可得

$$\delta_f \boldsymbol{\sigma}/\delta t \approx \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{tr}\mathbf{D} + (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{L}_f - \mathbf{L}_f\boldsymbol{\sigma}) - m_f(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{D} + \mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}) - \mathbf{R}_f + O(\|\mathbf{D}\|\varepsilon^2) \tag{5.11}$$

其中反对称张量$\mathbf{L}_f$按照郭仲衡先生的论文[1]定义如下

$$\mathbf{L} = \mu_f \boldsymbol{\Omega} + (1 - \mu_f)\boldsymbol{\Omega}^P \tag{5.12a}$$

$$\mu_f = (2m_f^2 - 3m_f + 1) - 2k_f \tag{5.12b}$$

我们求得残余项$\mathbf{R}_f$为

$$\mathbf{R}_f = (2k_f - m_f^2 + 2m_f - 1)(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}) + (m_f - m_f^2 + k_f)(\boldsymbol{\varepsilon\sigma}\mathbf{D} + \mathbf{D}\boldsymbol{\sigma\varepsilon}) \tag{5.13}$$

特别地，对应Seth类应变$\mathbf{S}_n$的共轭应力，则有

$$\mu_n = (2/3)(2n - 1)(n - 1) \tag{5.14a}$$

$$\mathbf{R}_n = (1/3)(n^2 - 1)[(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}) - (\boldsymbol{\varepsilon\sigma}\mathbf{D} + \mathbf{D}\boldsymbol{\sigma\varepsilon})] \tag{5.14b}$$

式(5.11)～(5.14)表明，当且仅当略去$O(\|\mathbf{D}\|\varepsilon)$后才有

$$\delta_f \boldsymbol{\sigma}/\delta t = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{tr}\mathbf{D} + (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{L}_f - \mathbf{L}_f\boldsymbol{\sigma}) - m_f(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{D} + \mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}) \tag{5.15}$$

这正是郭仲衡先生关于广义Jaumann导数形式的猜想形式.

六、讨　论

拟主轴法可以克服主轴法要求时时刻刻在变形体各点精确地选取到应变主轴这种苛刻的条件，从而有可能适用于增量法和有限单元法之类的近似.

增量法在一定意义上可注释为已知物体在 t 时刻状态，求该物体在$t+\Delta t$时刻的状态，从而把一个非线性问题转化为线性问题的方法. 设 $\{\mathbf{E}_i\}$ 为t时刻拟主轴标架，按照 (4.15)，只要$\Delta t = O(\gamma_E/D_E)$，则$\{\mathbf{E}_i\}$就依然可作为$t+\Delta t$时刻的拟主轴标架. 从而在所有有关公式中取$\Omega^L = 0$而把问题作进一步化简.

杆、板、壳的大变形一般都是小应变、大转动变形。由于在小应变状态下任何单位正交标架都可取作为拟主标架，因此对杆、板、壳（大转动）变形问题可以始终任意固定一个单位正交标架作为拟主轴标架。比如，可取壳体中曲面两个主曲率线方向和法向构成拟主轴标架。这样下来采用第三和第四节求应变和转动的近似表示只有误差$O(\gamma^2_{max})$，这里γ_{max}为变形历史上总剪切参数γ的最大值。因此，拟主轴法特别适用于建立Lagrange描述下的杆、板、壳大转动变形理论。

在有限元法中，把初始构形划分为有限个单元，它们作为物质单元随物体变形运动。每个单元上的有限转动张量$\mathbf{Q}$及拟Lagrange和Euler转动张量$\mathbf{R}^L$和$\mathbf{R}^E$不妨就取为常数，由此可望构造新的有限单元法。

总之，拟主轴法具有主轴法的主要优点，能够比较简练地表示各种复杂的应变（尤其是Hill类应变）以及有限转动张量，表达应变率、转动率、共轭应力和共旋应力率；拟主轴法同时又扬弃了主轴法的事先精确知道应变主轴这个实际问题难于满足的要求。因此，拟主轴法可望成为大变形实用理论（尤其在杆、板、壳大转动变形理论）中一种新的基本方法。

参 考 文 献

[1] R. Hill, Aspects of invariance in solid mechanics, in *Advances in Applied Mechanics*, Vol. **18**, Chia-Shun Yih, ed (1978),1—75.

[2] R. Hill, Constitutive inequalities for isotropic elastic solids under finite strain, *Proc. R. Soc. Lond*, **A314** (1970),457—472.

[3] M. A. Biot, *Mechanics of Incremental Deformation*,John Wiley & Sons (1965).

[4] 郭仲衡、R. N. Dubey, 非线性连续介质力学中的"主轴法",力学进展, **13** (1983),1—17.

[5] 郭仲衡、梁浩云, 从主轴法到抽象表示, 力学进展, **20** (1990),303—315.

[6] 梁浩云, 主轴内蕴法与高维张量方程$\mathbf{AX}-\mathbf{XA}=\mathbf{C}$,应用数学和力学, **17**(10) (1996),889—894.

[7] 郭仲衡, 《非线性弹性理论》, 科学出版社 (1980).

[8] A. Hoger and D. E. Carlson,Determination of the stretch and rotation in the polar decomposition of the deformation gradient, *Quart. Appl.Math.*,**42** (1984), 113—117.

[9] Z.-H. Xiong and Q.-S. Zheng, General algorithms for the polar decomposition and strains, *Acta Mech. Sinica*, **4** (1988),175—181.

[10] Q.-S. Zheng, Theory of representations for tensor functions——A unified invariant approach to constitutive equations,*Appl. Mech. Rev.*,**47** (1994),545—587; 中译: 张量函数的表示理论——本构方程统一不变性研究, 力学进展, **26**(1) (1996),114—137和**26**(2) (1996).

Quasi-Principal Axis Method in Finite Deformation

Zheng Quanshui

(Department of Engineering Mechanics, Qinghua University, Beijing 100084, P. R. China)

Abstract

A quasi-principal axis frame means a unit orthogonal frame in which the shear strains are small, As an extension of Hill's principal axis method, we establish the approximate representations for various strains, the finite rotation tensor, spins, strain rates, conjugate stresses and their rates with respect to quasi-principal axes. The quasi-principal axis method may function as a new basis of numerically analyzing finite deformation problems.

Key words small shear strain, quasi-principal axes, applied large deformation method