应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

关于刚体系统的单侧约束运动

李 洪 波[1]

（郑泉水推荐，1996年2月16日收到）

摘 要

本文研究了一大类刚体系统的单侧约束运动的局部和整体性质．主要结论是：局部地，这类系统的运动相当于某带边黎曼流形上的质点的运动；整体地，在能量守恒的假定下，这类系统相当于某带边黎曼流形上的台球系统．

关键词 单侧约束运动 刚体系统 台球系统

一、引 言

力学系统单侧约束运动的研究归结为碰撞研究．对一个系统，在其内部及约束壁上可同时发生多起碰撞，使得碰撞结果的计算很困难．在文[1]中，Moreau 采用凸分析方法研究了一些简单模型如平面上的一个圆盘、杆或木块与两堵墙壁碰撞的情形．这种方法未能推广到更复杂的力学系统如刚体系统的研究中去．另一方面，当约束均为双侧时，系统的运动性质（局部的和全局的）已经被很好的研究了（参考[2]，[3]）．在1990年，郭仲衡教授指导我研究一只筷子在一个大碗里运动的模型，后来我把这个模型推广到一大类刚体系统的单侧约束运动模型．基本的研究思路是推广单个刚体的研究方法：碰撞发生时，在接触面及各刚体的接点处将产生冲量，如果在碰撞发生前能知道这些冲量的足够多的性质，则有可能依据能量方程、动量方程和角动量方程求出这些冲量及碰撞后的广义速度．对一大类刚体系统，因未知量的个数等于方程的个数，碰撞后的力学状态可由碰撞前的状态唯一确定．计算结果表明，碰撞的结果相当于质点与约束壁的碰撞，只不过物理空间换成了一个带边黎曼流形．在能量守恒的假定下，系统运动的全局状态相当于一个带边黎曼流形上的台球系统的运动状态，因而可应用遍历论的方法进行研究．这些结果包括在我的硕士论文[5]中．

二、弹性碰撞的局部性质

本文中的刚体系统在m维($m=2$，3)物理空间中，自由度为d，由n个刚体连接组成，共有t个接合且都是球窝接合．假定每个接合仅连接两个刚体且与刚体相比，接合充分小以致于可以看成是一个点；还假定在刚体和约束壁的表面上没有磨擦．这样的刚体系统称为**简单**

1 中国科学院系统科学所数学机械化研究中心，北京 100080

连接的系统.设系统的广义坐标是$q=(q_1,\ q_2,\cdots,\ q_d)^T$，总能量是$E(q,\ \dot{q})=0.5\dot{q}^TA\dot{q}+V$，这里$\dot{q}=dq/dt$，$A=A(q)$是动能张量，$V=V(q)$是势函数.

设在$t=t_0$时$q=q^0$处发生一次碰撞.假定碰撞是瞬时的，只有一个碰撞接触面且与刚体和约束壁相比，接触面充分小以致于可以看成一个点（以C表示）.如果是系统内部的碰撞，则或者碰撞发生在两个刚体之间，这时假定至少一个刚体在C点邻近有可微的表面；或者碰撞发生在一个刚体与一个接点之间，这时假定刚体在C点邻近有可微的表面.如果是系统与约束壁的碰撞，则或者碰撞发生在一个刚体与约束壁之间，这时假定至少其中一个在C点邻近有可微的表面；或者碰撞发生在一个接点与约束壁之间，这时假定约束壁在C点邻近有可微的表面.无论何种情形，以N标记所说的表面在C点的单位外法向量.这样的碰撞称点碰撞.如果点碰撞发生在两个刚体或一个刚体与一个约束壁之间，则在C点有一对冲量$\{P,\ -P\}$，这里$P=pN\ (p>0)$是由以N为单位外法向量的表面发出的冲量；在每一接点i处都有一对冲量$\{P_i,\ -P_i\}$分别作用在所连接的两个刚体上.如果点碰撞发生在一个刚体（或约束壁）α与连接两个刚体β，γ的接点i_0之间，则在C点有三个冲量P，P_β，P_γ分别作用在α，β，γ上.这些冲量满足$P+P_\beta+P_\gamma=0$和$P=pN$，$p<0$.令$P_{i_0}=P_\beta$；在其他每个接点i处都有一对冲量$\{P_i,\ -P_i\}$分别作用在所连接的两个刚体上.设碰撞所对应的单侧约束是$f(q)\leqslant 0$，这里f是光滑函数.设碰撞前后系统的广义速度分别是$\dot{q}_-$，$\dot{q}_+$.

我们有$3mn-3n$个方程：mn个是关于刚体动量变化的，$(2m-3)n$个是关于刚体角动量变化的.假定物理空间中存在一个固定的坐标系.对第j个刚体，设其质量是m_j，质心的位置向量是$X_j=X_j(q)$，关于质心的惯性张量和角速度分别是I_j,ω_j,作用于刚体的冲量是$\{P_{j1},\ P_{j2},\ \cdots,\ P_{jl}\}$，其作用点分别是$\{r_{j1},\ r_{j2},\ \cdots,\ r_{jl}\}$；则质心的动量变化为

$$m_j(\dot{X}_j|_{t_0^+}-\dot{X}_j|_{t_0^-})=m_j\frac{\partial X_j}{\partial q^T}(\dot{q}_+-\dot{q}_-)=\sum_{k=1}^{l}P_{jk}$$

关于质心的角动量变化为

$$I_j(\omega_j|_{t_0^+}-\omega_j|_{t_0^-})=I_jB_j(\dot{q}_+-\dot{q}_-)=\sum_{k=1}^{l}r_{jk}\times P_{jk}$$

这里$\omega_j=\omega_j(q,\ \dot{q})=B_j(q)_{(2m-3)\times d}\dot{q}$.令$Q=A(\dot{q}_+-\dot{q}_-)$，则$\dot{q}_+=A^{-1}Q+\dot{q}_-$.

这些方程是关于$d+mt+1$个未知变量的线性的独立方程.未知变量是：Q中的d个，$\{P_i|1<i<t\}$中的mt个和一个p，令$\tilde{P}=(p,\ P_1^T,\ P_2^T,\ \cdots,\ P_t^T)^T$，则这些方程呈以下形式：

$$(D_1\ \ D_2)\begin{pmatrix}Q\\ \tilde{P}\end{pmatrix}=0 \tag{2.1}$$

这里D_1，D_2是与$\dot{q}_-$无关的矩阵.

如果知道碰撞过程中能量的损失，则我们共有$3mn-3n+1$个独立方程.为了确定唯一的解，需要成立：

$$d=3mn-3n-mt \tag{2.2}$$

满足(2.2)的简单连接的系统称为线性系统，它包括一大类刚体系统：

1．若$n-2$个刚体各具有两个接点，其余两个刚体各有一个接点，则$t=n-1$，$d=(2m-3)n+m$，(2.2)成立。

2．用一个刚体连接一个线性系统中的两个刚体，如果这样的连接使原系统的自由度降

低1个，则与原系统相比，新系统的刚体个数增加1个，自由度降低 $3-m$ 个，接点数增加2个，(2.2) 依然成立。特别地，用一个刚体连接第一种类型的线性系统中的两个刚体，仍是一个线性系统。

3. 用一个刚体连接两个不相连的线性系统，得到一个线性系统；去掉一个线性系统中的一个刚体，得到一个或两个线性系统。

对于线性系统，(2.1)的解空间是一维的。设它的一组基是 Q^*，$\{P_i^* | 1\leqslant i\leqslant t\}$，$p^*$，则 Q^*与$\dot{q}_-$无关且$Q=xQ^*$。

现在假定能量守恒，则$E(q^0, \dot{q}_+)=E(q^0, \dot{q}_-)$。将$E$，$\dot{q}_+$，$Q$的表达式代入，我们得到$x$的一个二次方程，它的两个解是：

$$x=0, -2\frac{Q^{*T}\dot{q}_-}{(Q^*)^T A^{-1} Q^*}$$

只要 $$\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)^T \dot{q}_- = (f(q))^*|_{t_0^-} > 0$$

就必然发生碰撞，从而$x\neq 0$，$Q^{*T}\dot{q}_-\neq 0$。由此我们得知Q^*与$\partial f/\partial q$必然共线。

定理1 一个线性系统的弹性点碰撞满足：

$$\dot{q}_+ = \begin{cases} \dot{q}_-, & \text{当}\left(\dfrac{\partial f}{\partial q}\right)^T \dot{q}_- \leqslant 0 \\ \dot{q}_- - 2\dfrac{\left(\dfrac{\partial f}{\partial q}\right)^T \dot{q}_-}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial q}\right)^T A^{-1}\left(\dfrac{\partial f}{\partial q}\right)} A^{-1}\dfrac{\partial f}{\partial q}, & \text{当}\left(\dfrac{\partial f}{\partial q}\right)^T \dot{q}_- > 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

(2.3)与广义坐标的选取无关。设另有一组广义坐标$u=u(q)$，则 $\dot{u}=\dfrac{\partial u}{\partial q^T}\dot{q}$；可以证明，(2.3)的第二个方程变成

$$\dot{u}_+ = \dot{u}_- - 2\frac{\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}\right)^T \dot{u}_-}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}\right)^T \tilde{A}^{-1}\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}\right)} \tilde{A}^{-1}\frac{\partial f}{\partial u}$$

这里 $$\tilde{A} = \left(\left(\frac{\partial u}{\partial q^T}\right)^{-1}\right)^T A \left(\frac{\partial u}{\partial q^T}\right)^{-1}$$

另外注意，第二个方程是说，在系统的构形空间的$q=q^0$处的具有黎曼度量A的切空间上，$\dot{q}_+$是$\dot{q}_-$关于曲面$f(q)=0$在$q=q^0$点的由余切空间经勒让德逆变换拉回的法向量 $A^{-1}\partial f/\partial q$ 的反射。

三、非弹性碰撞的局部性质

如果碰撞过程中能量不守恒，根据牛顿的实验，损失的能量E_l占碰撞过程中在C处传递的能量E_t的百分比是$k=k(q)$。

我们先计算E_t。E_t是碰撞完全非弹性时损失的能量，因而先假定点碰撞是完全非弹性的；与第二节相比，仅能量方程被换成下列约束：若碰撞发生在两个刚体或一个刚体与一个接点之间，则它们在C点的速度向N上的投影相等；若碰撞发生在一个刚体或接点与一个约束壁

之间，则该刚体或接点在C点的速度向N上的投影等于零．现在方程都是线性的，独立的，并呈以下形式：

$$\begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A\dot{q}_+ \\ P \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} D_1 A\dot{q}_- \\ 0 \end{pmatrix}$$

这里$D_3=D_3(q)$．解是唯一的，并且$\dot{q}_+=W_{d\times d}\dot{q}_-$．因此，

$$E_t=\frac{1}{2}\dot{q}_-^T(A-W^TAW)\dot{q}_-$$

现在计算发生非弹性点碰撞后系统的广义速度，仍以$\dot{q}_+$表示．与第二节相比，仅能量方程变成$E(\dot{q}_-)-E(\dot{q}_+)=kE_t$．将$E$，$E_t$，$\dot{q}_+$的表达式及$Q=y\partial f/\partial q$代入后，我们得到$y$的两个解，只有下列解才是可能的：

$$y=-\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)^T\dot{q}_-+\sqrt{\Delta}}{\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)^T A^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)}$$

这里　$\Delta=\left(\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)^T\dot{q}_-\right)^2-k\left(\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)^T A^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)\right)(\dot{q}_-^T(A-W^TAW)\dot{q}_-)$

定理2　一个线性系统的非弹性点碰撞满足：

$$\dot{q}_+=\begin{cases}\dot{q}_-, & \text{当}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)^T\dot{q}_-\leqslant 0\\ \dot{q}_--\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)^T\dot{q}_-+\sqrt{\Delta}}{\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)^T A^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)}A^{-1}\frac{\partial f}{\partial q} & \text{当}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)^T\dot{q}_->0\end{cases}\tag{3.1}$$

(3.1)也与广义坐标的选取无关．(3.1)的第二个方程是说，在系统的构形空间的$q=q^0$处的具有黎曼度量A的切空间上，$\dot{q}_-$在曲面$f(q)=0$的$q=q^0$点的切子空间上的投影不变，而在其法向量$A^{-1}\partial f/\partial q$上的投影反向并缩短．

四、能量守恒运动的全局性质

线性系统的构形空间M是一个带有黎曼度量A的流形．设$f_i(q)\leqslant 0$，$1\leqslant i\leqslant s$，是加在系统上的单侧约束，这里$f_i(q)$是光滑函数．这些约束定义了M的一个带分段光滑边界的子流形M_0。假定M_0是紧的，有非空的内部，并且系统的拉格朗日向量场在M_0上是完备的．

碰撞只发生在M_0的边界上．边界上有两种点：一种称为正常点，该点满足点碰撞的条件；另一种称为异常点，在该点的碰撞不是点碰撞．假定在边界上引入勒贝格测度后，异常点集合的测度为零．

当能量守恒时，设$V(q)<E$，$\forall q\in M_0$．注意到在定理1中，当以$(E-V)A$代替A时，(2.3)保持不变，因而根据雅可比最小作用量原理得到：

定理3　对于线性系统的能量守恒运动，在M_0的具有黎曼度量$(E-V)A$的切丛上，拉格朗日向量场的底积分曲线在M_0内部是测地线，在M_0边界的正常点处关于边界的法向量发生反射．

这样，我们的系统是一种在具有黎曼度量$(E-V)A$的带边流形M_0上的台球系统．根据

遍历论的方法，在M_0的具有能量E的收缩的球丛上引入在拉格朗日流下不变的测度后，可以证明，拉格朗日向量场的至少经历一次异常点的积分曲线集合的测度为零。

发生在异常点的碰撞比较复杂，这时一般 $\dot{q}_+$ 不唯一，而是可以取某个集合中的任何值。对于这种碰撞的研究，一种方法是利用Hertz的碰撞理论研究碰撞过程，认为碰撞不是瞬时的（参考[5]），另一种方法是用微分包含代替某些微分方程（参考[1]）。这样我们就能够推广Moreau的简单模型了。

参 考 文 献

[1] J. J. Moreau, Quadratic programming in mechanics: dynamics of one-sided constraints, *J.SIAM Control*, 4(1) (1966).

[2] R. Abraham and J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, 2nd Edition, Addison-Wesley, Reading Mass. (1978).

[3] V. I. Arnold, *Mathematical Methods in Classical Mechanics*, Spring-Verlag (1978).

[4] Ya G. Sinai, *Introduction to Ergodic Theory*, Princeton N. J., Princeton Univ. Press (1976).

[5] 李洪波，力学系统单侧约束的几何理论，北京大学硕士研究生毕业论文（1991）.

On Unilaterally Constrained Motions of Rigid Bodies Systems

Li Hongbo

(*MMRC, Institute of Systems Science, Academia Sinica, Beijing* 100080, *P. R. China*)

Abstract

In this paper, the unilaterally constrained motions of a large class of rigid bodies systems are studied, both locally and globally. The main conclusion is that, locally, such a system behaves like a particle in a Riemannian manifold with boundary; globally, under the assumption of energy conservation, the system behaves like a billiard system over a Riemannian manifold with boundary.

Key words unilaterally constrained motions, rigid bodies systems, billiards