应用数学和力学，第17卷 第10期（1996年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

广义弹塑性梁理论及接触问题中的对偶变分不等式*

高　　扬[1]

（郑泉水推荐，1996年2月21日收到）

摘　　要

为研究摩擦接触问题，本文建立了一个具有二类独立变量的二维弹塑性梁模型。由此提出了一个新的非线性二次互补性问题。其中的外部互补性条件定义了自由边界；而内部互补性条件则控制了弹塑性分界面。文中证明了此二次互补性问题等价于一非线性变分不等式，并导出了其对偶变分不等式。本文结果显示对偶问题较原问题有更多的优越性。应用于塑性极限分析理论中，文中最后证明了一个简单的下限定理。

关键词　接触问题　互补性问题　弹塑性梁理论　变分不等式

一、引　　言

自从Fichera的第一篇关于Signorini问题的论文发表以来（见[5]），弹性系统中的障碍问题和有关的变分不等式业已从理论及数值方法两方面进行了深入的研究，参见[11，13，14]。从数学规划观点而言，原始变分不等式仅能提供界限解，而对偶变分不等式则提供下限解。对于弹塑性系统而言，对偶逼近往往具有更多的优越性。1972年Mosco[17]首先提出了线性系统中的变分不等式。之后，这方面陆续发表了不少论文(参见[2，15，16])。最近，丘成桐、高扬研究了几何非线性系统中的对偶变分不等式，并在von Kármán板理论中得以应用[18]。由于Mosco的对偶变分不等式中的未知变量是原问题中的对偶变量，在实际应用中，很难建立对偶不等式的显式形式。因此对偶变分不等式并没有在工程问题中得以广泛应用。

本文的目的在于研究二维弹塑性梁的接触问题及对偶变分不等式逼近。众所周知，经典的Timoshenko梁理论中的剪切位移独立于y轴，亦即变形后的梁截面仍然保持平面。这种变形模型难于适用于弹塑性问题。最近，高扬及Russell[9]推广了Timoshenko理论。通过引入一个独立的剪切位移$v(x, y)$，建立了一个广义的弹性梁动力学模型，并在智能材料（即Smart materials）中得以应用[10]。本文则将此广义梁模型推广到弹塑性系统中，并给出在接触问题中的应用。为降低非线性方程中的微分阶数，作者引入了一个新的轴向位

* 美国国家科学基金资助课题，DMS—9400565

1 美国维吉尼亚理工大学数学系，VA24061

移 $u(x, y)$，从而建立了一个二阶偏微分不等系统．此模型可以用来处理具有摩擦接触条件的障碍问题，并由此导致了一个所谓二次互补性问题(Bicomplementarity problem)．文中证明了这个新的二次互补性问题等价于一非线性变分不等式以及其对偶变分不等式．应用于塑性极限分析理论中，导出了一个下限定理．

二、广义弹塑性梁及接触问题

考虑一理想弹塑性梁与一刚性障碍物G所接触．梁的横截面为一矩形 $\Omega=\{(x, y)\in \mathbf{R}^2 | 0\leqslant x\leqslant L, -h\leqslant y\leqslant h\}$．（见图1）．梁的上端作用有外载$\mathbf{p}=\{\bar{q}(x, h), \bar{p}(x)\}^t$，下端有分布剪力$\mathbf{p}=\{\bar{q}(x, -h), 0\}^t$．梁的位移分别为：轴向位移$u(x, y)$；垂直位移$w(x)$．

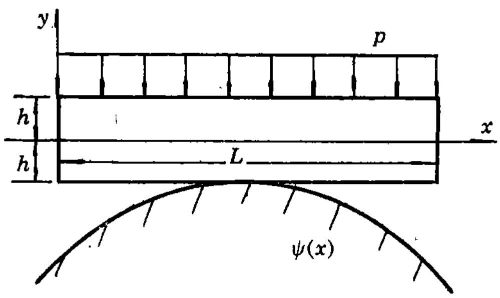

图1 广义弹塑性梁的接触问题

由连续介质力学理论知应变张量$\{\varepsilon_{\alpha\gamma}\}$应为：

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy}\\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy}\end{pmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial w}{\partial y}\end{Bmatrix}$$

因为$w=w(x)$，所以$\varepsilon_{yy}=0$．令

$$\mathbf{u}(x, y)=\begin{pmatrix}u(x, y)\\ w(x)\end{pmatrix},\quad \mathbf{e}=\begin{pmatrix}\varepsilon\\ \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon_{xx}\\ 2\varepsilon_{xy}\end{pmatrix} \tag{2.1}$$

分别为广义位移及广义应变矢量，于是广义梁的几何变形方程应为：

$$\mathbf{e}=\begin{pmatrix}\varepsilon\\ \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & 0\\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u(x,y)\\ w(x)\end{pmatrix}=\Lambda\mathbf{u} \tag{2.2}$$

其中

$$\Lambda:=\begin{pmatrix}\partial/\partial x & 0\\ \partial/\partial y & \partial/\partial x\end{pmatrix} \tag{2.3}$$

为几何变形算子．令广义位移空间$\mathscr{U}$为：

$$\mathscr{U}:=\left\{\mathbf{u}=\begin{pmatrix}u(x, y)\\ w(x)\end{pmatrix} \middle| u(x, y)\in\mathscr{H}^1(\Omega),\ w(x)\in\mathscr{H}^1[0, L]\right\}$$

其中$\mathscr{H}^1=W^{2,1}$为标准的Sobolev空间．广义应变空间$\mathscr{E}$及其对偶空间$\mathscr{E}^*=\mathscr{S}$（亦即广义应力空间）分别为：

$$\mathscr{E}:=\left\{\mathbf{e}=\begin{pmatrix}\varepsilon(x,\ y)\\ \gamma(x,\ y)\end{pmatrix}\Big|\varepsilon(x,\ y),\ \gamma(x,\ y)\in\mathscr{L}^2(\Omega)\right\}$$

$$\mathscr{S}:=\left\{\mathbf{s}=\begin{pmatrix}\sigma(x,\ y)\\ \tau(x,\ y)\end{pmatrix}\Big|\sigma(x,\ y),\ \tau(x,\ y)\in\mathscr{L}^2(\Omega)\right\}$$

双线性式

$$\langle *,* \rangle:\mathscr{S}\times\mathscr{E}\to\mathbf{R}$$

$$(\mathbf{s},\ \mathbf{e})=\langle\sigma,\ \varepsilon\rangle+\langle\tau,\ \gamma\rangle=\int_\Omega(\sigma\varepsilon+\tau\gamma)d\Omega$$

将$\mathscr{S}$及$\mathscr{E}$装配成对偶空间．现引入广义外力空间$\mathscr{P}$：

$$\mathscr{P}:=\left\{\mathbf{p}\in\mathbf{R}^2\,|\,\mathbf{p}=\begin{pmatrix}q(x,\ \pm h)\\ p(x)\end{pmatrix},\quad\forall x\in[0,\ L],\ q,\ p(x)\in\mathscr{L}^2[0,\ L]\right\}$$

双线性式 $(*,\ *):\mathscr{P}\times\mathscr{U}:\to\mathbf{R}$

$$(\mathbf{p},\ \mathbf{u})=\int_0^L q(x,\ h)u(x,\ h)dx+\int_0^L q(x,\ -h)u(x,\ -h)dx+\int_0^L p(x)w(x)dx$$

则将$\mathscr{P}$和$\mathscr{U}$装配成对偶空间．根据Gauss-Green公式，对任意给定$\mathbf{u}(u,\ w)^t$，$\mathbf{e}=\Lambda\mathbf{u}$有以下对偶对关系：

$$\langle\mathbf{s},\ \Lambda\mathbf{u}\rangle=(\Lambda^*\mathbf{s},\ \mathbf{u})\tag{2.4}$$

此处$\Lambda^*:\mathscr{S}\to\mathscr{P}$为$\Lambda$的共轭算子，由下式定义：

$$(\Lambda^*\mathbf{s},\ \mathbf{u})=-\int_\Omega\frac{\partial\tau}{\partial x}wd\Omega-\int_\Omega\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\frac{\partial\tau}{\partial y}\right)ud\Omega$$

$$+\int_{-h}^h\sigma n_x udy|_{x=0,L}+\int_{-h}^h\tau n_x wdy|_{x=0,L}+\int_0^L\tau n_y udx|_{y=\pm h}$$

因此Λ^*可分解为“内部”算子(Ω中)：

$$\Lambda^*_{\mathrm{int}}=\int_{-h}^h\begin{pmatrix}-\partial/\partial x & -\partial/\partial y\\ 0 & -\partial/\partial x\end{pmatrix}dy\tag{2.5}$$

及边界算子($\partial\Omega$上)：

$$\Lambda^*\mathbf{s}=\begin{cases}\sigma n_x,\ x=0,\ L & x\text{方向}\\ \tau n_x,\ x=0,\ L & y\text{方向}\\ \tau n_y,\ y=\pm h\end{cases}\tag{2.6}$$

两部分．此令$\mathscr{U}_a\subset\mathscr{U}$为运动许可空间（即$\mathscr{U}$的子空间，其中包括必要的边界条件）．例如对于夹支梁，此空间可定义为：

$$\mathscr{U}_a=\{(u,\ w)^t\in\mathscr{U}\,|\,w=\partial w/\partial x=0,\ u(x,\ y)=0\quad\forall y\in[-h,\ h],\ \text{当}x=0,\ L\}.$$

于是对任意给定的$\mathbf{u}\in\mathscr{U}_a$，由对偶关系$\langle\Lambda\mathbf{u},\ \mathbf{s}\rangle=(\mathbf{u},\ \Lambda^*\mathbf{s})=(\mathbf{u},\ \mathbf{p})$可以导出平衡方程：

$$\Lambda^*\mathbf{s}=\mathbf{p}\Rightarrow\begin{cases}-\displaystyle\int_{-h}^h\frac{\partial\tau}{\partial x}dy=p(x), & \forall x\in[0,\ L]\\ \dfrac{\partial}{\partial x}\sigma+\dfrac{\partial}{\partial y}\tau=0, & \forall(x,\ y)\in\Omega\\ \tau(x,\ \pm h)=q(x,\ \pm h), & \forall x\in[0,\ L]\end{cases}\tag{2.7}$$

今设障碍物的形状$\psi(x)$为一严格凹的函数，对于给定的外载$\bar{\mathbf{p}}=(\bar{q}(x,\ \pm h),\ \bar{p}(x))^t$，互补性条件应为

$$w(x)-\psi(x)\geqslant 0,\ \ \bar{p}(x)-p(x)\leqslant 0,\ \ (w(x)-\psi(x))(\bar{p}(x)-p(x))=0 \qquad \forall x\in[0,\ L] \tag{2.8}$$

如果$\mathbf{u}(x,\ y)=(u(x,\ y),\ w(x))^t$及$\mathbf{s}(x,\ y)=(\sigma(x,\ y),\ \tau(x,\ y))^t$为问题的解，则接触区域$\mathscr{Z}\in[0,\ L]$及其边界可定义为：

$$\mathscr{Z}:=\{x\in[0,\ L]\,|\,w(x)=\psi(x),\quad \forall x\in[0,\ L]\}$$

$$\partial\mathscr{Z}:=\left\{x\in[0,\ L]\,|\,w(x)=\psi(x),\int_{-h}^{h}\frac{\partial\tau}{\partial x}dy+\bar{p}(x)=0\right\}$$

此边界仅在问题被解决后方可确定，为此称为自由边界。因为互补性条件(2.8)涉及到位移$\mathbf{u}$及外载荷$\mathbf{p}$，为此我们称之为外部互补性条件。对于此弹塑性变形问题，我们同时还有所谓的内部互补性条件。此条件将涉及应变$\mathbf{e}$及应力$\mathbf{s}$，并且给出弹—塑性分界面。

现在考虑对偶对$(\mathbf{e},\ \mathbf{s})$的本构关系。当梁内有塑性变形发生时，域$\Omega$应分为二部分，即弹性区$\Omega_e$及塑性区$\Omega_p$，且$\Omega_e\cup\Omega_p=\Omega$，$\Omega_e\cap\Omega_p=\phi$。在弹性区$\Omega_e\subset\Omega$，应力矢量$\mathbf{s}$和应变矢量$\mathbf{e}\in\mathscr{E}$的关系可由线弹性（虎克）定律给出，本构方程应为：

$$\mathbf{s}=\mathbf{He}\ \Leftrightarrow\ \begin{pmatrix}\sigma\\ \tau\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varepsilon\\ \gamma\end{pmatrix}\qquad \Omega_e\text{中} \tag{2.9}$$

将此方程及几何关系(2.2)代入方程(2.7)，可得到此广义梁的弹性方程：

$$\left.\begin{aligned}&2h\frac{\partial^2}{\partial x^2}w(x)+\frac{\partial}{\partial x}u(x,\ h)-\frac{\partial}{\partial x}u(x,\ -h)+\bar{p}(x)/G=0, && x\in[0,\ L]\\ &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, && (x,\ y)\in[0,\ L]\times[-h,\ h]\\ &\frac{\partial}{\partial y}u(x,\ \pm h)+\frac{\partial w}{\partial x}=\bar{q}(x,\ \pm h)/G, && x\in[0,\ L]\end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

其中$\beta=G/E$。显然，对于给定的边界条件，此问题的精确解是不难求得的。

然而在塑性域$\Omega_p\subset\Omega$内，应变矢量应分解成弹性和塑性二部分，即$\mathbf{e}=\mathbf{e}^e+\mathbf{e}^p$。其弹性应变$\mathbf{e}^e$可由Hooke定理(2.9)求得。对于Hencky材料，塑性应变$\mathbf{e}^p$由下式定义：

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{e}^p=\lambda[\partial f(\mathbf{s})/\partial\mathbf{s}]\\ &\text{s. t. }\ \lambda\geqslant 0,\ f(\mathbf{s})\leqslant 0,\ \lambda f(\mathbf{s})=0\qquad \text{a. e. }\Omega\text{中}\end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

其中$\lambda\in\mathbf{R}^+$为塑性流动因子，$f(\mathbf{s})$为屈服函数

$$f(\mathbf{s})=\|\mathbf{s}\|_a-\sigma_b=\sqrt{\sigma^2+a\tau^2}-\sigma_b \tag{2.12}$$

σ_b为材料常数，$a>0$为一参数：对 von Mises 材料，$a=3$；对 Tresca 材料，$a=4$ [3]。$\|\mathbf{s}\|_a=\sqrt{\sigma^2+a\tau^2}$为有效应力，其为应力矢量$\mathbf{s}$的模。对于比例加载问题，亦即在塑性变形过程中，应变矢量$\mathbf{e}^e$与$\mathbf{e}^p$保持同一方向，容易求得：

$$\lambda=\|\mathbf{e}^p\|_{1/a}=\|\mathbf{e}\|_{1/a}-E^{-1}\sigma_b=\sqrt{\varepsilon^2+\gamma^2/a}-E^{-1}\sigma_b \tag{2.13}$$

其中$\|\mathbf{e}\|_{1/a}=\sqrt{\varepsilon^2+\gamma^2/a}$为应变矢量的模。今引入阶梯函数：

$$\phi(f)=\begin{cases}1, & f\geqslant 0\\ 0, & f<0\end{cases}$$

于是本构方程可以写成如下形式：

$$\mathbf{e}=\mathbf{H}^{-1}\mathbf{s}+\lambda\frac{\partial f(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}}\phi(f(\mathbf{s}))\text{或}\left.\begin{aligned}\varepsilon&=E^{-1}\sigma+\lambda\frac{\partial f(\mathbf{s})}{\partial\sigma_\varepsilon}\phi(f(\mathbf{s}))\\\gamma&=G^{-1}\tau+\lambda\frac{\partial f(\mathbf{s})}{\partial\tau}\phi(f(\mathbf{s}))\end{aligned}\right\}\tag{2.14}$$

此方程由下列互补条件约束着：

$$\lambda(\mathbf{e})\geqslant 0,\ f(\mathbf{s})\leqslant 0,\ \lambda(\mathbf{e})f(\mathbf{s})=0\tag{2.15}$$

因为这一互补性条件涉及内部变量对(e, s)，则称此为内部互补性条件．于是弹性域Ω_e、塑性域Ω_p及弹塑性分界面$\Gamma_{ep}=\Omega_e\cap\Omega_p$可定义如下：

$$\Omega_e:=\{(x,\ y)\in\Omega\,|\,\lambda(\mathbf{e}(x,\ y))<0\text{或}f(\mathbf{s}(x,\ y))<0\}$$

$$\Omega_p:=\{(x,\ y)\in\Omega\,|\,f(\mathbf{s}(x,\ y))=0\text{或}\lambda(\mathbf{e}(x,\ y))\geqslant 0\}$$

$$\Gamma_{ep}:=\{(x,\ y)\in\Omega\,|\,\lambda(\mathbf{e}(x,\ y))=0,\ f(\mathbf{s}(x,\ y))=0\}$$

图 2 给出了各类空间及算子间的关系．其中$B(w)=w-\psi$，$B^*(p)=p-\bar{p}$．

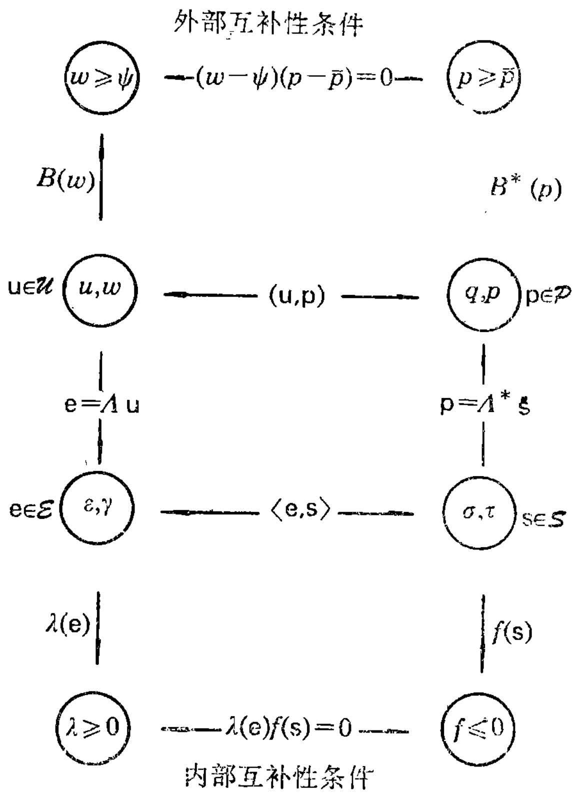

图2　对偶空间、算子及互补性条件

如果障碍物的形状为一严格凹的函数$\psi(x)\in\mathscr{H}^1[0,\ L]$，则此广义梁的障碍问题可定义为：

问题1(BCP)　对于给定的障碍函数$\psi(x)$和外载$\bar{p}(x)$，寻找位移场$\mathbf{u}(x,\ y)=(u(x,y),\ w(x))\in\mathscr{U}_a$及应力场$\mathbf{s}=(\sigma(x,\ y),\ \tau(x,\ y))$使其满足下列方程及条件：

1．几何方程：

$$\mathbf{e}=\Lambda\mathbf{u},\quad\text{或}\begin{pmatrix}\varepsilon\\\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\partial/\partial x & 0\\\partial/\partial y & \partial/\partial x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u(x,\ y)\\w(x)\end{pmatrix}$$

2．本构方程：

$$\mathbf{e}=\mathbf{H}^{-1}\mathbf{s}+\lambda\frac{\partial f(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}}\phi(f(\mathbf{s})),\text{或}\begin{cases}\varepsilon=E^{-1}\sigma+\lambda\dfrac{\partial f(\mathbf{s})}{\partial\sigma}\phi(f(\mathbf{s}))\\ \gamma=G^{-1}\tau+\lambda\dfrac{\partial f(\mathbf{s})}{\partial\tau}\phi(f(\mathbf{s}))\end{cases}$$

3．平衡方程：

$$\Lambda^*\mathbf{s}=\mathbf{p},\text{或}\begin{cases}\displaystyle\int_{-h}^{h}-\frac{\partial\tau}{\partial x}dy=p(x), & \forall x\in[0,\ L]\\ \dfrac{\partial}{\partial x}\sigma+\dfrac{\partial}{\partial y}\tau=0, & \forall(x,\ y)\in\Omega\\ \tau(x,\ \pm h)=\bar{q}(x,\ \pm h), & \forall x\in[0,\ L]\end{cases}$$

4．外部互补性条件：

$$w(x)-\psi(x)\geqslant 0,\ \ \bar{p}(x)-p(x)\leqslant 0,\ \ (w-\psi)(\bar{p}-p)=0$$

5．内部互补性条件：

$$\lambda(\mathbf{e})\geqslant 0,\ \ f(\mathbf{s})\leqslant 0,\ \ \lambda(\mathbf{e})f(\mathbf{s})=0$$

由于此问题具有二种不同类型的互补性条件，为此称此问题为二次互补性问题(Bicomplementarity Problem)，简称为(BCP)．

三、超势及原变分不等式

此节中我们将引入一超势函数以解除内部互补性条件．由于在弹性域Ω_e中，应力与应变为一一对应，应变能W_e为一凸函数：

$$W_e(\mathbf{e})=\int_\Omega\frac{1}{2}\mathbf{e}^t\mathbf{H}\mathbf{e}d\Omega=\int_\Omega\frac{1}{2}(E\varepsilon^2+G\gamma^2)d\Omega,\qquad \Omega_e\text{中} \tag{3.1}$$

通过Legendre变换，其共轭函数$W_e^*(\mathbf{s})$可定义为：

$$W_e^*(\mathbf{s})=\langle\mathbf{s},\ \mathbf{e}\rangle-W_e(\mathbf{e})=\int_\Omega\frac{1}{2}\mathbf{s}^t\mathbf{H}^{-1}\mathbf{s}d\Omega=\int_\Omega\frac{1}{2}(E^{-1}\sigma^2+G^{-1}\tau^2)d\Omega \tag{3.2}$$

此即弹性余能．于是在弹性域中，本构关系(2.9)及其逆形式应为：

$$\mathbf{s}=DW_e(\mathbf{e}),\ \text{或}\ \mathbf{e}=DW_e^*(\mathbf{s}),\qquad \Omega_e\text{中} \tag{3.3}$$

此处D为Gâteaux微分算子．现引入一应力空间的凸子集$\mathscr{K}$：

$$\mathscr{K}=\{\mathbf{s}\in\mathscr{S}\,|\,f(\mathbf{s}(x,\ y))\leqslant 0,\ \forall(x,\ y)\in\Omega\} \tag{3.4}$$

于是塑性超势$W_p^*(\mathbf{s})$可以定义为[6]：

$$W_p^*(\mathbf{s})=\begin{cases}0, & \mathbf{s}\in\mathscr{K}\\ +\infty, & \text{其他}\end{cases} \tag{3.5}$$

在凸分析中（参见[4]），W_p^*称为凸集$\mathscr{K}$的指标函数．其次微分为一点集映射：

$$\partial W_p^*(\mathbf{s})=\begin{cases}\lambda\dfrac{\partial f(\mathbf{s})}{\partial\mathbf{s}}, & f(\mathbf{s})=0,\ \lambda\geqslant 0\\ \{0\}, & f(\mathbf{s})<0\\ \phi, & f(\mathbf{s})>0\end{cases} \tag{3.6}$$

于是塑性本构关系(2.11)可写成如下形式：

$$\mathbf{e}^p \in \partial W_p^*(\mathbf{s}) \tag{3.7}$$

令
$$W^*(\mathbf{s}) = W_e^*(\mathbf{s}) + W_p^*(\mathbf{s}) \tag{3.8}$$

为余能超势，于是Hencky塑性梁的本构关系可统一地写成：

$$\mathbf{e} \in \partial W^*(\mathbf{s}) \tag{3.9}$$

利用Legendre-Fenchel变换，W^*的共轭函数可由下式得到：

$$\begin{aligned} W(\mathbf{e}) &= \sup_{\mathbf{s}}\{\langle \mathbf{s},\ \mathbf{e}\rangle - W^*(\mathbf{s})\} \\ &= \sup_{\mathbf{s}}\{\langle \mathbf{s},\ \mathbf{e}^e\rangle - W_e^*(\mathbf{s})\} + \sup_{\mathbf{s}}\{\langle \mathbf{s},\ \mathbf{e}^p\rangle - W_p^*(\mathbf{s})\} \\ &= W_e(\mathbf{e}) + W_p(\mathbf{e}) \end{aligned}$$

其中

$$W_e(\mathbf{e}) = \begin{cases} \int_\Omega \frac{1}{2}\mathbf{e}^t\mathbf{H}\mathbf{e}\,d\Omega, & \Omega_e\text{中} \\ \int_\Omega \frac{1}{2}E^{-1}\sigma_b^2\,d\Omega, & \Omega_p\text{中} \end{cases}$$

为弹性势能；而

$$W_p(\mathbf{e}) = \sup_{\mathbf{s}\in\mathscr{K}}\langle \mathbf{s},\ \mathbf{e}^p\rangle = \begin{cases} 0, & \Omega_e\text{中} \\ \int_\Omega \sigma_b\left(\sqrt{\varepsilon^2 + \frac{1}{\alpha}\gamma^2} - E^{-1}\sigma_b\right)d\Omega, & \Omega_p\text{中} \end{cases}$$

为塑性超势．在凸分析中，此也称为凸集$\mathscr{K}$的承托函数．利用第二节中引入的阶梯函数ϕ及方程(2.13)，超势函数W可进一步写成：

$$W(\mathbf{e}) = \int_\Omega \frac{1}{2}[\mathbf{e}^t\mathbf{H}\mathbf{e}\phi(-\lambda(\mathbf{e})) + E^{-1}\sigma_b^2\phi(\lambda(\mathbf{e}))]d\Omega + \int_\Omega \sigma_b\lambda(\mathbf{e})\phi(\lambda(\mathbf{e}))d\Omega \tag{3.10}$$

于是本构方程(3.9)的逆形式应为：

$$\mathbf{s} = \partial W(\mathbf{e}) \tag{3.11}$$

我们进一步引入位移空间的一凸锥$\mathscr{C}$：

$$\mathscr{C} := \{\mathbf{u} = (u,\ w)^t \in \mathscr{U} \mid w(x) \geqslant \psi(x),\quad \forall x \in [0,\ L]\} \tag{3.12}$$

于是此广义弹塑性梁理论的(BCP)问题可有如下提法：

在交集$\mathscr{U}_a \cap \mathscr{C}$中寻找$\mathbf{u} = (u,\ w)^t$满足下列方程：

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \text{几何方程：}\mathbf{e} = \Lambda\mathbf{u}, \\ 2.\ \text{物理方程：}\mathbf{s} = \partial W(\mathbf{e})\text{或}\mathbf{e} \in \partial W^*(\mathbf{s}) \\ 3.\ \text{平衡方程：}\Lambda^*\mathbf{s} \geqslant \bar{p}, \\ 4.\ \text{互补性条件：}(w(x) - \psi(x))(p(x) - \bar{p}(x)) = 0 \end{array}\right\} \tag{3.13}$$

此令$P: \mathscr{U}_a \to \mathbf{R}$为总势能函数：

$$P(\mathbf{u}) = W(\Lambda\mathbf{u}) - (\bar{\mathbf{p}},\ \mathbf{u}) \tag{3.14}$$

于是原变分不等问题（简称(PVI)）可阐述为：

问题2(PVI) 对于任意给定的$\mathbf{v} \in \mathscr{U}_a \cap \mathscr{C}$，寻找$\mathbf{u}$使得下列不等式成立：

$$(\partial P(\mathbf{u}),\ \mathbf{v} - \mathbf{u}) \geqslant 0, \qquad \forall \mathbf{v} \in \mathscr{U}_a \cap \mathscr{C} \tag{3.15}$$

亦即：

$$\int_\Omega^L (z(x) - w(x))\left[\int_{-h}^h -\frac{\partial}{\partial x}(\partial_\gamma W(\varepsilon(u),\ \gamma(u,\ w)))dy\right]dx$$

$$\geqslant \int_0^L (z(x) - w(x)\bar{p}(x))dx$$

$$\int_{\Omega}(v(x,\ y)-u(x,\ y))\left[\frac{\partial}{\partial x}(\partial_{\varepsilon}W(\varepsilon(u),\ \gamma(u,\ w)))\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial y}(\partial_{\gamma}W(\varepsilon(u),\ \gamma(u,\ w)))\right]d\Omega=0$$

$$\forall(v,\ z)\in\mathscr{V}_a\cap\mathscr{C}$$

同时，原变分问题（简称(PVP)）应为：

问题3(PVP)　对于任给的$\mathbf{v}\in\mathscr{U}_a\cap\mathscr{C}$，求$\mathbf{u}$使下式成立：

$$P(\mathbf{u})\leqslant P(\mathbf{v}),\qquad \forall\mathbf{v}\in\mathscr{U}_a\cap\mathscr{C}\tag{3.16}$$

定理1　对于任意给定的凹障碍函数ψ及外载系统$(\bar{p},\bar{q})$，问题(BCP)、(PVI)及(PVP)互为等价问题.

由于$P:\mathscr{U}_a\to\mathbf{R}$为一凸、下半连续函数，$\mathscr{C}$为一凸锥，根据[12]中的方法即可证明此定理.

四、对偶变分不等式

为求得总余能函数，此令：

$$J(\mathbf{u},\ \mathbf{e})=W(\mathbf{e})+F(\mathbf{u})$$

此处

$$F(\mathbf{u}):=\begin{cases}-(\mathbf{u},\ \bar{\mathbf{p}}), & \mathbf{u}\in\mathscr{U}_a\\ +\infty & \text{其他}\end{cases}$$

显然如果$\mathbf{u}\in\mathscr{U}_a$，$P(\mathbf{u})=J(\mathbf{u},\ \Lambda\mathbf{u})$. 因为$\mathbf{u}$的对偶变量应为$\mathbf{p}=\Lambda^*\mathbf{s}$，于是$J(\mathbf{u},\ \Lambda\mathbf{u})$的共轭函数应为：

$$\begin{aligned}J^*(-\Lambda^*\mathbf{s},\ \mathbf{s})&=\sup_{\mathbf{u}\in\mathcal{U}}\sup_{\mathbf{e}\in\mathcal{E}}\{(-\Lambda^*\mathbf{s},\ \mathbf{u})+\langle\mathbf{s},\ \mathbf{e}\rangle-J(\mathbf{u},\ \mathbf{e})\}\\&=\sup_{\mathbf{u}\in\mathcal{U}}\{(-\Lambda^*\mathbf{s},\ \mathbf{u})-F(\mathbf{u})\}+\sup_{\mathbf{e}\in\mathcal{E}}\{\langle\mathbf{s},\ \mathbf{e}\rangle-W(\mathbf{e})\}\\&=F^*(-\Lambda^*\mathbf{s})+W^*(\mathbf{s})\end{aligned}$$

此处

$$F^*(-\Lambda^*\mathbf{s})=\begin{cases}\int_0^L\psi(x)\left[\int_{-h}^h\frac{\partial\tau}{\partial x}dy+\bar{p}(x)\right]dx, & \mathbf{s}=(\sigma,\ \tau)^t\in\mathscr{S}_a\\ +\infty & \text{其他}\end{cases}$$

其中$\mathscr{S}_a\subset\mathscr{S}$为静力许可空间：

$$\mathscr{S}_a:=\left\{\mathbf{s}=(\sigma,\ \tau)^t\in\mathscr{S}\ \middle|\ -\int_{-h}^h\frac{\partial\tau}{\partial x}dy\geqslant\bar{p}(x),\ \forall x\in[0,\ L],\ \frac{\partial\sigma}{\partial x}+\frac{\partial\tau}{\partial y}=0,\right.$$

$$\left.\forall(x,\ y)\in\Omega,\ \tau(x,\pm h)=\bar{q}(x,\pm h),\ \forall x\in[0,L]\right\}\tag{4.1}$$

在交集$\mathscr{S}_a\cap\mathscr{K}$上，系统总余能函数$P^*(\mathbf{s})$可简单地表示为下式：

$$\begin{aligned}P^*(\mathbf{s}(\sigma,\ \tau))&=-F^*(-\Lambda^*\mathbf{s}(\sigma,\ \tau))-W^*(\mathbf{s}(\sigma,\ \tau))\\&=\int_0^L-\psi(x)\left[\int_{-h}^h\frac{\partial\tau}{\partial x}dy+\bar{p}(x)\right]dx-\int_{\Omega}\frac{1}{2}[E^{-1}\sigma^2+G^{-1}\tau^2]d\Omega\end{aligned}\tag{4.2}$$

于是我们有如下的对偶变分不等式（简称(DVI)）：

问题4(DVI)　在所有静力许可的应力场$\mathbf{s}=(\sigma,\ \tau)^t\in\mathscr{S}_a\cap\mathscr{K}$，寻找$\bar{\mathbf{s}}=(\bar{\sigma},\ \bar{\tau})^t$使得下

述不等式成立：

$$\int_{\Omega}[E^{-1}\bar{\sigma}(\sigma-\bar{\sigma})+G^{-1}(\tau-\bar{\tau})]d\Omega\geqslant\int_{\Omega}\psi(x)\frac{\partial}{\partial x}(\bar{\tau}-\tau)d\Omega$$

$$\forall(\sigma,\ \tau)\in\mathscr{S}_a\cap\mathscr{K} \tag{4.3}$$

这是个定义在凸子集上的二次变分不等式问题．与问题 2 相比容易发现对偶变分不等式要比原变分不等式简单得多．与此问题相关连的对偶变分问题（简称(DVP)）为一非线性优化问题：

问题5(DVP)　在所有静力许可场$\mathbf{t}\in\mathscr{S}_a$中，寻找$\mathbf{s}$使得下式成立：

$$P^*(\mathbf{s})\geqslant P^*(\mathbf{t}),\qquad\forall\mathbf{t}\in\mathscr{S}_a \tag{4.4}$$

定理2　对于任意给定的凹障碍函数$\psi(x)$及外载$(\bar{p},\ \bar{q})$，对偶变分不等式(DVI)及对偶变分问题(DVP)在有共同解集意义下互为等价．此解集中的任一元素同时也是二次互补性问题(BCP)的解．并且

$$\inf P(\mathbf{v})=\sup P^*(\mathbf{s}) \tag{4.5}$$

证明　首先我们证明(DVI)$\Leftrightarrow$(DVP)．因为$P^*:\mathscr{S}_a\to\mathbf{R}\cup\{-\infty\}$为一凹、上半连续函数，对于任意的Gâteaux微分$DP^*(\mathbf{s})\in\bar{\partial}P^*(\mathbf{s})$，(此处$\bar{\partial}P^*=-\partial(-P^*)$表示为$P^*$的超微分(over-differential)（参见[1]))，有

$$P^*(\mathbf{s})-P^*(\mathbf{t})\geqslant(-DP^*(\mathbf{s}),\ \mathbf{t}-\mathbf{s})\qquad\forall\mathbf{t}\in\mathscr{S}_a$$

容易证明

$$(-DP^*(\mathbf{s}),\ \mathbf{t}-\mathbf{s})\geqslant0\Leftrightarrow\langle\partial W^*(\mathbf{s}),\ \mathbf{t}-\mathbf{s}\rangle\geqslant F^*(-\Lambda^*\mathbf{s})-F^*(-\Lambda^*\mathbf{t})$$

$$\forall\mathbf{t}\in\mathscr{S}_a$$

由此可知若$\mathbf{s}\in\mathscr{S}_a\cap\mathscr{K}$为(DVI)的解，即有(DVI)$\Rightarrow$(DVP)．又因为$\mathscr{S}_a$为一凸子集，即对任意给定的$\theta\in[0,\ 1]$，有

$$\mathbf{s}\in\mathscr{S}_a,\quad\mathbf{t}\in\mathscr{S}_a,\quad\Rightarrow\theta\mathbf{s}+(1-\theta)\mathbf{t}\in\mathscr{S}_a$$

于是由(DVP)，应该得到：

$$P^*(\mathbf{s})\geqslant P^*(\theta\mathbf{t}+(1-\theta)\mathbf{s})=P^*(\mathbf{s}+\theta(\mathbf{t}-\mathbf{s}))\qquad\forall\theta\geqslant0$$

此即：

$$\frac{1}{\theta}[P^*(\mathbf{s}+\theta(\mathbf{t}-\mathbf{s}))-P^*(\mathbf{s})]\leqslant0,\qquad\forall\theta\geqslant0$$

令$\theta\to0^+$

$$0\geqslant\lim_{\theta\to0^+}\frac{1}{\theta}[P^*(\mathbf{s}+\theta(\mathbf{t}-\mathbf{s}))-P^*(\mathbf{s})]=(DP^*(\mathbf{s}),\ \mathbf{t}-\mathbf{s})$$

由此得证(DVP)$\Rightarrow$(DVI)．实际上，由于$P^*:\mathscr{S}_a\to\mathbf{R}\cup-\infty$为严格凹的，若$\mathscr{S}_a$为 Banach 空间中一闭的凸子集，则对偶问题(DVI)及(DVP)均有相同的唯一解．

现在则将证明对偶问题(DVP)的解同时也是二次互补性问题(BCP)的解．为此引入Lagrange乘子$(u(x,\ y),\ \omega(x))^t$以解除(DVP)中的静力许可约束，即得：

$$L(\mathbf{s},\ u,\omega)=\int_0^L-\psi\int_{-h}^{h}\left[\frac{\partial\tau}{\partial x}dy+\bar{p}(x)\right]dx-W^*(\mathbf{s}(\sigma,\ \tau))$$

$$-\int_{\Omega}u\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\frac{\partial\tau}{\partial y}\right)d\Omega-\int_0^L\omega\int_{-h}^{h}\left[\frac{\partial\tau}{\partial x}dy+\bar{p}(x)\right]dx$$

$$+\int_0^L u[\tau(x,\ \pm h)-\bar{q}(x,\ \pm h)]dx$$

于是(DVP)等价为下列鞍点问题：

$$\inf_{u\in\mathscr{H}_0^1(\Omega)} \inf_{\omega\geq 0} \sup_{s\in\mathscr{S}} L(s,\ u,\ \omega) \tag{4.6}$$

此鞍点问题的Karush-Kuhn-Tucker优化条件应为：

$$\left.\begin{array}{l} 0\in\bar{\partial}_s L(s,\ u,\ \omega) \\ \dfrac{\partial\sigma}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau}{\partial y}=0,\quad \tau(x,\ \pm h)=\bar{q}(x,\ \pm h) \\ w(x)-\psi(x)\geq 0,\quad \displaystyle\int_{-h}^{h}-\frac{\partial\tau}{\partial x}dy-\bar{p}(x)\geq 0 \\ \left(w(x)-\psi(x)\right)\left(\displaystyle\int_{-h}^{h}-\frac{\partial\tau}{\partial x}dy-\bar{p}(x)\right)=0 \end{array}\right\} \tag{4.7}$$

其中偏超微分$0\in\bar{\partial}_s L$给出下列本构关系：

$$\frac{\partial u}{\partial x}\in\partial_\sigma W^*(\sigma,\ \tau),\quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial(\psi+\omega)}{\partial x}\in\partial_\tau W^*(\sigma,\ \tau) \tag{4.8}$$

此表明鞍点问题(4.6)的解同时也满足(BCP)的全部方程和条件，并且$\omega=w-\psi$. 将$\omega=w-\psi$代入L中，利用Gauss-Green定理，即有：

$$L(s,\ u)=\langle\Lambda u,\ s\rangle-W^*(s)+F(u) \tag{4.9}$$

利用 Legendre-Fenchel变换，容易发现$\sup_s L(s,\ u)=P(u)$. 另一方面，如果$s\in\mathscr{S}_a$, $L(s,\ u)=P^*(s)$，于是有$\inf P=\inf\sup L=\sup P^*$. 证毕.

五、理想刚塑性梁及极限分析

此节中，我们将讨论在没有障碍物的情况下，此广义梁理论的极限分析问题的下限解. 今设外载$\bar{p}$比例于一正的比例因子$\nu_c>0$: $\bar{p}(x)=\nu p_0(x)$，此处$p_0=(0,0)^t$ (Ω中)，$p_0=(q_0(x),\ p_0(x))^t$ (在$y=h$上) 为一预先给定的单位载荷. 于是极限分析的目的即为寻找ν_c的临界值使得结构在极限载荷$\nu_c p_0$下产生塑性流动. 在此问题中，弹性变形可以忽略，材料可视为刚塑性介质. 为此互补性问题可以提出如下：

问题6 对于任意给定的$p_0(x)$，求$u=(u,\ w)^t\in\mathscr{U}_a$及$\nu_c>0$使得下列方程及条件成立：

(1) 几何方程：

$$e=\Lambda u,\quad 或\begin{pmatrix}\varepsilon\\ \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\partial/\partial x & 0\\ \partial/\partial y & \partial/\partial x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u(x,\ y)\\ w(x)\end{pmatrix}$$

(2) 本构方程：

$$e=\lambda\frac{\partial f(s)}{\partial s}\phi(f(s)),\quad 或\begin{cases}\varepsilon=\lambda[\partial f(s)/\partial\sigma]\phi(f(s))\\ \gamma=\lambda[\partial f(s)/\partial\tau]\phi(f(s))\end{cases}$$

(3) 平衡方程：

$$\Lambda^* s=\nu_c p_0,\quad 或\begin{cases}\displaystyle\int_{-h}^{h}-\frac{\partial\tau}{\partial x}dy=\nu_c p_0(x), & \forall x\in[0,\ L]\\ \dfrac{\partial}{\partial x}\sigma+\dfrac{\partial}{\partial y}\tau=0, & \forall(x,\ y)\in\Omega\\ \tau(x,\ h)=\nu_c q_0(x),\quad \tau(x,\ -h)=0, & \forall x\in[0,\ L]\end{cases}$$

(4) 互补性条件：

$$\lambda(\mathbf{e})\geqslant 0,\ f(\mathbf{s})\leqslant 0,\ \lambda(\mathbf{e})f(\mathbf{s})=0$$

此问题的系统总势能应为：

$$P(u,\ w)=\int_{\Omega}\sigma_b\sqrt{u_{,x}^2+\frac{1}{\alpha}(u_{,y}+w_{,x})^2}\,d\Omega-\nu_c\int_0^L(q_0u+p_0w)dx \tag{5.1}$$

现引入运动许可场$\mathscr{U}_l\subset\mathscr{U}_a$：

$$\mathscr{U}_l=\{\mathbf{u}=(u,\ w)^t\in\mathscr{U}_a\,|\int_0^L(q_0u+p_0w)dx=1\} \tag{5.2}$$

并定义：

$$\nu^+(u,\ w)=\int_{\Omega}\sigma_b\sqrt{u_{,x}^2+\frac{1}{\alpha}(u_{,y}+w_{,x})^2}\,d\Omega \tag{5.3}$$

于是由原变分问题，我们有下列上限定理：

定理3 对于任意给定的运动许可场 $\mathbf{u}=(u,\ w)^t\in\mathscr{U}_l$，$\nu^+(\mathbf{u})$为极限载荷因子$\nu_c$的上限，即：

$$\nu_c\leqslant\nu^+(\mathbf{u}),\qquad\forall\,\mathbf{u}\in\mathscr{U}_l \tag{5.4}$$

并且

$$\nu_c=\inf_{\mathbf{u}\in\mathscr{U}_l}\nu^+(\mathbf{u}) \tag{5.5}$$

在工程设计中，极限分析的下限解往往更为重要。为此，我们引入静力许可场$\mathscr{S}_l$：

$$\mathscr{S}_l=\Big\{\mathbf{s}=(\sigma,\ \tau)^t\in\mathscr{S}\,|-\int_{-h}^{h}\frac{\partial\tau}{\partial x}dy=\nu_sp_0(x),\ \tau(x,\ h)=\nu_sq_0(x),\ \forall x\in[0,L],$$
$$\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\frac{\partial\tau}{\partial y}=0,\ \forall(x,\ y)\in\Omega,\ \tau(x,\ -h)=0,\ \forall x\in[0,\ L]\Big\} \tag{5.6}$$

其中$\nu_s(\mathbf{s})>0$为一静力许可因子，可由平衡方程$\Lambda^*\mathbf{s}=\nu_s\mathbf{p}_0$求得。利用Legendre-Fenchel变换，可得：

$$\begin{aligned}\nu^-(\mathbf{s})&=-\sup_{\mathbf{e}\in\mathscr{E}}\sup_{(u,w)\in\mathscr{U}_l}\{(-\Lambda^*\mathbf{s},\ \mathbf{u})+\langle\mathbf{s},\ \mathbf{e}\rangle-\nu^+(\mathbf{e})\}\\&=-\sup_{(u,w)\in\mathscr{U}_l}(-\Lambda^*\mathbf{s},\ \mathbf{u})-\sup_{\mathbf{e}\in\mathscr{E}}\{\langle\mathbf{s},\ \mathbf{e}\rangle-W_p(\mathbf{e})\}\\&=\begin{cases}\nu_s(\mathbf{s})-W_p^*(\mathbf{s}), & \Lambda^*\mathbf{s}-\nu_s\mathbf{p}_0(x)=0\\-\infty, & \text{其他}\end{cases}\end{aligned}$$

于是有下列极限分析的下限定理：

定理4 对于任意给定的静力许可场$\mathbf{t}\in\mathscr{S}_l$，$\nu^-(\mathbf{t})$为极限载荷因子$\nu_c$的下限，即：

$$\nu_c\geqslant\nu^-(t),\qquad\forall t\in\mathscr{S}_l \tag{5.7}$$

并且

$$\nu_c=\inf\nu^-(t),\qquad\forall t\in\mathscr{S}_l \tag{5.8}$$

证明 令$\mathbf{s}$及其关联的$\mathbf{u}$为问题 6 的解。利用$W^*(\mathbf{s})$的凸性，有：

$$\begin{aligned}W^*(\mathbf{t})-W^*(\mathbf{s})&\geqslant\langle\Lambda\mathbf{u},\ \mathbf{t}-\mathbf{s}\rangle=(\mathbf{u},\ \Lambda^*\mathbf{t}-\mathbf{s})\\&=(\nu_s(\mathbf{t})-\nu_c)(\mathbf{p}_0,\ \mathbf{u}),\qquad\forall\,\mathbf{t}\in\mathscr{S}_l\end{aligned}$$

因为$(\mathbf{p}_0,\ \mathbf{u})=1$及$W^*(\mathbf{s})=0$，于是得到：

$$\nu_c\geqslant\nu_s(\mathbf{t})-W^*(t)+W^*(\mathbf{s})=\nu^-(t),\qquad\forall t\in\mathscr{S}_l$$

由此定理 4 得证。

由于在凸集$\mathscr{K}$上，塑性超势$W_p^*(\mathbf{s})=0$，于是有：

$$\nu^-(\sigma,\ \tau)=\nu_s(\sigma,\ \tau) \tag{5.9}$$

由定理 4 可得如下结果：

定理5 对于任意给定的静力许可场$\mathbf{s}=(\sigma,\ \tau)^t$使得下列关系式成立：

$$-\int_{-h}^{h}\frac{\partial\tau}{\partial x}dy=\nu_s p_0(x),\qquad \forall x\in[0,\ L] \tag{5.10}$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\frac{\partial\tau}{\partial y}=0,\ \forall(x,\ y)\in\Omega \tag{5.11}$$

$$\tau(x,\ h)=\nu_s q_0(x),\quad \tau(x,\ -h)=0,\qquad \forall x\in[0,\ L] \tag{5.12}$$

$$\sqrt{\sigma^2+\alpha\tau^2}-\sigma_b\leqslant 0,\qquad \forall(x,\ y)\in\Omega \tag{5.13}$$

$\nu_s(\mathbf{s})$为极限载荷因子ν_o的下限，即

$$\nu_o\geqslant\nu_s(\mathbf{s}),\qquad \forall\mathbf{s}\in\mathscr{S}_l\cap\mathscr{K}$$

此式为一同时具有等式及不等式约束的优化问题．其中的屈服条件可根据塑性超势$W_p^*(\sigma,\ \tau)$的不同构造而得以解除（参见[7，8]）．如果我们令

$$\sigma=\nu_s\sigma_0,\quad \tau=\nu_s\tau_0 \tag{5.14}$$

此处σ_0及τ_0为平衡于单位外载$(p_0,\ q_0)$的静力许可场．于是根据[7]中所提出的一般性定理，有如下结果：

定理6 对于任意给定的$(\sigma_0(x,\ y),\ \tau_0(x,\ y))\in\mathscr{S}$，使得下列条件成立：

$$\left.\begin{aligned}&-\int_{-h}^{h}\frac{\partial\tau_0}{\partial x}dy=p_0,\ \ \tau_0(x,\ h)=q_0,\ \ \tau_0(x,\ -h)=0,\qquad \forall x\in[0,\ L]\\&\frac{\partial\sigma_0}{\partial x}+\frac{\partial\tau_0}{\partial y}=0,\qquad \forall(x,\ y)\in\Omega\end{aligned}\right\} \tag{5.15}$$

则由

$$\nu_s=\frac{\sigma_b}{\max_{(x,y)\in\Omega}\sqrt{\sigma_0^2(x,\ y)+\alpha\tau_0^2(x,\ y)}} \tag{5.16}$$

定义的载荷因子ν_s必为极限分析的下限解，即$\nu_s\leqslant\nu_o$．

证明 对于任意给定的$\mathbf{s}=\nu_s(\sigma_0,\ \tau_0)^t$，

$$\begin{aligned}\sqrt{\sigma^2(x,\ y)+\alpha\tau(x,\ y)}&=\nu_s\sqrt{\sigma_0^2(x,\ y)+\alpha\tau_0^2(x,\ y)}\\&=\frac{\sigma_b\sqrt{\sigma_0^2(x,\ y)+\alpha\tau_0^2(x,\ y)}}{\max_{(x,y)\in\Omega}\sqrt{\sigma_0^2(x,\ y)+\alpha\tau_0^2(x,\ y)}}\leqslant\sigma_b\qquad \text{a.e. }\Omega\text{中}\end{aligned}$$

于是由定理 5 即知由(5.16)式定义的ν_s为一下限因子．证毕．

六、简　　例

今考虑一双端简支的梁，在其顶部作用一垂直外载$p_0(x)=\sin(x\pi/L)$ ($y=h$上)．与此关连的静力场应为：

$$\sigma_0(x,\ y)=\frac{L^2}{8h^2}\sin\frac{x\pi}{L}\sin\frac{y\pi}{2h},\ \ \tau_0(x,\ y)=\frac{L}{4h}\cos\frac{x\pi}{L}\cos\frac{y\pi}{2h} \tag{6.1}$$

易知其满足于平衡方程(5.15)．于是由下限定理求得：

$$\nu_s = \frac{8h^2\sigma_b}{L^2 \max_{(x,y)\in[0,L]\times[-h,h]} \sqrt{\sin^2\frac{x\pi}{L}\sin^2\frac{y\pi}{2h}+\frac{4h^2\alpha}{L^2}\cos^2\frac{x\pi}{L}\cos^2\frac{y\pi}{2h}}}$$

显然，如果$4h^2\alpha/L^2<1$，问题

$$\max_{(x,y)\in[0,L]\times[-h,h]} \sqrt{\sin^2\frac{x\pi}{L}\sin^2\frac{y\pi}{2h}+\frac{4h^2\alpha}{L^2}\cos^2\frac{x\pi}{L}\cos^2\frac{y\pi}{2h}}$$

的解应为：$(x,\ y)=(L/2,\ \pm h)$. 由此下限定理给出：

$$\nu_s=8h^2\sigma_b/L^2$$

对于同样给定的应力场，而经典梁的下限解为$\pi^2h^2\sigma_b/L^2$. 显然此大于ν_s. 由于考虑剪切变形，广义梁的极限承载能力显然要较经典梁为弱. 文[10]中给出了此广义梁的弹性解与Timoshenko梁和经典梁的比较.

参 考 文 献

[1] J. P. Aubin, *Applied Functional Analysis*, Wiley-Intersicence, New York (1979).

[2] G. Allen, Variational inequalities, complementarity problems, and duality theorems, *J. Math. Analy. Appl.*, 58 (1977), 1—10.

[3] J. Chakrabarty, *Theory of Plasticity*, McGraw-Hill Book Company (1987), 791.

[4] I. Ekeland and R. Temam, *Convex Analysis and Variational Problems*, North-Holland (1976).

[5] G. Fichera, Existence theorems in elasticity-boundary value problems of elasticity with unilateral constraints, in *Encyclopedia of Physics*, Ed. by S. Flügger, Vol. Ⅵ a/2, *Mechanics of Solids* (Ⅱ), Ed. by C. Truesdell, Springer Verlag (1972), 347—427.

[6] 高扬，凸分析及塑性力学的数学理论，《现代数学与力学》，郭仲衡编，北京大学出版社 (1987), 165—185.

[7] Y. Gao, On the complementary bounding theory for limit analysis, *Int. J. Solids Structures*, 24 (1988), 545—556.

[8] Y. Gao, Panpenalty finite element programming for limit analysis, *Computers & Structures*, 28 (1988), 749—755.

[9] David Yang Gao and David L. Russell, A finite element approach to optimal control of a "smart" beam, in *Int. Conf. Computational Methods in Structural and Geotechnical Engineering*, Ed. by P.K.K.Lee, L.G.Tham and Y.K.Cheung, December 12—14, 1994, Hong Kong (1994), 135—140.

[10] David Yang Gao and David L. Russell, An extended beam theory for smart materials applications, Part Ⅰ. Extended beam models, duality theory and finite element simulations, *J. Applied Math. and Optimization*, 34(3) (1996).

[11] R. Glowinski, K. L. Lions and R. Trémoliéres, *Numerical Analysis of Variational Inequalities*, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford (1981).

[12] S. Karamardian, Generalized complememtarity problems, *J. of Optimization Theory and Applications*, 6(19) (1971), 161—168.

[13] N. Kikuchi and J.T. Oden, *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, SIAM, Philadephia (1988), 495.

[14] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia, *An Introduction to Variational Inequali-*

ties and Their Applications, Academic Press, New York (1980).

[15] A. Klarbring, A. Mikelić and M. Shillor, Duality applied to contact problems with friction, *Appl. Math. Optim.*, 22 (1990), 211—226.

[16] J. Lovisek, Duality in the obstacle and unilateral problem for the biharmonic operator, *Aplikace Matematiky*, Svazek, 26 (1981), 291—303.

[17] U. Mosco, Dual variational inequalities, *J. Math. Analy. Appl.*, 40 (1972), 202—206.

[18] S.T. Yau and Y. Gao, Obstacle problem for von Kármàn equations, *Adv. Appl. Math.*, 13 (1992), 123—141.

Contact Problems and Dual Variational Inequality of 2-D Elastoplastic Beam Theory

David Yang Gao

(*Department of Mathematics, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA* 24061, *U.S.A. E-mail: gao @ math. vt. edu*)

Abstract

In order to study the frictional contact problems of the elastoplastic beam theory, an extended two-dimensional beam model is established, and a second order nonlinear equilibrium problem with both internal and external complementarity conditions is proposed. The external complementarity condition provides the free boundary condition, while the internal complementary condition gives the interface of the elastic and plastic regions. We prove that this bicomplementarity problem is equivalent to a nonlinear variational inequality. The dual variational inequality is also developed. It is shown that the dual variational inequality is much easier than the primal variational problem. Application to limit analysis is illustrated.

Key words complementarity problems, variational inequality, duality theory, elastoplastic beam, contact problem