应用数学和力学，第17卷 第9期（1996年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

向量丛动力系统研究注记(Ⅱ)——部份1

廖山涛[1]

（1995年9月18日收到）

摘　要

过去，向量丛线性动力系统的整体线性性质研究已经显得相当广泛。现在，我们提议研究这种线性系统的扰动性质。我们要考虑的这种扰动系统将不再是线性的，但要研究的性质一般仍是整体性的。再者我们感兴趣的为非一致双曲性。在本文中我们给出了这种扰动的恰当的定义。它虽表现得有几分不太通常，然而它较深地植根于有关微分动力系统理论的典泛方程组中。这里一般的问题是要观察，当扰动发生后，原给系统的何种性质得以保持下来。本文的全部内容是要建立这种类型的一个定理。

关键词　向量丛　非一致双曲性　遍历性　可容许扰动　点式有界

一、引　　言

我们工作中，K总表示一局部平凡的向量丛。它以一紧致可度量空间W为底空间，以n维实向量空间E_x为$x\in W$处的纤维。对于W中一子集G，K的子丛$K|G$是K中所有$x\in G$处的纤维构成的子集，作为丛时以G为底空间。G不一定要是紧致的。

从现在起，除非另有明确申明，K上一个向量丛动力系统（文献上有时也称作斜积流）是指K上一个保纤维的单参变换群。进一步，如果这群中每个变换都把纤维线性地映到纤维上，我们就称这丛动力系统是线性的。我们将固定一如此的线性向量丛动力系统

$$\Phi_t:\ K\to K\qquad(-\infty<t<\infty)$$

作为讨论的起点。根据从K的构造及丛动力系统Φ_t的性质，存在唯一的单参变换群

$$\varphi_t:\ W\to W\qquad(-\infty<t<\infty)$$

由Φ_t复盖（即，$\sigma\Phi_t=\varphi_t\sigma$对所有$t\in(-\infty,\ \infty)$，其中$\sigma$表丛投射：$K\to W$）。明显地，如果$\varphi_t$保留$K$的子集$G$不变，则$\Phi_t$也保留子丛$K|G$不变。

在文献上，Oseledec，Sacker-Sell 和其他一些人已经相当广泛地研究了线性向量丛动力系统的整体线性性质（参看[1]，[2]，[3]，[4]和[3]；[4]引述的许多相关文献）。可是，比较起来说，线性向量丛动力系统的扰动问题似还没有受到应有的注意。我们称K上的丛动力系统$\Psi_t(-\infty<t<\infty)$是$\Phi_t(-\infty<t<\infty)$的扰动，如果对每一$u\in K$，$\Psi_t(u)$和$\Phi_t(u)$总在K的同一纤维内。但这太辽阔了，不切于实用。再者，使人感兴趣的扰动应该不再是线性的。我们还注意，K一般不是一个流形，因而微分动力系统中通常定义C^r扰动的办法对目

1 北京大学数学系，北京　100871。

前这情况也不能照直搬用。

本文附录中，我们将给出所谓

Φ_t-可容许扰动的定义 这是K上一丛动力系统，是$\Phi_t(-\infty<t<\infty)$的扰动，并满足某些进一步的要求。这是一个办法，适应我们现在和将来的目的。人们将不会对它的不常见的阐述方式感到诧異，如果他知道微分动力系统理论中典范方程组[6]的构造的话。

我们工作中重用与K相配的正交标架丛$\mathscr{F}_n(K)$及正规标架丛$\mathscr{F}^*_n(K)$。因此，要预先选取好纤维上的内积，它随W上的点变动而连续变化。从而可运用通常的Gram-Schmidt手续从n-标架出发构造丛$\mathscr{F}_n(K)$及$\mathscr{F}^*_n(K)$，并由$\Phi_t(-\infty<t<\infty)$自然地引出单参变换群

$$\chi_t:\ \mathscr{F}_n(K)\to\mathscr{F}_n(K),\quad \chi_t^*:\ \mathscr{F}_n^*(K)\to\mathscr{F}_n^*(K),\qquad (-\infty<t<\infty).$$

再者，我们还假定函数$\|\mathrm{proj}_k\chi_t(\gamma)\|$，$(t,\gamma)\in(-\infty,\infty)\times\mathscr{F}_n(K)$，对$t$的可微性，这里$\mathrm{proj}_k(\cdot)$表示标架$(\cdot)$中的第$k$个向量；并假定

$$\omega_k(\gamma,K)=\left.\frac{d\|\mathrm{proj}_k\chi_t(\gamma)\|}{dt}\right|_{t=0}$$

对γ连续，$k=1,2,\cdots,n$。这些假定在微分动力系统情况下是自动满足的，见([4]，[6])。

例如，考虑W中对应于一个遍历φ_t-不变概率测度ν的遍历集$\mathscr{E}(\nu)$。如所周知，$\mathscr{E}(\nu)$是W中一个φ_t-不变的Borel子集。据Oseledec乘法遍历定理[1]，$\mathscr{E}(\nu)$有对Φ_t来说的Lyapunov特征指数。用我们的表述，这些指数是

$$\vartheta_k(\mu)=\int_{\mathscr{F}^*_n(K)}\omega_k(\gamma,K)\mu(d\gamma)\qquad(k=1,2,\cdots,n)$$

（允许重复计数），这是μ是$\mathscr{F}_n^*(K)$上满足

$$\xi_*(\mu)=\nu$$

的一个遍历χ_t^*-不变概率测度，而ξ表示丛投射：$\mathscr{F}_n^*(K)\to W$([4，引理5.8～5.9]，[7])。这样μ的存在是已知的。(例如，[4，p.280])。$\mathscr{E}(\nu)$叫作Φ_t-非一致双曲的，如果所有这些特征指数都不是0，亦即

$$\vartheta_k(\mu)\neq 0\qquad(k=1,2,\cdots,n)$$

下面，设已给定一丛动力系统

$$\Psi_t:\ K\to K\qquad(-\infty<t<\infty).$$

它是$\Phi_t(-\infty<t<\infty)$的扰动。我们感兴趣的是，Φ_t的何种性质在这扰动下仍得以存续下来。

我们取流行的Pesin稳定流形定理叙述中的一部份作为例子来说明上面所指的是什么意思。设g是紧致光滑流形M^n上的微分同胚。则dg：$TM^n\to TM^n$产生切丛TM^n上一线性离散系统。另一方面，用冲击函数技术我们可构造一保纤维微分同胚G：$TM^n\to TM^n$，它在TM^n中一个包含O-截面$O(M^n)$的紧致邻域外与dg重合，同时又在一个包含$O(M^n)$的小邻域上满足$g(\exp)=(\exp)G$，这里exp表示指数映射；$TM^n\to M^n$。这样的G在TM^n上所产生的离散动力系统可看作dg所产生的线性离散系统的扰动。根据Pesin稳定流形定理（例如，[8]，[9]及[10]），如果对某$\alpha>0$，g是$C^{1+\alpha}$的（即dg满足α-Hölder条件），且过$p\in M^n$的g轨道为非一致双曲的，则M^n中点p处的稳定集是一单浸入C^1子微分流形，在p处的切空间恰是$O(p)$处dg在T_pM^n中的稳定集。显然，后一稳定集是T_pM^n的子线性空间。简单地说，这表明由dg所产生的TM^n上的离散系统的某种性质在扰动G下是存续下来了的。

上面所述是一个关于离散系统的例子．经过通常的扭扩技术，即可得出一个关于连续流的相类例子（实际上还是上面提到过的所谓 Φ_t-可容许扰动的例子）．要注意的是，这例子绝不能认为只是通常 C^1 情况下双曲轨线一相应扰动性质的简易推广，而其证明也会复杂得多．理由是清楚的．要不然，为什么需要作满足α-Hölder 条件这不太经常的假定呢？

本文从现在起将集中研究线性系统Φ_t的另一个扰动存续性质．这即是所谓轨线间的点式有界性质．明确地说，设$\Phi_t(-\infty<t<\infty)$的扰动系统$\Psi_t(-\infty<t<\infty)$如前．设$\bar{u}$及u在K的同一纤维中．我们说，经过$\bar{u}$的Φ_t-轨线$\{\Phi_t(\bar{u})\mid-\infty<t<\infty\}$与经过$u$的$\Psi_t$-轨线$\{\Psi_t(u)\mid-\infty<t<\infty\}$**点式有界**，如果有一双向叙列$\{t(j)\}=\{t(j;\ \bar{u},u)\}$的数满足

$$\cdots<t(-3)<t(-2)<t(-1)<0=t(0)$$
$$<t(1)<t(2)<t(3)<\cdots,$$
$$\lim_{j\to\infty}t(j)=\infty,\quad \lim_{j\to-\infty}t(j)=-\infty,$$

且使得

$$\sup_{j=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots}\|\Phi_{t(j)}(\bar{u})-\Psi_{t(j)}(u)\|<\infty.$$

下面是本文的主要结果．

主要定理 命单参变换群

$$\Phi_t,\ \Psi_t:\ K\to K\qquad(-\infty<t<\infty)$$

是向量丛 K上的丛动力系统，其中 Φ_t 是线性的，而 Ψ_t 是 Φ_t-可容许扰动．设 φ_t: $W\to W$ $(-\infty<t<\infty)$是单参变换群，它在丛投射σ: $K\to W$下由Φ_t复盖（即，$\varphi_t\sigma=\sigma\Phi_t$ 对所有 $t\in(-\infty<t<\infty)$）．又设$\mathscr{E}(\nu)$是W上遍历φ_t-不变概率测度ν的遍历集，且是Φ_t-非一致双曲的．则W有一φ_t-不变 Borel 子集$\mathscr{D}\subset\mathscr{E}(\nu)$满足

$$\nu(\mathscr{D})=1$$

且使得在部份丛$K|\mathscr{D}$中，Φ_t-轨线与Ψ_t-轨线以下述方式相关联，即：

(a) 对每一$u\in K|\mathscr{D}$存在唯一的

$$\Delta(u)\in K|\mathscr{D}$$

它与u属于$K|\mathscr{D}$中同一纤维内，且经过它的Φ_t-轨线与经过u的Ψ_t-轨线点式有界．

(b) 由此得出的自函数

$$\Delta:\ K|\mathscr{D}\to K|\mathscr{D}$$

具有下述性质$(b_1)\sim(b_3)$．

(b_1) Δ把$K|\mathscr{D}$的每一纤维连续地映满到其自身上．

(b_2) 交换性在图表

$$\begin{array}{ccc} K|\mathscr{D} & \xrightarrow{\Phi_t} & K|\mathscr{D}\\ \Delta\uparrow & & \Delta\uparrow\\ K|\mathscr{D} & \xrightarrow{\Psi_t} & K|\mathscr{D}\end{array}$$

中成立．

(b_3) Δ是$K|\mathscr{D}$上的 Borel 函数．

此处如常（例如见[11,p.70]），Borel 函数意指 Borel 集的逆像也是 Borel 集．

本文内容编组如下．由于篇幅长，故分成两部份写．部份 1 包含：一、叙言，二、一个预备定理，三、一个样品方程组．这预备定理对本文目的来说很重要．部份 2 包含：四节～

六节，一个附录．主要定理证明在部份 2 中完成．

二、一个预备定理

我们继续([4]，[7])中的讨论．本节中将证明一个预备定理，它对本文目的来说是基本的．

向量从

$$K=\bigcup_{x\in W}E_x$$

具有纤维中的内积以及单参变换群

$$\varphi_t:W\to W,\ \Phi_t:\ K\to K\qquad(-\infty<t<\infty)$$

等意义同[4]，[7]中．这从以W为底空间，以E_x为$x\in W$处的纤维，以n为纤维的维数．对一整数$p\in\langle 1,n\rangle$命$\mathscr{U}_p(K)$，$\mathscr{F}_p(K)$及$\mathscr{F}_p^{\#}(K)$分别为相配于K的p-标架从，正交p-标架从及正规p-标架从．同[4]，[7]中仍考虑 Grassmann 从$\mathscr{L}_p(K)$以及由Φ_t: $K\to K(-\infty<t<\infty)$自然导出的单参变换群

$$\Phi_t:\ \mathscr{U}_p(K)\to\mathscr{U}_p(K),\ \varphi_t:\ \mathscr{L}_p(K)\to\mathscr{L}_p(K),$$
$$\chi_t:\ \mathscr{F}_p(K)\to\mathscr{F}_p(K),\ \chi_t^{\#}:\ \mathscr{F}_p^{\#}(K)\to\mathscr{F}_p^{\#}(K),$$
$$(-\infty<t<\infty).$$

$\mathscr{U}_p(K)$中一标架γ张开成K中一个纤维的p维子线性空间，将记作$H(\gamma)$．$\mathscr{L}_p(K)$的一个点，据定义由K中一纤维的p-维子线性空间H形成，它将记作$[H]$．由$\gamma\mapsto[H(\gamma)]$，$\gamma\in\mathscr{F}_p^{\#}(K)$，给出一映射

$$\xi:\ \mathscr{F}_p^{\#}(K)\to\mathscr{L}_p(K)\tag{2.1}$$

见于[4,p.284]的可微性条件仍将普遍假定，由是有$\mathscr{F}_p(K)$上的连续函数

$$\omega_k(\gamma,\ K)=\left.\frac{d\|\mathrm{proj}_k\chi_t(\gamma)\|}{dt}\right|_{t=0},$$
$$(\gamma\in\mathscr{F}_p(K),\ k=1,2,\cdots,p)$$

任给定一叙列$\{T_i\}$的数满足

$$T_1\geqq 1,\ T_{i+1}=2T_i(i=1,2,3,\cdots)\tag{2.2}$$

对一给定的整数$m\in\langle 1,p\rangle$，命$J(m)$为所有满足$\lambda_1<\lambda_2<\cdots<\lambda_m$的数列$\lambda(m)=(\lambda_1,\ \lambda_2,\cdots,\lambda_m)$作成的集合．又命$Q(m)$为所有满足$q_1+q_2+\cdots+q_m=p$的正整数列作成的集合．

对任给的$\lambda\in(-\infty,\ \infty)$写

$$\theta(\lambda,t;\ H)=\sup_{u\in H,\|u\|=1}|(\log\|(\exp(-\lambda t))\Phi_t(u)\|)|,$$

其中 $t\in(-\infty,\ \infty)$而H是K的一纤维中的非空线性子空间．

对于给定的数列对

$$\lambda(m)=(\lambda_1,\ \lambda_2,\cdots,\lambda_m)\in J(m),$$
$$q(m)=(q_1,\ q_2,\cdots,q_m)\in Q(m),$$

我们在[4，p.296]中定义了$\mathscr{L}_p(K)$的子集$\Gamma(\lambda(m),\ q(m))$，它由满足某些条件的所有点$[H]$组成．但从现在起我们愿意用下述有关$[H]\in\Gamma(\lambda(m),\ q(m))$的判别条件，即：

命题2.1 对于给定在上的$\lambda(m)\in J(m)$及$q(m)\in Q(m)$，$\mathscr{L}_p(K)$中一个点$[H]\in\Gamma(\lambda(m),\ q(m))$，当且仅当$H$可分解成直和

$$H=H_1\oplus H_2\oplus\cdots\oplus H_m \tag{2.3}$$

使得$\dim H_j=q_j$且

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\left(\overline{\lim_{\tau\to\infty}}\frac{1}{\tau T_i}\sum_{k=0}^{\tau-1}\theta(\lambda_j,\ \delta T_i;\ \Phi_{k\delta T_i}(H_j))\right)$$
$$=0\quad(j=1,2,\cdots,m;\ \delta=-1,\ 1) \tag{2.4}$$

这样分解的存在是唯一的。

证 这些论断是$\Gamma(\lambda(m),\ q(m))$的定义及[4，引理5.3，5.7，5.8]的容易推论。

所以，如果$[H]\in\Gamma(\lambda(m),\ q(m))$，则分解式(2.3)的性质(2.4)蕴涵对每个非0的$u\in H_j$的极限

$$\lim_{t\to\pm\infty}\frac{1}{t}\|\Phi_t(u)\|=\lambda_j$$

的存在，$j=1,2,\cdots,m$。按照通常的术语，λ_j将引述作为φ_t: $\mathscr{L}_p(K)\to\mathscr{L}_p(K)$在$[H]$处的Lyapunov 特征指数，具有重数$q_j=\dim H_j$。

本节下面我们考虑一固定的数列$\sigma(p)$：

$$\sigma_1\leqq\sigma_2\leqq\cdots\leqq\sigma_p \tag{2.5}$$

对于$\gamma\in\mathscr{F}_p^{\#}(K)$写

$$V(\gamma;\ k;\ T_i;\ \delta)=\max_{j=1,2,\cdots,p}\left|\sigma_j-\frac{1}{\delta T_i}\int_{k\delta T_i}^{(k+1)\delta T_i}\omega_j(\chi_t^{\#}(\gamma),\ K)dt\right|,$$
$$(i=1,2,3,\cdots;\ k=0,1,2,3,\cdots;\ \delta=-1,1) \tag{2.6}$$

(T_i见(2.2))。命

$$\Lambda(\sigma(p))=\left\{\gamma\in\mathscr{F}_p^{\#}(K)\left|\overline{\lim_{i\to\infty}}\left(\overline{\lim_{\tau\to\infty}}\frac{1}{\tau}\sum_{k=0}^{\tau-1}V(\gamma;\ k;\ T_i;\ \delta)\right)\right.\right.$$
$$\left.=0,\ \delta=-1,1\right\} \tag{2.7}$$

进一步，对任一$\eta>0$命$\Theta(\sigma(p);\ \eta)$为所有具有性质⊛的$\gamma\in\mathscr{F}_p^{\#}$的集合，即：

⊛对应于每个整数$i\geqq1$存在一整数$c=c(\gamma;\ i,\ \eta)\geqq i$及一个双向整数叙列$\{s(j)\}=\{s(j;\ \gamma,\ i,\ \eta)\}$满足

$$\cdots<s(-3)<s(-2)<s(-1)<0=s(0)$$
$$<s(1)<s(2)<s(3)<\cdots$$

且使得

$$\frac{1}{\tau}\sum_{k=0}^{\tau-1}V(\chi_{s(j)T_c}^{\#}(\gamma);\ k;\ T_c;\ \delta)\leqq\eta,$$
$$(\tau=1,2,3,\cdots;\ j=0,\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\cdots;\ \delta=-1,\ 1)$$

于是写

$$\Theta(\sigma(p))=\bigcap_{k=1,2,3,\cdots}\Theta(\sigma(p);\ 1/k) \tag{2.8}$$

从$\mathscr{F}_p^{\#}$的紧致性及函数$\omega_j(\gamma,K)$对$\gamma\in\mathscr{F}_p^{\#}(K)$的连续性，存在一数$r>0$使得

$$\max_{j=1,2,\cdots,p}\left|\frac{1}{T}\int_0^T\omega_j\,(\chi_t^\#(\gamma),K)dt\right|\leqq r \tag{2.9}$$

对所有 $\gamma\in\mathscr{F}_p^\#(K)$ 及$T\in(-\infty,0)\cup(0,\ \infty)$。

命题2.2 对于上给的$\sigma(p)$，$\Lambda(\sigma(p))$及$\Theta(\sigma(p))$都是$\mathscr{F}_p^\#(K)$ 的 $\chi_t^\#$-不变子集。

$\Lambda(\sigma(p))$还是 $\mathscr{F}_p^\#(K)$的 Borel 子集。

证 $\Lambda(\sigma(p))$及$\Theta(\sigma(p))$的不变性可用相类的方式来证。这里只证后者。

引理2.1 设$\gamma\in\Theta(\sigma(p);\ \eta)$ $(s\in(-\infty,\ \infty))$，$\beta=\chi_s^\#(\gamma)$及$\eta>0$任给定。则$\beta\in\Theta\ (\sigma(p);\ 2\eta)$。

事实上，从有界性(2.9)我们易看出存在一整数$\bar{c}>|s|$使得对所有的$t\in(-\infty,\ \infty)$及整数$c\geqq\bar{c}$，

$$|V(\chi_t^\#(\beta);\ k;\ T_c;\ \delta)-V(\chi_t^\#(\gamma);\ k;\ T_c;\ \delta)|\leqq\eta,$$

$$(k=0,1,2,3,\cdots;\ \delta=-1,\ 1.)$$

明显地，在$\dot{\Theta}(\sigma(p),\ \eta)$的上述定义中，不失一般性，对某一给定$i$可取$c\geqq\max\{\bar{c},\ i\}$。由是有

$$\frac{1}{\tau}\sum_{k=0}^{\tau-1}V(\chi_{s(j)T_c}^\#(\beta);\ k;\ T_c;\ \delta)$$

$$\leqq\frac{1}{\tau}\sum_{k=0}^{\tau-1}V(\chi_{s(j)T_c}^\#(\gamma);\ k;\ T_c;\ \delta)+\eta$$

$$\leqq2\eta\qquad(\tau=1,2,3,\cdots;\ j=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\cdots;\ \delta=-1,1)$$

$\Theta(\sigma(p))$的 $\chi_t^\#$-不变性可直接从这引理推出。

关于$\Lambda(\sigma(p))$是$\mathscr{F}_p^\#(K)$的 Borel 子集这论断的证明可沿用 [4, 引理5.2] 的证明方式来进行，只需把彼处的实函数值换成p-维欧氏空间E^p的点即得。

下面对本文目的来说是一个重要的预备定理。

定理2.1 对于上给的$\sigma(p)$，设对于$\mathscr{F}^\#(K)$中一个遍历$\chi_t^\#$-不变的概率测度μ来说有

$$\mu(\Lambda(\sigma(p)))>0.$$

则：

(a) $\Lambda(\sigma(p))\cap\Theta(\sigma(p))$包含$\mathscr{F}_p^\#(K)$的一个$\chi_t^\#$-不变 Borel 子集$\Omega(\sigma(p))$满足

$$\mu(\Omega(\sigma(p)))=1.$$

(b) 对任给的$\eta>0$，$\mathscr{F}_p^\#(K)$有一闭子集$\Omega(\sigma(p),\ \eta)\subset\Lambda(\sigma(p))\cap\Theta(\sigma(p),\ \eta)$满足

$$\mu(\Omega(\sigma(p),\ \eta))>0.$$

证 据命题2.2及μ的遍历性质假设我们有

$$\mu(\Lambda(\sigma(p)))=1 \tag{2.10}$$

简写

$$h(\gamma;\ T,\ \delta)=\max_{j=1,2,\cdots,p}h_j(\gamma;\ T,\ \delta) \tag{2.11}$$

其中

$$h_j(\gamma;\ T,\ \delta)=\left|\sigma_j-\frac{1}{\delta T}\int_0^{\delta T}\omega_j(\mathcal{X}_t^*(\gamma),K)dt\right|,$$

$$(\gamma\in\mathcal{F}_p^*(K)),$$

$(\sigma_j$见$(2.5))$，$0<T<\infty$，$\delta=-1,\ 1$。

我们断言

$$\lim_{T\to\infty}\int_{\mathcal{F}_p^*(K)}h(\gamma;\ T,\ \delta)\mu(d\gamma)=0\qquad(\delta=-1,\ 1)\tag{2.12}$$

易看出这等价于说

$$\lim_{T\to\infty}\int_{\mathcal{F}_p^*(K)}h_j(\gamma;\ T,\ \delta)\mu(d\gamma)=0,$$

$$(\delta=-1,\ 1;\ j=1,2,\cdots,p)\tag{2.13}$$

要看出这点，考虑积分[4],[7]

$$\vartheta_j(\mu,\ K)=\int_{\mathcal{F}_p^*(K)}\omega_j(\gamma,\ K)\mu(d\gamma)\qquad(j=1,2,\cdots,p)$$

据(2.10)及μ的遍历性，所有对$j=1,2,\cdots,p$满足

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\omega_j(\mathcal{X}_t^*(\gamma),\ K)dt=\vartheta_j(\mu,K)$$

的$\gamma\in\Lambda(\sigma(p))$作成的集合是$\mu$-可测的，具有$\mu$-测度1。用(2.9)～(2.10)，据定义所有满足

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\omega_j(\mathcal{X}_t^*(\gamma),\ K)dt=\sigma_j\qquad(j=1,2,\cdots,p)$$

的$\gamma\in\Lambda(\sigma(p))$作成的集合也具有$\mu$-测度1。故

$$\sigma_j=\vartheta_j(\mu,K)\qquad(j=1,2,\cdots,p)。$$

于是可应用[12，第六章§7中一定理]得出结论：

$$\int_{\mathcal{F}_p^*(K)}\left|\sigma_j-\frac{1}{T}\int_a^{a+T}\omega_j(\mathcal{X}_t^*(\gamma),\ K)dt\right|\mu(d\gamma)$$

$$\to 0\text{对}T\to\infty$$

这收敛性对所有$a\in(-\infty,\ \infty)$是一致的。这立即导出(2.13)对于$\delta=1$，只须取$a=0$。对于$\delta=-1$，这也蕴涵(2.13)，因为置$a=-T$就有

$$\frac{1}{T}\int_{-T}^0\omega_j(\mathcal{X}_t^*(\gamma),\ K)dt=\frac{1}{-T}\int_0^{-T}\omega_j(\mathcal{X}_t^*(\gamma),K)dt.$$

这证明断语(2.12)。

下面我们将先证明定理2.1中的结论(b)。

设$\eta>0$任给定。据(2.12)存在一整数$d=d(\eta)\geqq1$使得

$$\int_{\mathcal{F}_p^*(K)}h(\gamma;\ T_d;\ \delta)\mu(d\gamma)\leqq\eta/30\qquad(\delta=-1,\ 1)\tag{2.14}$$

$(T_d$见$(2.2))$。

考虑μ-保测拓扑映射

$$\rho=\mathcal{X}_T^*:\mathcal{F}_p^*(K)\to\mathcal{F}_p^*(K)$$

其中　$T=T_d$。应用Birkhoff遍历性定理（例见[13，p.34]）到ρ^δ及γ的连续函数$h(\gamma;\ T_d,\ \delta)$，$\delta=-1,\ 1$，$\mathcal{F}_p^*(K)$有一μ-可测子集X具有$\mu(X)=1$，且使得对所有$\gamma\in X$及$\delta=-1,1$，

极限

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\sum_{k=0}^{\tau-1}h(\rho^{\delta k}(\gamma;\ T_d,\delta))=h^*(\gamma;\ T_d,\ \delta)$$

存在。这以及(2.14)给出

$$\int_{\mathscr{F}_p^*(K)}h^*(\gamma;\ T_d,\ \delta)\mu(d\gamma)$$

$$=\int_{\mathscr{F}_p^*(K)}h(\gamma;\ T_d,\ \delta)\mu(d\gamma)\leqq\eta/30.$$

由是 $\{\gamma\in\mathscr{F}_p^*(K)\,|\,h^*(\gamma;\ T_d,\ \delta)>\eta/2\}$是$\mathscr{F}_p^*(K)$ 中一 μ-可测子集具有 μ-测度 $\leqq 1/12$, $\delta=-1$, 1. 进一步用 Egoroff 定理 (例见[11, p.77]), X有一μ-可测子集Y并有一整数 $\bar{\tau}\geqq 1$使得

$$\left.\begin{aligned}&\mu(\mathscr{F}_p^*(K)-Y)\leqq 1/4,\\&\frac{1}{\tau}\sum_{k=0}^{\tau-1}h(\rho^{\delta k}(\gamma);\ T_d,\ \delta)\leqq\eta\end{aligned}\right\}\tag{2.15}$$

对所有$\gamma\in Y$及$\tau\geqq\bar{\tau}$, $\delta=-1$, 1. 置$D(\eta)$为Y在$\mathscr{F}_p^*(K)$中的闭包。则从$h(\gamma;\ T_d,\ \delta)$对γ 的连续性有

$$\mu(D(\eta))\geqq 3/4\tag{2.16}$$

且(2.15)对所有$\gamma\in D(\eta)$及$\tau\geqq\bar{\tau}$, $\delta=-1$, 1, 仍成立。

现在命$\zeta(\gamma)$为$D(\eta)$ 在 $\mathscr{F}_p^*(K)$中的特征函数。又命

$$\phi:\ \mathscr{F}_p^*(K)\to\mathscr{F}_p^*(K)$$

为任意的μ-保测满拓扑映射。考虑

$$\bar{\zeta}(\gamma;\ \phi,\ \delta)=\overline{\lim_{\tau\to\infty}}\frac{1}{\tau}\sum_{k=0}^{\tau-1}\zeta(\phi^{\delta k}(\gamma)),$$

$$(\gamma\in\mathscr{F}_p^*(K);\ \delta=-1,1).$$

因$D(\eta)$ 在 $\mathscr{F}_p^*(K)$中闭, $\zeta(\gamma)$是 Baire 函数, 由是$\bar{\zeta}(\gamma;\ \phi,\ \delta)$对每一$\delta=-1$, 1 也是$\gamma\in\mathscr{F}_p^*(K)$的 Baire 函数。命

$$\left.\begin{aligned}&E(\eta,\phi,\delta)=\{\gamma\in\mathscr{F}_p^*(K)\,\big|\,\bar{\zeta}(\gamma;\ \phi,\ \delta)>0\}\qquad(\delta=-1,\ 1)\\&E(\eta,\ \phi)=E(\eta,\ \phi,\ -1)\cap E(\eta,\ \phi,\ 1)\end{aligned}\right\}\tag{2.17}$$

这些是$\mathscr{F}_p^*(K)$中的 Borel 子集。

我们断言

$$\mu(E(\eta,\ \phi))\geqq 1/2\tag{2.18}$$

事实上, 再用 Birkhoff 遍历定理, $\mathscr{F}_p^*(K)$有一μ-可测子集Z使得$\mu(Z)=1$且对所有的$\gamma\in Z$, $\delta=-1$, 1, 有极限

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\sum_{k=0}^{\tau-1}\zeta(\phi^{\delta k}(\gamma))=\zeta^*(\gamma;\ \phi,\ \delta),$$

并且

$$\int_Z \zeta^*(\gamma;\ \phi,\ \delta)\mu(d\gamma)=\int_Z \zeta(\gamma)\mu(d\gamma)$$

它$=\mu(D(\eta))$，因为$\zeta(\gamma)$是$D(\eta)$在$\mathscr{F}_p^*(K)$中的特征函数。明显地，对所有的$\gamma\in Z$，$\delta=-1,1$有

$$1\geqq\bar{\xi}(\gamma;\ \phi,\ \delta)\geqq\zeta^*(\gamma;\ \phi,\ \delta)\geqq 0$$

由是对$\delta=-1$，1，

$$\mu(E(\eta;\ \phi,\ \delta)\geqq\int_{\mathscr{F}_p^*(K)}\bar{\xi}(\gamma;\ \phi,\ \delta)\mu(d\gamma)$$

$$\geqq\int_Z \zeta^*(\gamma;\ \phi,\ \delta)\mu(d\gamma)=\mu(D(\eta))\geqq 3/4.$$

这给出断语(2.18)。

现在，我们对每一给定整数$i\geqq 1$取ϕ为

$$\phi_i=\chi_T^*;\ \mathscr{F}_p^*(K)\to\mathscr{F}_p^*(K)$$

其中$T=T_{c(i,\eta)}$（见(2.2)）而$c(i,\ \eta)$是一整数$\geqq i$使得

$$2^{c(i,\eta)-d}\geqq\bar{\tau}.$$

进一步，这些整数将如是取使满足

$$c(i,\ \eta)<c(i+1,\ \eta)\qquad(i=1,2,3,\cdots).\tag{2.19}$$

明显地，

$$T_{c(i,\eta)}=2^{c(i,\eta)-d}T_d\geqq\bar{\tau}T_d.$$

命$F(\eta,\phi_i)=D(\eta)\cap E(\eta,\ \phi_i)$。则据(2.16)及(2.18)，

$$\mu(F(\eta,\phi_i))\geqq 1/4\tag{2.20}$$

考虑一任给的$\gamma\in F(\eta,\ \phi_i)$对给定的$i$。据(2.17)及$\bar{\xi}(\gamma;\ \phi_i,\ \delta)$的定义，我们有一双向整数叙列

$$\cdots<s(-3)<s(-2)<s(-1)<0=s(0)$$
$$<s(1)<s(2)<s(3)<\cdots$$

对应于γ，使得

$$\zeta(\phi_i^{s(j)}(\gamma))=1,\ \text{即}\ \phi_i^{s(j)}(\gamma)\in D(\eta),$$
$$(j=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\cdots)$$

从而据(2.6)，(2.10)及(2.15)（它对$\phi_i^{s(j)}(\gamma)\in D(\eta)$成立）对于

$$b(i,\ \eta,\ d)=2^{c(i,\eta)-d}$$

我们有

$$\frac{1}{\tau}\sum_{k=0}^{\tau-1}V(\phi_i^{s(j)}(\gamma);\ k;\ T_{c(i,\eta)};\ \delta)$$

$$\leqq\frac{1}{\tau b(i,\eta,d)}\sum_{k=0}^{\tau b(i,\eta,d)-1}h(\rho^{\delta k}(\phi_i^{s(j)}(\gamma));\ T_d;\ \delta)$$

$$\leqq\eta\qquad(\tau=1,2,3,\cdots;\ j=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\cdots;\ \delta=-1,\ 1)\tag{2.21}$$

这样来，如果取

$$F(\eta)=\bigcap_{i=1,2,3,\cdots} F(\eta,\phi_i),$$

则$F(\eta)$是$\mathscr{F}_p^\#(K)$的 Borel 子集. 因(2.19)蕴涵

$$F(\eta,\phi_i)\supset F(\eta,\phi_{i+1}) \qquad (i=1,2,3,\cdots),$$

据(2.20)及(2.10)我们有

$$\mu(\Lambda(\sigma(p))\cap F(\eta))=\mu(F(\eta))\geqq 1/4.$$

并且，据(2.19)，(2.21)及$\Theta(\sigma(p),\eta)$的定义，

$$F(\eta)\subset\Theta(\sigma(p),\eta).$$

结合这些及测度论中一通常论据可取$\mathscr{F}_p^\#$中一闭子集$\Omega(\sigma(p),\eta)$使得

$$\mu(\Omega(\sigma(p),\eta))>0 \tag{2.22}$$

$$\Omega(\sigma(p),\eta)\subset\Lambda(\sigma(p))\cap F(\eta).$$

这证明定理2.1-(b).

于是从$\mathscr{F}_p^\#$(K)的紧致性及$\chi_t^\#(-\infty<t<\infty)$是$\mathscr{F}_p^\#(K)$上的变换群这事实，

$$\Omega_k(\eta)=\bigcup_{t\in\langle -k,k\rangle}\chi_t^\#(\Omega(\sigma(p),\eta))$$

是$\mathscr{F}_p^\#(K)$中一闭子集，$k=1,2,3,\cdots$. 由是

$$\Omega_\infty(\eta)=\bigcup_{k=1,2,3,\cdots}\Omega_k(\eta)$$

是$\mathscr{F}_p^\#(K)$中一$\chi_t^\#$-不变的 Borel 子集. 进而据(2.22)及μ的遍历性，

$$\mu(\Omega_\infty(\eta))=1;$$

从引理2.1，$\Omega_\infty(\eta)\subset\Theta(\sigma(p),2\eta)$. 最后，取

$$\Omega(\sigma(p))=\bigcap_{k=1,2,3,\cdots}\Omega_\infty(1/k)$$

即证明定理2.1-(a)，并完成这定理的证明.

如同([4],[7])中，$I(\mathscr{L}_p(K),\ \varphi_t)$及$I\ (\mathscr{F}_p^\#(K),\ \chi_t^\#)$将分别表示$\mathscr{L}_p(K)$上所有遍历$\varphi_t$-不变概率测度及$\mathscr{F}_p^\#(K)$上所有遍历$\chi_t^\#$-不变概率测度作成的集合. 对于$\nu\in I(\mathscr{L}_p(K),\ \varphi_t)$命$L_p(\nu)$为所有既是$\nu$的准规则点又是$\nu$的稠密点的$[H]\in\mathscr{L}_p(K)$作成的集合. 据一些周知的结果(例如[12,第6章§9])，$L_p(\nu)$是$\mathscr{L}_p(K)$中一φ_t-不变的 Borel 子集具有$\nu(L_p(\nu))=1$. 据[4; 引理2.1及系4.2]我们可取$\mu\in I\ (\mathscr{F}_p^\#(K),\ \chi_t^\#)$使得

$$\xi_*(\mu)=\nu$$

其中ξ_*由ξ（见(2.1)）导出，且使得

$$\vartheta_1(\mu,K)\leqq\vartheta_2(\mu,K)\leqq\cdots\leqq\vartheta_p(\mu,K) \tag{2.23}$$

其中

$$\vartheta_j(\mu,K)=\int_{\mathscr{F}_p^\#(K)}\omega_j(\gamma,K)\mu(d\gamma) \qquad (j=1,2,\cdots,p).$$

在[7]中我们定义了集合$\Gamma_p^*(\nu)$，它包含在$L_p(\nu)$内且是$\mathscr{L}_p(K)$的φ_t-不变 Borel 子集具有$\nu(\Gamma_p^*(\nu))=1$. 如我们在[7; §§2,3]中所证，对于$\lambda(m)=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\ \lambda_m)\in J\ (m)$及$q(m)=(q_1,q_2,\cdots,q_m)\in Q(m)$来说，$\Gamma(\lambda(m),\ q(m))$中一点$[H]$也在$\Gamma_p^*(\nu)$中的充要条件是$[H]\in\Gamma(\lambda(m),\ q(m))\cap L_p(\nu)$且每个$\lambda_j$出现在(2.23)数列中，出现的次数恰为$q_j$. 而$\mathscr{L}_p(K)$

中一点也在$\Gamma(\lambda(m),\ q(m))$中的条件则可用命题2.1来刻划.

命题2.3 命$\nu\in I(\mathscr{L}_p(K),\ \varphi_t)$及$\mu\in I(\mathscr{F}_p^*(K),\ \chi_t^*)$满足$\xi_*(\mu)=\nu$及(2.23). 设数列(2.5)即为(2.23). 则$\mathscr{F}_p^*(K)$有一μ-可测子集具有μ-测度1且包含在$A(\sigma(p))$内.

这命题的一个证明可在[4,引理5,9]中找到.

三、一个样品方程组

在进一步的讨论中，我们将要用到典泛方程组[4]中的一些技术. 作为开始，我们研究一个微分方程组，它的形式看起来不十分简单，但是适用于本文的目的. 这是定义在E^p上的一个非自治系统

$$(*)\qquad \frac{dz}{dt}=zA(t)+f(t,z)\qquad ((t,z)\in(-\infty,\infty)\times E^p),$$

具有下述性质(Ⅰ)～(Ⅲ).

(Ⅰ) 对所有$t\in(-\infty,\infty)$, $A(t)$是三角式的$p\times p$方阵，对角线以上的系数都是0，对t连续且在$(-\infty,\infty)$上有界:

$$\sup_{t\in(-\infty,\infty)} N(A(t))\leqq\bar{\eta}<\infty. \tag{3.1}$$

(对每一$m\times m$方阵F记$N(F)=\sup\limits_{z\in E^m,\|z\|=1}\|zF\|$.)

(Ⅱ) 有常数

$$\lambda>0,\ T>1\text{及}\ \pi=\frac{1}{16}\min\{1,\lambda\} \tag{3.2}$$

以及一双向整数叙列

$$\cdots<s(-3)<s(-2)<s(-1)<0=s(0)$$
$$<s(1)<s(2)<s(3)<\cdots$$

它们对一整数$q\in\langle 0,p\rangle$来说满足

$$-\lambda\leqq\frac{1}{m}\sum_{\tau=0}^{m-1}\max\left\{-\lambda,\ \max_{j=1,2,\cdots,q}\left\{\frac{1}{\delta T}\int_{\tau\delta T}^{(\tau+1)\delta T}\operatorname{diag}_j A(s(k)T+t)dt\right\}\right\}$$
$$\leqq-\lambda+\pi,$$

且

$$\lambda-\pi\leqq\frac{1}{m}\sum_{\tau=0}^{m-1}\min\left\{\lambda,\ \min_{j=q+1,\cdots,p}\left\{\frac{1}{\delta T}\int_{\tau\delta T}^{(\tau+1)\delta T}\operatorname{diag}_j A(s(k)T+t)dt\right\}\right\}$$
$$\leqq\lambda,$$

$$(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\cdots;\ m=1,2,3,\cdots;\ \delta=-1,1)$$

(Ⅲ) $f(t,z)$对(t,z)连续且在$(-\infty,\infty)\times E^p$上有界:

$$\sup_{(t,z)\in(-\infty,\infty)\times E^p}\|f(t,z)\|\leqq\bar{\bar{\eta}}<\infty, \tag{3.3}$$

且$f(t,z)$在$(-\infty,\infty)$上满足 Lipschitz 条件具有 Lipschitz 常数 Lip(f):

$$\|f(t,z)-f(t,z')\|\leqq \mathrm{Lip}(f)\|z-z'\| \tag{3.4}$$

对所有(t,z)及$(t,z')\in(-\infty,\infty)\times E^p$。

这样来，经过每一$u\in E^p$系统$(*)$有唯一解

$$z_*(t,u) \qquad (-\infty<t<\infty) \tag{3,5}$$

使$z_*(0,u)=u$，同时线性方程组

$$\frac{dz}{dt}=zA(t) \quad (-\infty<t<\infty) \tag{3.6}$$

也有唯一解

$$z(t,u) \qquad (-\infty<t<\infty) \tag{3.7}$$

使$z(0,u)=u$。任给$\bar{u}$及$u\in E^p$，为方便我们将称$z(t,\bar{u})$与$z_*(t,u)$点式有界，如果存在一双向整数叙列$\{m(k)\}=\{m(k;\ \bar{u},\ u)\}$满足

$$\cdots<m(-3)<m(-2)<m(-1)<0=m(0)$$
$$<m(1)<m(2)<m(3)<\cdots$$

且使得

$$\sup_{k=0,\pm2\pm3,\pm3,\cdots}\|z(m(k)T,\bar{u})-z_*(m(k)T,u)\|<\infty.$$

定理3.1 系统$(*)$及(3.6)的解以下述方式相关联：对每一$u\in E^p$存在唯一的

$$\Delta_*(u)\in E^p$$

使得$z(t,\Delta_*(u))$与$z_*(t,u)$点式有界，且对所有的$u\in E^p$由

$$u\mapsto\Delta_*(u)$$

给出一满自映射

$$\Delta_*:\ E^p\to E^p.$$

这定理的证明将完成在部份Ⅱ。

参 考 文 献

[1] V. I. Oseledec, A multiplicative ergodic theorem, Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems, *Trudy Mosk. Mat. Obsce.* **19** (1969), 179—210.

[2] R. J. Sacker and G. R. Sell, A spectral theory for linear differential systems, *J. Differential Equations*, **27** (1978), 320—358.

[3] R. A. Johnson, K. J. Palmer and G. R. Sell, Ergoic properties of linear dynamical systems, *SIAM J. Math. Anal.*, **18** (1987), 1—33.

[4] S. T. Liao, On characteristic exponents construction of a new Borel set for the multiplicative ergodic theorem for vector fields, *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinensis*, **29** (1993), 277—302.

[5] J. Palis and W. Melo, *Geometric Theory of Dynamical Systems*, Springer-Verlag (1982).

[6] 廖山涛，典范方程组，数学学报，**17** (1974)，100—109；175—196；270—295.

[7] 廖山涛，向量丛动力系统研究注记（Ⅰ），应用数学和力学，16(9)(1995)，757—766.

[8] Ya. Pesin, Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory, *Uspehi Mat. Nauk*, **32** (1977), 55—112.

[9] C. Pugh and M. Shub, Ergodic Attractors, Trans. AMS., **312** (1989), 1—54.

[10] C. Pugh, The $C^{1+\alpha}$ hypothesis in Pesin theory, *Publ. Math. IHES*, **59** (1984), 43—161.

[11] H. Fedrer, *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag (1969).
[12] V. Nemyškii and V. Stepunov, *Qualitative Theory of Differential Equations*, Princeton University Press (1960).
[13] P. Walters, *An Introduction to Ergodic Theory*, Springer-Verlag (1982).

Notes on a Study of Vector Bundle Dynamical Systems (Ⅱ)——Part1

Liao Shantao

(*Mathematics Department, Peking University, Beijing* 100871, *P.R. China*)

Abstract

The study of linear and global properties of linear dynamical systems on vector bundles appeared rather extensive already in the past. Presently we propose to study perturbations of this linear dynamics. The perturbed dynamical system which we shall consider is no longer linear while the properties to be studied will be still global in general. Moreover, we are interested in the nonuniformly hyperbolic properties. In this paper we set an appropriate definition for such perturbations. Though it appears somewhat not quite usual, yet has deeper root in standard systems of differential equations in the theory of differentiable dynamical systems. The general problem is to see which property of the original given dynamical system is persistent when a perturbation takes place. The whole content of the paper is devoted to establishing a theorem of this sort.

Key words vector bundle dynamics, nonuniform hyperbolicity, ergodicity, admissible perturation, pointwise boundendness