应用数学和力学，第17卷 第10期（1996年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

一种构造可积Hamilton系统的新方法

高 普 云[1]

（郑泉水推荐，1996年2月13日收到）

摘 要

建议了一种新的构造可积Hamilton系统的方法。对于给定的Poisson流形，本文利用Dirac-Poisson结构构造其上的新Poisson括号[1]，进而获得了新的可积Hamilton系统。构造的Poisson括号一般是非线的，并且这种方法也不同于通常的方法[2~4]。本文还给出了两个实例。

关键词 Dirac-Poisson括号 可积性 Hamilton系统

一、新的构造方法

在描述这种新方法之前，我们先简短地回忆一下Dirac-Poisson结构．设$(M,\{\ ,\ \})$是Poisson流形．M上的一组光滑函数$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$称为是第二类约束，如果至少存在点$x_0\in M$使得矩阵$(\{\varphi_i,\varphi_j\}\ (x_0))_{n\times n}$是非退化的．记

$$U=\{x\in M\,|\,(\{\varphi_i,\varphi_j\}(x))_{n\times n}\text{是非退化的}\}$$

$$\Sigma=\{x\in M\,|\,\varphi_i(x)=0,i=1,2,\cdots,n\}$$

那么U是M的开子集，并且在$M\cap U$上存在所谓Dirac括号[1]

$$\{\bar f,\bar g\}^*=\overline{\{f,g\}-\sum_{i,j=1}^{n}\{f,\varphi_i\}c_{ij}\{\varphi_j,g\}} \tag{1.1}$$

这里$(c_{ij})_{n\times n}$是矩阵$(\{\varphi_i,\varphi_j\})_{n\times n}$的逆矩阵，$f,g\in C^\infty(M)$，$\bar h$是$h$在$M\cap U$上的限制．

下面这个重要定理是本文构造可积Hamilton系统的出发点．

定理 设$\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_k$是$M$上的光滑函数，并且满足条件

a) $\{\psi_i,\psi_j\}=0,i,j=1,2,\cdots k;$

b) $\{\psi_i,\varphi_j\}\,|\,\Sigma\cap U=0,i=1,2,\cdots,k;\ \ j=1,2,\cdots,n.$

那么

$$\{\bar\psi_i,\bar\psi_j\}^*=0,\qquad (i,j=1,2,\cdots,k)$$

证明 由(1.1)有

$$\{\bar\psi_i,\ \bar\psi_j\}^*=\overline{\{\psi_i,\psi_j\}}-\sum_{l,m=1}^{n}\overline{\{\psi_i,\varphi_l\}C_{lm}\{\varphi_m,\psi_j\}}$$

---

1 南京大学数学系，南京 210093

由条件a)和b)有

$$\overline{\{\psi_i,\psi_j\}} = \overline{\{\psi_i,\ \varphi_l\}} = \overline{\{\varphi_m,\psi_j\}} = 0$$

因此

$$\{\bar{\psi}_i,\bar{\psi}_j\}^* = 0, \qquad (i,j=1,2,\cdots,k)$$

推论　如果ψ是Casimir函数，那么$\bar{\psi}$也是Casimir函数。

注记　容易看到，如果$k=2$，定理的条件b)可用下列条件代替

b)′　$\{\psi_1,\varphi_j\}|\Sigma\cap U=0$，或$\{\psi_2,\varphi_j\}|\Sigma\cap U=0$　　$(j=1,2,\cdots,n)$

二、应用举例

下面我们将用上节的定理来构造单Lie代数sl(3)上的新的可积Hamilton系统。

我们首先回忆一下sl(3)的一些基本性质。

我们按标准方式把sl(3)描述成无迹3×3矩阵代数，E_{ij}定义为第(i,j)位置的元为1而其他位置的元为零的矩阵，记

$$e_1=E_{12},\ e_2=E_{23},\ e_3=E_{13}$$
$$h_1=E_{11}-E_{22},\ h_2=E_{22}-E_{33}$$
$$e_{-1}=E_{21},\ e_{-2}=E_{32},\ e_{-3}=E_{31}$$

那么它们构成sl(3)的Cartan基，其Lie括号如表1。

表　1

[,]	h_1	h_2	e_1	e_2	e_3	e_{-1}	e_{-2}	e_{-3}
h_1	0	0	$2e_1$	$-e_2$	e_3	$-2e_{-1}$	e_{-2}	$-e_{-3}$
h_2	0	0	$-e_1$	$2e_2$	e_3	e_{-1}	$2e_{-2}$	$-e_{-3}$
e_1	$-2e_1$	e_1	0	e_3	0	h_1	0	$-e_{-2}$
e_2	e_2	$-2e_2$	$-e_3$	0	0	0	h_2	e_{-1}
e_3	$-e_3$	$-e_3$	0	0	0	$-e_2$	e_1	h_1+h_2
e_{-1}	$2e_{-1}$	$-e_{-1}$	$-h_1$	0	e_2	0	$-e_3$	0
e_{-2}	$-e_{-2}$	$2e_{-2}$	0	$-h_2$	$-e_1$	e_{-3}	0	0
e_{-3}	e_{-3}	e_{-3}	e_{-2}	$-e_{-1}$	$-(h_1+h_2)$	0	0	0

众所周知sl(3)上有Kostant-Kirillov Poisson括号[5]

$$\{f,g\}(L)=\langle L,[\nabla f(L),\nabla g(L)]\rangle \tag{2.1}$$

这里⟨ , ⟩是sl(3)的Cartan-Killing型，$f,g\in C^\infty(\mathrm{sl}(3))$，$L\in\mathrm{sl}(3)$，并且$\nabla h(L)$满足

$$\langle\nabla h(L),X\rangle=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} h(L+tX), \qquad \forall X\in\mathrm{sl}(3)$$

$$\psi_1(L)=\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}L^2 \quad 和 \quad \psi_2(L)=\frac{1}{3}\mathrm{tr}L^3$$

是Poisson流形(sl(3),{ , })的两个Casimir函数[6]。选取sl(3)的一组基

$$h_1-h_2,h_1+h_2,e_1,e_2,e_3,e_{-1},e_{-2},e_{-3}$$

因此sl(3)中任一元J都可以表示成

$$J=J_{01}(h_1-h_2)+J_{02}(h_1+h_2)+\sum_{i=1}^{3}(J_ie_i+J_{-i}e_{-i})$$

这里$J_{01},J_{02},J_1,J_2,J_3,J_{-1},J_{-2},J_{-3}$是sl(3)的坐标函数。根据表1，不难计算他们的Poisson交换关系如表2。

表 2

{ , }	J_{01}	J_{02}	J_1	J_2	J_3	J_{-1}	J_{-2}	J_{-3}
J_{01}	0	0	$-\frac{1}{2}J_1$	$\frac{1}{2}J_2$	0	$\frac{1}{2}J_{-1}$	$-\frac{1}{2}J_{-2}$	0
J_{02}	0	0	$-\frac{1}{2}J_1$	$-\frac{1}{2}J_2$	$-J_3$	$\frac{1}{2}J_{-1}$	$\frac{1}{2}J_{-2}$	J_{-3}
J_1	$\frac{1}{2}J_1$	$\frac{1}{2}J_1$	0	$-J_3$	0	$-(3J_{01}+J_{02})$	0	$-J_{-2}$
J_2	$-\frac{1}{2}J_2$	$\frac{1}{2}J_2$	$-J_3$	0	0	0	$3J_{01}-J_{02}$	$-J_{-1}$
J_3	0	J_3	0	0	0	J_2	$-J_1$	$-2J_{01}$
J_{-1}	$-\frac{1}{2}J_{-1}$	$-\frac{1}{2}J_{-1}$	$3J_{01}+J_{02}$	0	$-J_2$	0	J_3	0
J_{-2}	$\frac{1}{2}J_{-2}$	$-\frac{1}{2}J_{-2}$	0	$-3J_{01}+J_{02}$	J_1	$-J_{-3}$	0	0
J_{-3}	0	$-J_{-3}$	$-J_{-2}$	J_{-1}	$2J_{02}$	0	0	0

例1 取约束函数$\varphi_1(J)=J_{02}$ 和 $\varphi_2(J)=J_3-1$，那么

$$\Sigma_1=\{J\in sl(3)\,|\,\varphi_1(J)=\varphi_2(J)=0\}$$
$$=\{J\in sl(3)\,|\,J=e_3+J_{01}(h_1-h_2)+J_1e_1+J_2e_2+J_{-1}e_{-1}+J_{-2}e_{-2}+J_{-3}e_{-3}\}$$

由表2，不难计算出

$$\begin{pmatrix} \{\varphi_1,\varphi_1\}(J) & \{\varphi_1,\varphi_2\}(J) \\ \{\varphi_2,\varphi_1\}(J) & \{\varphi_2,\varphi_2\}(J) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -J_3 \\ J_3 & 0 \end{pmatrix}$$

该矩阵在Σ_1上的限制是

$$(\{\varphi_i,\varphi_j\})\,|\,\Sigma_1=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

它的逆矩阵是

$$(c_{ij})=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

表 3

{ , }*	J_{01}	J_1	J_2	J_{-1}	J_{-2}	J_{-3}
J_{01}	0	$-\frac{1}{2}J_1$	$\frac{1}{2}J_2$	$\frac{1}{2}J_{-1}$	$-\frac{1}{2}J_{-2}$	0
J_1	$\frac{1}{2}J_1$	0	-1	$-\left(3J_{01}+\frac{1}{2}J_1J_2\right)$	$\frac{1}{2}J_1^2$	J_{-2}
J_2	$-\frac{1}{2}J_2$	1	0	$\frac{1}{2}J_2^2$	$3J_{01}+\frac{1}{2}J_1J_2$	$-J_{-1}$
J_{-1}	$-\frac{1}{2}J_{-1}$	$3J_{01}+\frac{1}{2}J_1J_2$	$-\frac{1}{2}J_2^2$	0	$J_{-2}+\frac{1}{2}(J_1J_{-1}-J_2J_{-2})$	$-J_2J_{-3}$
J_{-2}	$\frac{1}{2}J_{-2}$	$-\frac{1}{2}J_1^2$	$-\left(3J_{01}+\frac{1}{2}J_1J_2\right)$	$-J_{-2}-\frac{1}{2}(J_1J_{-1}-J_2J_{-2})$	0	0
J_{-3}	0	$-J_{-2}$	J_{-1}	J_2J_{-3}	0	0

由(1.1)和表2，不难计算出Σ_1上的坐标函数$J_{01}, J_1, J_2, J_{-1}, J_{-2}$和$J_{-3}$的Dirac Poisson括号如表3。

结合上一节的推论和表3，因此$(\Sigma_1, \{\ ,\ \}^*)$是一Poisson流形，并且有两个Casimir函数

$$\Phi_1(J)=\frac{1}{2}\mathrm{tr}J^2 \text{ 和 } \Phi_2(J)=\frac{1}{3}\mathrm{tr}J^3$$

因此，对于任意函数$H\in C^\infty(\Sigma_1)$，如果是函数Φ_1, Φ_2和H是函数无关的.那么$(\Sigma_1, \{\ ,\ \}^*, H)$是一个可积的Hamiltonian系统，由表3，其Hamiltonian方程是

$$\begin{cases}
\frac{dJ_{01}}{dt}=-\frac{1}{2}J_1\frac{\partial H}{\partial J_1}+\frac{1}{2}J_2\frac{\partial H}{\partial J_2}+\frac{1}{2}J_{-1}\frac{\partial H}{\partial J_{-1}}-\frac{1}{2}J_{-2}\frac{\partial H}{\partial J_{-2}} \\
\frac{dJ_1}{dt}=\frac{1}{2}J_1\frac{\partial H}{\partial J_{01}}-\frac{\partial H}{\partial J_2}-\left(3J_{01}+\frac{1}{2}J_1J_2\right)\frac{\partial H}{\partial J_{-1}}+\frac{1}{2}J_1^2\frac{\partial H}{\partial J_{-2}}+J_{-2}\frac{\partial H}{\partial J_{-3}} \\
\frac{dJ_2}{dt}=-\frac{1}{2}J_2\frac{\partial H}{\partial J_{01}}+\frac{\partial H}{\partial J_1}+\frac{1}{2}J_2^2\frac{\partial H}{\partial J_{-1}}+\left(3J_{01}+\frac{1}{2}J_1J_2\right)\frac{\partial H}{\partial J_{-2}}-J_{-1}\frac{\partial H}{\partial J_{-3}} \\
\frac{dJ_{-1}}{dt}=-\frac{1}{2}J_{-1}\frac{\partial H}{\partial J_{01}}+\left(3J_{01}+\frac{1}{2}J_1J_2\right)\frac{\partial H}{\partial J_1}-\frac{1}{2}J_2^2\frac{\partial H}{\partial J_2} \\
\quad +\left[J_{-3}+\frac{1}{2}(J_1J_{-1}-J_2J_{-2})\right]\frac{\partial H}{\partial J_{-2}}-J_2J_{-3}\frac{\partial H}{\partial J_{-3}} \\
\frac{dJ_{-2}}{dt}=\frac{1}{2}J_{-2}\frac{\partial H}{\partial J_{01}}-\frac{1}{2}J_1^2\frac{\partial H}{\partial J_1}-\left(3J_{01}+\frac{1}{2}J_1J_2\right)\frac{\partial H}{\partial J_2} \\
\quad -\left[J_{-3}+\frac{1}{2}(J_1J_{-1}-J_2J_{-2})\right]\frac{\partial H}{\partial J_{-1}}+J_1J_{-3}\frac{\partial H}{\partial J_{-3}} \\
\frac{dJ_3}{dt}=-J_{-2}\frac{\partial H}{\partial J_1}+J_{-1}\frac{\partial H}{\partial J_2}+J_2J_{-3}\frac{\partial H}{\partial J_{-1}}-J_1J_{-3}\frac{\partial H}{\partial J_{-2}}
\end{cases}$$

这个方程组有3个首次积分Φ_1，Φ_2和H，因此是可积的.

例2 取约束函数

$$\varphi_1(J)=J_{01},\quad \varphi_2(J)=J_1,\quad \varphi_3(J)=J_2,\quad \varphi_4(J)=J_3-1$$

那么

$$\begin{aligned}\Sigma_2&=\{J\in \mathrm{sl}(3)\,|\,\varphi_1(J)=\varphi_2(J)=\varphi_3(J)=\varphi_4(J)=0\}\\ &=\{J\in \mathrm{sl}(3)\,|\,J=J_3+J_{01}(h_1-h_2)+J_{-1}e_{-1}+J_{-2}e_{-2}+J_{-3}e_{-3}\}\end{aligned}$$

类似于例1，有

$$(\{\varphi_i,\varphi_j\})|\Sigma_2=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

它的逆矩阵是

$$(c_{ij})=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}$$

不难计算得到表4的结果.

表 4

{ , }*	J_{01}	J_{-1}	J_{-2}	J_{-3}
J_{01}	0	$-\frac{1}{2}J_{-1}$	$-\frac{1}{2}J_{-2}$	0
J_{-1}	$-\frac{1}{2}J_{-1}$	0	$J_{-3}-9J_{01}^2$	$3J_{01}J_{-1}$
J_{-2}	$\frac{1}{2}J_{-2}$	$-J_{-3}+9J_{01}^2$	0	$-3J_{01}J_{-2}$
J_{-3}	0	$-3J_{01}J_{-1}$	$3J_{01}J_{-2}$	0

作变换

$$H=4J_{01},\quad E=J_{-1},\quad F=\frac{4}{3}J_{-2},\quad C=-\frac{4}{3}(J_{-3}+3J_{01}^2)$$

这是一个可逆非线性变换，并且有

$$\left.\begin{array}{l}\{H,E\}_2^*=2E,\ \{H,F\}_2^*=-2F,\ \{E,F\}_2^*=H^2+C\\ \{C,E\}_2^*=\{C,F\}_2^*=\{C,H\}_2^*=0\end{array}\right\}\tag{2.2}$$

由此我们得到了Poisson流形$(\Sigma_2,\{\ ,\ \}^*)$，并且它有两个Casimir 函数

$$\Phi_1(J)=J_{-3}+3J_{01}^2=-\frac{3}{4}C$$

$$\Phi_2(J)=J_{-1}J_{-2}+2J_{01}J_{-3}-2J_{01}^3=\frac{1}{8}(6EF-3HC-2H^3)$$

对于任意函数$G\in C^\infty(\Sigma_2)$，$(\Sigma_2,\{\ ,\ \}^*,G)$的Hamilton方程是

$$\left.\begin{array}{l}\frac{dH}{dt}=2E\frac{\partial G}{\partial E}-2F\frac{\partial G}{\partial F},\quad \frac{dE}{dt}=-2E\frac{\partial G}{\partial H}+(H^2+C)\frac{\partial G}{\partial F}\\ \frac{dF}{dt}=2F\frac{\partial G}{\partial H}-(H^2+C)\frac{\partial G}{\partial E},\quad \frac{dC}{dt}=0\end{array}\right\}\tag{2.3}$$

由于Φ_1是Poisson代数(2.2)的中心，所以方程组(2.3)的两个首次积分是Φ_2和G.

参 考 文 献

[1] P. A. M. Dirac, Generalized Hamilton dynamics, *Can. J. Math.*, **2** (1950), 129—148.

[2] V. I. Arnold, etc. (eds), *Dynamical Systems* (Ⅶ), Springer-Verlag (1992), 116—220.

[3] B. Kostant, *Adv. Math.*, **34** (1979), 195.

[4] R. Abraham and J. Marsden, *Foundations of Mechanics*, 2nd ed, Addison-Wesley, Reading, Mass (1978), 298—304.

[5] D. H. Sattinger and O. L. Weaver, *Lie Groups and Algebra with Applications to Physics, Geometry and Mechanics*, Springer-Verlag (1986).

[6] L. D. Faddeev and L. A. Takhtajan, *Hamiltonian Methods in the Theory of Solutions*, Springer-Verlag (1987).

A New Method for the Construction of Integrable Hamiltonian Systems

Gao Puyun

(*Department of Mathematics, Nanjing University, Nanijing* 210093, *P.R.China*)

Abstract

A new method for the construction of integrable Hamiltonian system is proposed. For a given Poisson manifold, the present paper constructs new Poisson brackets on it by making use of the Dirac Poisson structure([1]), and obtains further new integrable Hamiltonian systems. The constructed Poisson bracket is usual non-linear, and this new method is also different from usual ones ([2—4]). Two examples are given.

Key words Dirac-Poisson bracket, integrability, Hamiltonian systems