ISSN 1000-0887
CODEN YSHLEM

应用数学和力学

Applied Mathematics and Mechanics

工程索引(EI)及我国力学类、数学类、物理学类核心期刊

纪念郭仲衡教授逝世三周年特刊

交通部重庆交通学院主办
重 庆 出 版 社 出 版

第17卷 1996年 第10期

ISSN 1000-0887

应用数学和力学，第17卷 第10期（1996年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

线性双空间张量方程$\Phi_{ij}A^iXB^j=C$

陈玉明[1] 肖 衡[2] 李建波[3]

（郑泉水推荐，1996年2月16日收到）

摘 要

本文在对系数张量的特征值不作任何限制的条件下，得到了一类线性双空间张量方程的显式解。这类方程包含了许多经常遇到的方程作为其特例。

关键词 张量方程 双空间张量 方张量积

一、引 言

矩阵方程

$$AX-XB=C \tag{1.1}$$

已知A，B和C求解X的问题，已成为许多研究的主题。其中A和B分别为$m\times m$和$n\times n$阶方阵，X和 C 是 $m\times n$ 阶矩阵。在文献[1～28]中，可以找到关于解的存在性的充分和必要条件，以及解的各种各样的表达式。但几乎所有的结果是在A与B无公共特征值的条件下获得的。

在本文中，我们将放弃无公共特征值这一条件，并利用所提出的双空间张量技巧，来透彻地研究如本文(4.1)式将详细描述的更一般的方程。它包含了许多经常遇见的方程作为特例。我们将在对A与B的特征值不加任何条件的情况下，得到方程的内禀形式的显式解。

二、准备知识

设$\mathscr{U}$和$\mathscr{V}$分别是实数域$\mathscr{R}$上的m-维和n-维内积空间，其中内积由相应空间中向量的点积来定义。分别以$\mathrm{Lin}(\mathscr{U})$和 $\mathrm{Sym}(\mathscr{U})$表示$\mathscr{U}$上的全体2-阶张量和对称 2-阶张量，且分别以黑体小写拉丁字母及黑体大写拉丁字母表示向量和2-阶张量。例如，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}\in\mathscr{U}$；$\boldsymbol{b},\boldsymbol{v},\boldsymbol{y}\in\mathscr{V}$；$\boldsymbol{A},\boldsymbol{P}\in\mathrm{Lin}(\mathscr{U})$；$\boldsymbol{B},\boldsymbol{Q}\in\mathrm{Lin}(\mathscr{V})$。特别地，$\boldsymbol{I}_u,\boldsymbol{O}_u\in\mathrm{Lin}(\mathscr{U})$是$\mathscr{U}$上的恒同张量和零张量。在本文中，我们将使用以下约定：

i) 同一空间上两个并置向量或2-阶张量表示它们间的点积，例如，$\boldsymbol{au}\in\mathscr{R}$；$\boldsymbol{BQ}\in$

1 湖南大学应用数学系，长沙 410082

2 北京大学数学系，北京 100871

3 美国肯塔基大学数学系，勒星顿 KY 40506-0027

$\mathrm{Lin}(\mathscr{V})$.事实上，最后一个运算就是线性映射$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{Q}$的复合.

ii) 一个2-阶张量与一个向量的并置，例如$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}\in\mathscr{U}$，表示由点积所定义的线性算子$\boldsymbol{A}$对$\boldsymbol{u}$的作用.

设$\{\lambda_1,\cdots,\lambda_r\}$和$\{\mu_1,\cdots,\mu_s\}$($r\leqslant m$, $s\leqslant n$)分别为$\boldsymbol{A}\in\mathrm{Sym}(\mathscr{U})$和$\boldsymbol{B}\in\mathrm{Sym}(\mathscr{V})$的互不相同的特征值，它们的重数分别为$\{m_1,\cdots,m_r\}$和$\{n_1,\cdots,n_s\}$. 显然有

$$\sum_{\alpha=1}^{r}m_\alpha=m,\quad \sum_{\beta=1}^{s}n_\beta=n \tag{2.1}$$

$\boldsymbol{A}$的m个特征值和$\boldsymbol{B}$的n个特征值(一p重特征值看作p个特征值)以及相应的正交归一特征向量组（称为$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的特征基）分别以以下有序集表示:

$$(\lambda_{11},\cdots,\lambda_{1m_1};\cdots;\lambda_{\alpha1},\cdots,\lambda_{\alpha m_\alpha};\cdots;\lambda_{r1},\cdots,\lambda_{rm_r}) \tag{2.2}$$

$$(\boldsymbol{u}_{11},\cdots,\boldsymbol{u}_{1m_1};\cdots;\boldsymbol{u}_{\alpha1},\cdots,\boldsymbol{u}_{\alpha m_\alpha};\cdots;\boldsymbol{u}_{r1},\cdots,\boldsymbol{u}_{rm_r}) \tag{2.3}$$

$$(\mu_{11},\cdots,\mu_{1n_1};\cdots;\mu_{\beta1},\cdots,\mu_{\beta n_\beta};\cdots;\mu_{s1},\cdots\mu_{sn_s}) \tag{2.4}$$

$$(\boldsymbol{v}_{11},\cdots,\boldsymbol{v}_{1n_1};\cdots;\boldsymbol{v}_{\beta1},\cdots,\boldsymbol{v}_{\beta n_\beta};\cdots;\boldsymbol{v}_{s1},\cdots,\boldsymbol{v}_{sn_s}) \tag{2.5}$$

定义2.1 $\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$分别诱导出以下r和s个特征投影:

$$\boldsymbol{P}_\alpha:=\sum_{\sigma=1}^{m_\alpha}\boldsymbol{u}_{\alpha\sigma}\otimes\boldsymbol{u}_{\alpha\sigma}\qquad(\alpha=1,2,\cdots,r) \tag{2.6}$$

$$\boldsymbol{Q}_\beta:=\sum_{\tau=1}^{n_\beta}\boldsymbol{v}_{\beta\tau}\otimes\boldsymbol{v}_{\beta\tau}\qquad(\beta=1,\cdots,s) \tag{2.7}$$

它们具有以下的正交性质:

$$\boldsymbol{P}_\sigma\boldsymbol{P}_\alpha=\begin{cases}\boldsymbol{P}_\alpha, & \sigma=\alpha,\\ \boldsymbol{O}_{\mathscr{U}}, & \sigma\neq\alpha;\end{cases}\quad \boldsymbol{Q}_\tau\boldsymbol{Q}_\beta=\begin{cases}\boldsymbol{Q}_\beta, & \tau=\beta\\ \boldsymbol{O}_{\mathscr{V}}, & \tau\neq\beta\end{cases} \tag{2.8}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{r}\boldsymbol{P}_\alpha=\boldsymbol{I}_{\mathscr{U}},\quad \sum_{\beta=1}^{s}\boldsymbol{Q}_\beta=\boldsymbol{I}_{\mathscr{V}};\quad \boldsymbol{A}=\sum_{\alpha=1}^{r}\lambda_\alpha\boldsymbol{P}_\alpha,\quad \boldsymbol{B}=\sum_{\beta=1}^{s}\mu_\beta\boldsymbol{Q}_\beta \tag{2.9}$$ □

对一给定的α，将

$$\boldsymbol{A}-\lambda_\beta\boldsymbol{I}=\sum_{\sigma=1}^{r}(\lambda_\sigma-\lambda_\beta)\boldsymbol{P}_\sigma$$

代入以下连乘可得

$$\prod_{\beta\neq\alpha}(\boldsymbol{A}-\lambda_\beta\boldsymbol{I})=\prod_{\beta\neq\alpha}\left[\sum_{\sigma=1}^{r}(\lambda_\sigma-\lambda_\beta)\boldsymbol{P}_\sigma\right]$$

$$=\prod_{\beta\neq\alpha}(\lambda_\alpha-\lambda_\beta)\boldsymbol{P}_\alpha=p_\alpha\boldsymbol{P}_\alpha \tag{2.10}$$

其中

$$p_\alpha=\prod_{\beta\neq\alpha}(\lambda_\alpha-\lambda_\beta)\neq0 \tag{2.11}$$

且乘积号下“$\beta\neq\alpha$”表示乘积指标β取值为$1,2,\cdots,\alpha-1,\alpha+1,\cdots,r$. 这里我们利用了特征投影的正交性(2.8)、(2.9)，因此，

$$P_\alpha=\frac{1}{p_\alpha}\prod_{\sigma\neq\alpha}(A-\lambda_\sigma I)=\frac{1}{p_\alpha}\sum_{p=0}^{r-1}I^\alpha_{r-1-p}A^p \tag{2.12}$$

后一等式是连乘号直接展开所得，式中

$$I^\alpha_0=1,\ I^\alpha_p=(-1)^p\sum_{\substack{1\leq\sigma_1<\cdots<\sigma_p\leq r\\ \sigma_1,\cdots,\sigma_p\neq\alpha}}\lambda_{\sigma_1}\cdots\lambda_{\sigma_p}\qquad(p=1,\cdots,r-1) \tag{2.13}$$

注意到$\{I^\alpha_p\}$为一具特征值为$\lambda_1,\cdots,\lambda_{\alpha-1},\lambda_{\alpha+1},\cdots,\lambda_r$的$(r-1)$-维空间上的2-张量的特征多项式的系数。

类似，对$B\in\mathrm{Sym}(\mathscr{V})$有：

$$Q_\beta=\frac{1}{q_\beta}\prod_{\tau\neq\beta}(B-\mu_\tau I)=\frac{1}{q_\beta}\sum_{q=0}^{s-1}J^\beta_{s-1-q}B^q \tag{2.14}$$

$$q_\beta=\prod_{\tau\neq\beta}(\mu_\beta-\mu_\tau)\neq0 \tag{2.15}$$

$$J^\beta_0=1,\ J^\beta_q=(-1)^q\sum_{\substack{1\leq\tau_1<\cdots<\tau_q\leq s\\ \tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_q\neq\beta}}\mu_{\tau_q}\cdots\mu_{\tau_q}\qquad(q=1,\cdots,s-1) \tag{2.16}$$

三、双空间张量和方张量积

定义3.1 一双空间张量X是一双线性函数

$$X:\mathscr{U}\times\mathscr{V}\to\mathscr{R}:(u,v)\mapsto X(u,v) \tag{3.1}$$□

下面，张量积“⊗”被推广至来自两个空间的向量。

定义3.2 $\forall a\in\mathscr{U},b\in\mathscr{V}$，张量积$a\otimes b$是如下定义的一个双空间张量：

$$a\otimes b:(u,v)\mapsto(au)bv)\in\mathscr{R} \tag{3.2}$$□

显然，由定义可知⊗为一双线性运算。通过$\mathscr{V}$上的点积，一双空间张量同时也可看成为从$\mathscr{V}$到$\mathscr{U}$的一个线性变换，例如，

$$X:\mathscr{V}:\to\mathscr{U}:v\mapsto Xv \tag{3.3}$$

特别地，我们有

$$(a\otimes b)v=(bv)a \tag{3.4}$$

为简单起见，由(3.1)所定义的所有双空间张量组成的集合$\mathrm{Lin}(\mathscr{V};\mathscr{U})$简记作$\mathscr{W}$。在通常的加法、标量乘积以及通过双点积定义的内积下，如

$$(a\otimes b):(u\otimes v)=(au)(bv)\qquad\forall a,u\in\mathscr{U};\ b,v\in\mathscr{V} \tag{3.5}$$

$\mathscr{W}$是一内积空间。A与B的特征基(2.3)、(2.5)诱导出一含mn个简单的双空间张量的集合

$$\{u_{\alpha\sigma}\otimes v_{\beta\tau}|\alpha=1,\cdots,r,\sigma=1,\cdots,m_\alpha;\ \beta=1,\cdots,s,\tau=1,\cdots,n_\beta\} \tag{3.6}$$

由于

$$(u_{\alpha\sigma}\otimes v_{\beta\tau}):(u_{\alpha'\tau'}\otimes v_{\beta'\tau'})=\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\sigma\sigma'}\delta_{\beta\beta'}\delta_{\tau\tau'}$$

故集合(3.6)是$\mathscr{W}$的一正交归一基。

引进$\mathscr{W}$的以下子空间$\mathscr{W}_{\alpha\beta}(\alpha=1,\cdots,r;\ \beta=1,\cdots,s)$：

$$\mathscr{W}_{\alpha\beta}:=\mathrm{span}\{u_{\alpha\sigma}\otimes v_{\beta\tau}|\sigma=1,\cdots,m_\alpha;\ \tau=1,\cdots,n_\beta\},\ \dim\mathscr{W}_{\alpha\beta}=m_\alpha n_\beta \tag{3.7}$$

我们有

$$\mathscr{W}=\bigoplus_{\alpha=1}^{r}\bigoplus_{\beta=1}^{s}\mathscr{W}_{\alpha\beta},\quad \dim\mathscr{W}=\sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{\beta=1}^{s}m_\alpha n_\beta=mn \tag{3.8}$$

从$\mathscr{W}$到$\mathscr{W}$的一个线性变换通常以一黑正体大写拉丁字母，如F，来表示．所有这种变换构成的集合记作Lin．由双点积定义的$\mathsf{F}\in$Lin对一双空间张量如$\boldsymbol{W}\in\mathscr{W}$的作用以它们的并置来表示，此时为$\mathsf{F}\boldsymbol{W}$．

我们引进以下定义．

定义3.3 双线性映射

$$\boxtimes:\mathrm{Lin}(\mathscr{U})\times\mathrm{Lin}(\mathscr{V})\to\mathsf{Lin}:(\boldsymbol{S},\boldsymbol{T})\mapsto\boldsymbol{S}\boxtimes\boldsymbol{T} \tag{3.9}$$

由下式定义：

$$(\boldsymbol{S}\boxtimes\boldsymbol{T})\boldsymbol{X}:=\boldsymbol{S}\boldsymbol{X}\boldsymbol{T}^T,\qquad\forall\boldsymbol{X}\in\mathscr{W} \tag{3.10}$$

$\boldsymbol{S}\boxtimes\boldsymbol{T}\in$Lin叫做$\boldsymbol{S}$与$\boldsymbol{T}$的方张量积（或Kronecker积）． □

特别地，我们有

$$(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{u})\boxtimes(\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})\otimes(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}) \tag{3.11}$$

因为$\forall\boldsymbol{x}\times\mathscr{U}$，$\boldsymbol{y}\in\mathscr{V}$有

$$[(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{u})\boxtimes(\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{v})](\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{u})(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y})(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b})[(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{v}):(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y})]$$

注意(3.11)式左端的从$\mathscr{W}\to\mathscr{W}$的线性变换是由两个$\mathscr{V}\to\mathscr{U}$的线性变换的张量积表示的．

定义3.4 Lin中的rs元素（$\alpha=1,\cdots,r$；$\beta=1,\cdots,s$）

$$\mathsf{P}_{\alpha\beta}:=\boldsymbol{P}_\alpha\boxtimes\boldsymbol{Q}_\beta=\sum_{\sigma=1}^{m_\alpha}\sum_{\tau=1}^{n_\beta}(\boldsymbol{u}_{\alpha\sigma}\otimes\boldsymbol{v}_{\beta\tau})\otimes(\boldsymbol{u}_{\alpha\sigma}\otimes\boldsymbol{v}_{\beta\tau}):\mathscr{W}\to\mathscr{W}_{\alpha\beta} \tag{3.12}$$

称为由$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$所诱导的二次特征投影，它们具有以下性质：

$$\mathsf{P}_{\alpha\beta}\boldsymbol{W}=\begin{cases}\boldsymbol{W}, & \boldsymbol{W}\in\mathscr{W}_{\alpha\beta}\\ \boldsymbol{O}_{\mathscr{W}}, & \boldsymbol{W}\in\mathscr{W}^{\perp}_{\alpha\beta}\end{cases} \tag{3.13}$$

$$\mathsf{P}_{\sigma\tau}\mathsf{P}_{\alpha\beta}=\begin{cases}\mathsf{P}_{\alpha\beta}, & \sigma=\alpha,\ \tau=\beta,\\ \mathsf{0} & \text{其他；}\end{cases}\qquad\sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{\beta=1}^{s}\mathsf{P}_{\alpha\beta}=\mathsf{I} \tag{3.14}$$

其中，$\mathsf{0}$与I分别为Lin中的零元和单位元．在(3.13)中，$\mathscr{W}^{\perp}_{\alpha\beta}$是$\mathscr{W}_{\alpha\beta}$相对于$\mathscr{W}$上的内积的正交补．

四、双空间张量方程

考察作为基本方程(1.1)的一般化的下述方程：

$$\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{s-1}\phi_{ij}\boldsymbol{A}^i\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^j=\boldsymbol{C} \tag{4.1}$$

其中$\{\phi_{ij}\}$可以是对称系数张量$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$的主不变量的任意标量值函数．为将双空间张量方程(4.1)变成$\mathscr{W}$上一个向量方程，我们引进一由(4.1)的左边所诱导的$\mathscr{W}$上的线性变换．

定理4.1 设$\boldsymbol{A}\in\mathrm{Sym}(\mathscr{U})$，$\boldsymbol{B}\in\mathrm{Sym}(\mathscr{V})$，由方程(4.1)可诱导出$\mathscr{W}$上一线性对称变换$\mathsf{F}$：

$$\mathsf{F}:\mathscr{W}\to\mathscr{W}:X\mapsto\mathsf{F}X:=\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{s-1}\phi_{ij}A^iXB^j \tag{4.2}$$

且F有谱表示

$$\mathsf{F}=\sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{\beta=1}^{s}\Lambda_{\alpha\beta}\mathsf{P}_{\alpha\beta} \tag{4.3}$$

其中特征值$\Lambda_{\alpha\beta}$由

$$\Lambda_{\alpha\beta}=\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{s-1}\phi_{ij}\lambda_\alpha^i\mu_\beta^\alpha \qquad (\alpha=1,\cdots,r;\ \beta=1,\cdots,s) \tag{4.4}$$

给出. □

证明 考虑到定义(4.2)，F显然为一线性映射，即 $\mathsf{F}\in\mathrm{Lin}$. 由以下事实可得出$\mathsf{F}$的对称性. $\forall X,Y\in\mathscr{W}$,

$$Y\mathsf{F}X=Y:\left(\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{s-1}\phi_{ij}A^iXB^j\right)=X:\left(\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{s-1}\phi_{ij}A^iYB^j\right)=X\mathsf{F}Y$$

考虑到

$$A^i=\sum_{\alpha=1}^{r}\lambda_\alpha^i P_\alpha,\quad B^j=\sum_{\beta=1}^{s}\mu_\beta^j Q_\beta$$

并利用方张量积的定义式(3.10)，我们可以得到

$$\mathsf{F}=\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{s-1}\phi_{ij}\left[\left(\sum_{\alpha=1}^{r}\lambda_\alpha^i P_\alpha\right)\boxtimes\left(\sum_{\beta=1}^{s}\mu_\beta^j Q_\beta\right)\right]$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{\beta=1}^{s}\left(\sum_{i=0}^{r-1}\sum_{j=0}^{s-1}\phi_{ij}\lambda_\alpha^i\mu_\beta^j\right)(P_\alpha\boxtimes Q_\beta)$$

由(3.12)及(4.4)我们就证明了(4.3)式.

如果没有特征值$\Lambda_{\alpha\beta}$为零，则F是可逆的. 否则，F为退化的. 一般地，我们有

$$\mathscr{W}=\mathrm{Im}\mathsf{F}\oplus\mathrm{Ker}\mathsf{F} \tag{4.5}$$

其中

$$\mathrm{Im}\mathsf{F}=\bigoplus_{\Lambda_{\alpha\beta}\neq 0}\mathscr{W}_{\alpha\beta},\quad \mathrm{Ker}\mathsf{F}=\bigoplus_{\Lambda_{\alpha\beta}=0}\mathscr{W}_{\alpha\beta} \tag{4.6}$$

这里以及以后，求和号下的条件“$\Lambda_{\alpha\beta}\neq 0$”或“$\Lambda_{\alpha\beta}=0$”表示求和对满足以上条件的$\alpha$与$\beta$进行. 对于一可逆的$\mathsf{F}$，$\mathrm{Ker}\mathsf{F}=\{O_{\mathscr{W}}\}$

F在$\mathrm{Im}\mathsf{F}$上的限制

$$\mathsf{F}_{\mathrm{Im}}:=\mathsf{F}|\mathrm{Im}\mathsf{F}=\sum_{\Lambda_{\alpha\beta}\neq 0}\Lambda_{\alpha\beta}\mathsf{P}_{\alpha\beta} \tag{4.7}$$

是$\mathrm{Im}\mathsf{F}$上一同构，且其逆为

$$\mathsf{F}_{\mathrm{Im}}^{-1}=\sum_{\Lambda_{\alpha\beta}\neq 0}\Lambda_{\alpha\beta}^{-1}\mathsf{P}_{\alpha\beta} \tag{4.8}$$

以下结果是显然的.

定理4.2 双空间张量方程(4.1)，即$\mathscr{W}$上的向量方程

$$\mathbf{F}X=C \tag{4.9}$$

有解当且仅当$C\in\mathrm{Im}\mathbf{F}$，i.e.

$$C\in\bigoplus_{\Lambda_{\alpha\beta}\neq 0}\mathscr{W}_{\alpha\beta}$$

或者等价地，

$$\sum_{\Lambda_{\alpha\beta}=0}\mathbf{P}_{\alpha\beta}C=O_{\mathscr{W}},\quad \sum_{\Lambda_{\alpha\beta}=0}P_{\alpha}CQ_{\beta}=O_{\mathscr{W}},\quad \sum_{p=0}^{r-1}\sum_{q=0}^{s-1}\rho_{pq}A^{p}CB^{q}=O_{\mathscr{W}} \tag{4.10a,b,c}$$

其中

$$\rho_{pq}=\sum_{\Lambda_{\alpha\beta}=0}\frac{I^{\alpha}_{r-1-p}J^{\beta}_{s-1-q}}{p_{\alpha}q_{\beta}} \tag{4.11}$$ □

公式(4.10c)和(4.11)是将(2.12)及(2.14)代入(4.10b)所直接得到的．条件(4.10a)也等价于“对任何满足$\Lambda_{\alpha\beta}=0$的α和β有$\mathbf{P}_{\alpha\beta}C=O_{\mathscr{W}}$”．

定理4.3　对任一满足定理4.2中条件的$C\in\mathscr{W}$，方程(4.1)的一般解为：

$$X=X^{\mathrm{Im}}+X^{\mathrm{Ker}},\qquad \forall X^{\mathrm{Ker}}\in\mathrm{Ker}\mathbf{F} \tag{4.12}$$

其中

$$X^{\mathrm{Im}}=\mathbf{F}^{-1}_{\mathrm{Im}}C=\sum_{\Lambda_{\alpha\beta}\neq 0}\Lambda^{-1}_{\alpha\beta}P_{\alpha}CQ_{\beta}=\sum_{p=0}^{r-1}\sum_{q=0}^{s-1}\varepsilon_{pq}A^{p}CB^{q} \tag{4.13}$$

$$\varepsilon_{pq}=\sum_{\Lambda_{\alpha\beta}\neq 0}\frac{I^{\alpha}_{r-1-p}J^{\beta}_{s-1-q}}{p_{\alpha}q_{\beta}\Lambda_{\alpha\beta}}. \tag{4.14}$$ □

五、特　　例

在这一节，我们给出三个特例．对每一情形都指明了方程的特殊形式以及系数(4.11)及(4.14)的显式公式．

情形1　$\mathscr{U}=\mathscr{V}$，除$\phi_{10}=1$及$\phi_{01}=-1$外所有$\phi_{ij}=0$．方程(4.1)变为：

$$AX-XB=C \tag{5.1}$$

假设A与B有k个公共特征值：$\lambda_{\alpha}=\mu_{\alpha}$，$\alpha=1,\cdots,k$．则

$$\rho_{pq}=\sum_{\alpha=1}^{k}\frac{I^{\alpha}_{r-1-p}J^{\alpha}_{s-1-q}}{p_{\alpha}q_{\alpha}},\quad \varepsilon_{pq}=\sum_{\alpha=1}^{r}\sum_{\substack{\beta=1\\(\beta\neq\alpha\leqslant k)}}^{s}\frac{I^{\alpha}_{r-1-p}J^{\beta}_{s-1-q}}{p_{\alpha}q_{\beta}(\lambda_{\alpha}-\mu_{\beta})} \tag{5.2}$$

情形2　$\mathscr{U}=\mathscr{V}$，$B=A\in\mathrm{Sym}^{+}$(正定)，$r=s$，

$$\phi_{ij}=\begin{cases}1, & i+j=k-1\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \tag{5.3}$$

我们有

$$\sum_{i=1}^{k}A^{k-i}XA^{i-1}=C,\quad \Lambda_{\alpha\beta}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_{\alpha}^{k-i}\lambda_{\beta}^{i-1}=\Lambda_{\beta\alpha}>0 \tag{5.4}$$

对任意C，方程(5.4)有唯一解：

$$X=\sum_{p,q=0}^{r-1}\varepsilon_{pq}A^pCB^q,\quad \varepsilon_{pq}=\sum_{\alpha,\beta=1}^{r}\frac{I^{\alpha}_{r-1-p}I^{\beta}_{r-1-q}}{p_\alpha p_\beta\sum_{i=1}^{k}\lambda_\alpha^{k-i}\lambda_\beta^{i-1}}=\varepsilon_{qp} \tag{5.5}$$

情形3 $\mathscr{U}=\mathscr{V}$, $B=A\in\mathrm{Sym}$, $r=s$, 除$\phi_{10}=1$及$\phi_{01}=-1$外所有的$\phi_{ij}=0$。我们有

$$AX-XA=C \tag{5.6}$$

$$\rho_{pq}=\sum_{\alpha=1}^{r}\frac{I^{\alpha}_{r-1-p}I^{\alpha}_{r-1-q}}{p_\alpha^2}=\rho_{qp},\quad \varepsilon_{pq}=\sum_{\alpha\neq\beta}\frac{I^{\alpha}_{r-1-p}I^{\beta}_{r-1-q}}{p_\alpha p_\beta(\lambda_\alpha-\lambda_\beta)}=-\varepsilon_{qp} \tag{5.7}$$

参 考 文 献

[1] M. Wedderburn, Note on the linear matrix equation, *Proc. Edingburgh Math. Soc.*, 22 (1904), 49—53.

[2] D.Z. Rutherford, On the solution of the matrix equation $AX+XB=C$, *Nederl. Wetensch. Proc., Ser. A*, 35 (1932), 53—59.

[3] W.E. Roth, The equation $AX-YB=C$ and $AX-XB=C$ in matrices, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 3 (1952), 392—396.

[4] M. Rosenblum, On the operator equation $BX-XA=Q$, *Duke Math. J.*, 23 (1956), 263—270.

[5] G. Lumer and M. Rosenblum, Linear operator equations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 10 (1959), 32—41.

[6] Ma Er-chieh, A finite series solution of the matrix equation $AX-XB=C$, *SIAM J. Appl. Math.*, 14 (1966), 490—495.

[7] R.A. Smith, Matrix equation $XA+BX=C$, *SIAM J. Appl. Math.*, 16 (1968), 198—201.

[8] A. Jameson, Solution of the equation $AX+XB=C$ by inversion of a $M\times M$ or $N\times N$ matrix, *SIAM J. Appl. Math.*, 16 (1968), 1020—1023.

[9] M. Rosenblum, The operator equation $BX-XA=Q$ with selfadjoint A and B, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 20 (1969), 115—120.

[10] P. Lancaster, Explicit solutions of linear matrix equations, *SIAM Reviews*, 12 (1970), 544—566.

[11] P.C. Müller, Solution of the matrix equation $AX+XB=-Q$ and $S^TX+XS=-Q$, *SIAM J. Appl. Math.*, 18 (1970), 682—687.

[12] R.E. Hartwig, Resultants and the solution of $AX-XB=C$, *SIAM J. Appl. Math.*, 23 (1972), 104—117.

[13] R. H. Bartels and G.W. Stewart, Solution of the equation $AX+XB=C$, *Comm. ACM*, 15 (1972), 820—826.

[14] V. Kučera, The matrix equation $AX+XB=C$, *SIAM J. Appl. Math.*, 26 (1974), 15—25.

[15] W.T. Vetter, Vector structures and solutions of linear matrix equations, *Linear Algebra Appl.*, 10 (1975), 181—188.

[16] J.Z. Hearson, Nonsingular solutions of $TA-BT=C$, *Linear Algebra Appl.*, 16 (1977), 57—83.

[17] A. Bickart, Direct solution method for $A_1E+EA_2=-D$, *IEEE Trans. Auto*,

Control, 22 (1977), 467—471.

[18] H. Flanders and H.K. Wimmer, On the matrix equations $AX-XB=C$ and $AX-YB=C$, *SIAM J. Appl. Math.*, 32 (1977), 707—710.

[19] G.H. Golub, S. Nash and C. Van Loan, A Hessenberg-Schur method for the matrix problem $AX+XB=C$, *IEEE Trans. Auto. Control AC*, 24 (1979), 909—913.

[20] S.P. Bhattacharyya and E. Desouta, Controllability, observability and the solution of $AX-XB=C$, *Linear Algebra Appl.*, 39 (1981), 167—188.

[21] J.R. Magnus, L-structured matrices and linear matrix equations, *Linear and Multilinear Algebra*, 14 (1983), 67—88.

[22] B.N. Datta and K. Datta, The matrix equation $XA=A^TX$ and an associated algorithm for solving the inertia and stability problems, *Linear Algebra Appl.*, 97 (1987), 103—119.

[23] J.H. Bevis, F.J. Hall and R.E. Hartwig, The matrix equation $A\bar{X}-XB=C$ and its special cases, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 9 (1988), 348—359.

[24] K. Datta, The matrix equation $XA-BX=R$ and its applications, *Linear Algebra Appl.*, 109 (1988), 91—105.

[25] 高维新，矩阵方程$AX-XB=C$的连分式解法，中国科学，A辑，(6) (1988), 576—584.

[26] F. Rotella and P. Borne, Explicit solution of Sylvester and Lyapunov equations, *Math. Comput. Simulation*, 31 (1989), 271—281.

[27] P.S. Szczepaniak, A contribution to matrix equations arising in system theory, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 15 (1992), 593—597.

[28] Guo Zhongheng, Th. Lehmann, Liang Haoyun and C.-S. Man, Twirl tensors and the tensor equation $\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{C}$, *J. Elasticity*, 27 (1992), 227—245.

The Linear Bi-Spatial Tensor Equation $\Phi_{ij}A^iXB^j=C$

Chen Yuming

(*Department of Applied Mathematics, Hu'nan University, Hu'nan* 410012, *P.R. China*)

Xiao Heng

(*Department of Mathematics, Peking University, Beijing* 100871, *P. R. China*)

Li Jianbo

(*Department of Mathematics, University of Kentucky, Lexington KY* 40506-0027, *USA*)

Abstract

A linear bi-spatial tensor equation which contains many often encountered equations as particular cases is thoroughly studied. Explicit solutions are obtained. No conditions on eigenvalues of coefficient tensors are imposed.

Key words tensor equation, bi-spatial tensor, square tensor-product