应用数学和力学，第17卷 第9期（1996年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

Hamilton体系与弹性力学Saint-Venant问题*

钟万勰[1] 徐新生[1] 张洪武[1]

（1995年6月5日收到）

摘 要

本文一改传统的在Lagrange体系欧几里德空间中用半逆法讨论Saint-Venant问题的方法，而在具有守恒性的Hamilton体系中辛空间里研究该问题。通过讨论Hamilton算子矩阵的零本征值及其Jordan型，直接求解出全部Saint-Venant问题的解。

关键词 Hamilton体系 Saint-Venant问题 辛 本征值

一、引 言

弹性柱体分析是被研究了百余年的经典课题。由于该问题的偏微分方程组多且复杂，传统的分离变量法无法运用。于是Saint-Venant提出半逆解法[1]，不得不对变形作出适当的假定，然后求解并验证该假定是恰当的。由此成为弹性理论的经典解答[2-4]，弹性柱体两端的边界条件只好静力等价地满足，称为Saint-Venant原理。半逆解法是一种凑合法，并不理想，它只能找到某些解，却无法说明是否还有并如何找到其他解。

从计算结构力学与最优控制的模拟理论[5~6]来看，可以将Hamilton体系的理论引入到弹性力学之中[7]，在辛几何空间中导出一套横向Hamilton算子矩阵的本征函数展开法，使求解方法达到一个新的境界。由此拓广了Sturm-Liouville问题及传统的分离变量法。根据Hamilton体系的分离变量法，可以证明其本征向量函数之间存在共轭辛正交归一关系及其展开定理[7]。其中零本征值及其所对应的本征向量及Jordan型具有特殊重要的意义[8]。本文将证明，Saint-Venant半逆法求解的拉伸问题，扭转问题，弯曲问题等的解全部对应于Hamilton算子矩阵零本征值多重根的Jordan型相应的解。它完全解除了任何半逆法的假定，给Saint-Venant求得的这些解在整个解空间中定了位。并且可以证明相应于零本征值问题已不存在其它形式的解，即Saint-Venant半逆法求得的解已经是零本征值相应解的全部了。

二、基本方程

讨论各向同性均匀单连通弹性柱形体，选择坐标系(x, y, z)，其中z轴为其母线方向，

* 国家自然科学基金与教委博士点基金资助项目.
1 大连理工大学工程力学研究所，大连 116023.

坐标原点在横截面Ω的中心点处．Ω为单连通域，其周界$\partial\Omega$的外法线n具有方向余弦(l, m)．在周界$\partial\Omega$上有自由边界条件：

$$\left.\begin{array}{l} l\tau_{xz}+m\tau_{yz}=0 \\ l\sigma_x+m\tau_{xy}=0 \\ l\tau_{xy}+m\sigma_y=0 \end{array}\right\} \tag{2.1}$$

这里符号记法同文献[2]．应变与位移关系可描述为：

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_x=\dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y=\dfrac{\partial v}{\partial y}, \gamma_{xy}=\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{xz}=\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dot{u}, \quad \gamma_{yz}=\dfrac{\partial w}{\partial y}+\dot{v}, \quad \varepsilon_z=\dot{w} \end{array}\right\} \tag{2.2}$$

其中记$(\dot{\ })=\dfrac{\partial}{\partial z}(\quad)$，即$z$为模拟时间．令

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon=\{\varepsilon_x, \ \varepsilon_y, \ \gamma_{xy}, \ \gamma_{xz}, \ \gamma_{yz}, \ \varepsilon_z\}^T \\ \sigma=\{\sigma_x, \ \sigma_y, \ \tau_{xy}, \ \tau_{xz}, \ \tau_{yz}, \ \sigma_z\}^T \end{array}\right\} \tag{2.3}$$

则应力-应变关系可写成

$$\sigma=\boldsymbol{D}_6\varepsilon, \quad \boldsymbol{D}_6=\begin{bmatrix} \lambda+2G & \lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda+2G & 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \lambda+2G \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

平衡方程可由以下最小势能原理导出

$$U=\int_0^L\iint_\Omega \frac{1}{2}\varepsilon^T\boldsymbol{D}_6\varepsilon dxdydz, \quad \min_{u,v,w} U \tag{2.5}$$

(2.5)式表明不存在体力与侧向面力的情况，而只有两个端面$z=0$，L才有外力．于是平衡方程为

$$\left.\begin{array}{l} \dot{\tau}_{xz}=-\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}-\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} \\ \dot{\tau}_{yz}=-\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}-\dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y} \\ \dot{\sigma}_z=-\dfrac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}-\dfrac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} \end{array}\right\} \tag{2.6}$$

其中应力应当用位移来表示．

可以看出位移法是Lagrange表达方法．其位移向量与势能密度为：

$$\boldsymbol{q}=\{u, \ v, \ w\}^T, \quad L(\boldsymbol{q}, \ \dot{\boldsymbol{q}})=\frac{1}{2}\varepsilon^T\boldsymbol{D}_6\varepsilon \tag{2.7}$$

其对偶向量为

$$\boldsymbol{p}=\frac{\partial L}{\partial\dot{\boldsymbol{q}}}=\{\tau_{xz}, \ \tau_{yz}, \ \sigma_z\}^T. \tag{2.8}$$

利用互为对偶的向量$\boldsymbol{q}$与$\boldsymbol{p}$，研究在 Hamilton 体系下的基本方程．注意到应力-应变

关系(2.4)的后三式可描述为

$$\left.\begin{aligned}\dot{u}&=-\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\tau_{xz}}{G}\\ \dot{v}&=-\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\tau_{yz}}{G}\\ \dot{w}&=-\frac{\lambda}{\lambda+2G}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\sigma_z}{\lambda+2G}\end{aligned}\right\}\tag{2.9}$$

另一方面，由平衡方程(2.6)，将应力-应变关系(2.4)前三式中σ_x，σ_y和τ_{xy}消去，于是

$$\left.\begin{aligned}\dot{\tau}_{xz}&=-\frac{4G(\lambda+G)}{\lambda+2G}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-G\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(G+\frac{2\lambda G}{\lambda+2G}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\lambda}{\lambda+2G}\frac{\partial\sigma_z}{\partial x}\\ \dot{\tau}_{yz}&=-\left(G+\frac{2\lambda G}{\lambda+2G}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{4G(\lambda+G)}{\lambda+2G}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-G\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\lambda}{\lambda+2G}\frac{\partial\sigma_z}{\partial y}\\ \dot{\sigma}_z&=-\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}-\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}\end{aligned}\right\}\tag{2.10}$$

将(2.9)和(2.10)写成矩阵与向量形式，有

$$\begin{Bmatrix}\dot{\boldsymbol{q}}\\ \dot{\boldsymbol{p}}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{D}\\ \boldsymbol{B} & -\boldsymbol{A}^T\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{q}\\ \boldsymbol{p}\end{Bmatrix}\tag{2.11}$$

其中矩阵

$$\left\{\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=\begin{bmatrix}0 & 0 & -\dfrac{\partial}{\partial x}\\ 0 & 0 & -\dfrac{\partial}{\partial y}\\ \dfrac{-\lambda}{\lambda+2G}\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{-\lambda}{\lambda+2G}\dfrac{\partial}{\partial y} & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}^T=\begin{bmatrix}0 & 0 & \dfrac{\lambda}{\lambda+2G}\dfrac{\partial}{\partial x}\\ 0 & 0 & \dfrac{\lambda}{\lambda+2G}\dfrac{\partial}{\partial y}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & 0\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{B}&=\begin{bmatrix}-\dfrac{4G(\lambda+G)}{\lambda+2G}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-G\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} & -\left(G+\dfrac{2\lambda G}{\lambda+2G}\right)\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y} & 0\\ -\left(G+\dfrac{2\lambda G}{\lambda+2G}\right)\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y} & -\dfrac{4G(\lambda+G)}{\lambda+2G}\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}-G\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{D}&=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{G} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1}{G} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\lambda+2G}\end{bmatrix}\end{aligned}\right.\tag{2.12}$$

这里 $\boldsymbol{A}^T$是$\boldsymbol{A}$的相伴算子，负号是由分部积分引起的。方程(2.11)应有相应的侧边周界条件，即由正则变量$\boldsymbol{q}$和$\boldsymbol{p}$所描述：

$$\left.\begin{aligned}&l\frac{4G(\lambda+G)}{\lambda+2G}\frac{\partial u}{\partial x}+mG\frac{\partial u}{\partial y}+l\frac{2G\lambda}{\lambda+2G}\frac{\partial v}{\partial y}+mG\frac{\partial v}{\partial x}+l\frac{\lambda}{\lambda+2G}\sigma_z=0\\&lG\frac{\partial u}{\partial y}+m\frac{2\lambda G}{\lambda+2G}\frac{\partial u}{\partial x}+lG\frac{\partial v}{\partial x}+m\frac{4G(\lambda+G)}{\lambda+2G}\frac{\partial v}{\partial y}+m\frac{\lambda}{\lambda+2G}\sigma_z=0\\&l\tau_{xz}+m\tau_{yz}=0\end{aligned}\right\}\tag{2.13}$$

也可写成变分形式，取

$$\begin{aligned}H(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{p})=&-\frac{1}{2}\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{q}+\frac{1}{2}\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{B}\boldsymbol{q}\\=&-\frac{\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2}{2G}-\frac{\sigma_z^2}{2(\lambda+2G)}+\tau_{xz}\frac{\partial w}{\partial x}+\tau_{yz}\frac{\partial w}{\partial y}\\&+\frac{\lambda\sigma_z}{\lambda+2G}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}\frac{4G(\lambda+G)}{(\lambda+2G)}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\\&+\frac{2G\lambda}{\lambda+2G}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}G\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\end{aligned}\tag{2.14}$$

则变分式

$$V=\int_0^L\iint_\Omega[\boldsymbol{p}^T\dot{\boldsymbol{q}}-H(\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{p})]dxdydz,\quad \delta V=0\tag{2.15}$$

其中 u，v，w，τ_{xz}，τ_{yz}，σ_z是独立变分的量．由此可导出全部的方程(2.11)及侧边的边界条件(2.13)。

三、分离变量和零本征值问题

方程(2.11)已可分离变量．令

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{D}\\ \boldsymbol{B} & -\boldsymbol{A}^T\end{bmatrix},\quad \psi=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{q}\\ \boldsymbol{p}\end{Bmatrix}\tag{3.1}$$

其中可导出本征方程

$$\boldsymbol{H}\psi=\gamma\psi\tag{3.2}$$

这里γ是本征值．由于$\boldsymbol{H}$为Hamilton算子矩阵[7]，故

$$\boldsymbol{JHJ}=\boldsymbol{H}^T,\quad \boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}0 & \boldsymbol{I}\\ -\boldsymbol{I} & 0\end{bmatrix}\tag{3.3}$$

可以证明本征向量之间有共轭辛正交归一关系（可参见文[7]）．

由于弹性柱体周边自由，必然会出现零本征值，并且会出现 Jordan型的各阶次本征向量[7~8]．Saint-Venant求解的拉伸、扭转及弯曲等课题都可以由零本征值的各阶次本征解逐个导出，而不必作任何假定．以下将详细介绍．

1 零本征值问题的解

取(3.2)中本征值$\gamma=0$，其本征方程$\boldsymbol{H}\psi=0$只有以下 4 个基本本征向量

$$\left.\begin{aligned}
&\psi_1^{(0)}=\{u_1^{(0)}=1;\ v_1^{(0)}=0;\ w_1^{(0)}=0;\ \tau_{xz1}^{(0)}=0;\ \tau_{yz1}^{(0)}=0;\ \sigma_{z1}^{(0)}=0\}^T\\
&\psi_2^{(0)}=\{0;\ 1;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0\}^T\\
&\psi_3^{(0)}=\{0;\ 0;\ 1;\ 0;\ 0;\ 0\}^T\\
&\psi_4^{(0)}=\{y;\ -x;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0\}^T
\end{aligned}\right\}\tag{3.4}$$

这四个解的几何解释是x与y方向上的平移，轴向平移及柱体的自转，皆为刚体位移。

2 第1级Jordan型解注）

以下要寻求1级Jordan型本征向量．注意到此时方程为

$$H\psi_i^{(1)}=\psi_i^{(0)}\qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4)\tag{3.5}$$

将方程(3.5)展开，有

$$-\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\tau_{xz}}{G}=u_i^{(j)}\tag{3.6}$$

$$-\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\tau_{yz}}{G}=v_i^{(j)}\tag{3.7}$$

$$-\frac{\lambda}{\lambda+2G}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\sigma_z}{\lambda+2G}=w_i^{(j)}\tag{3.8}$$

$$-\frac{4G(\lambda+G)}{\lambda+2G}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-G\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(G+\frac{2\lambda G}{\lambda+2G}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$
$$-\frac{\lambda}{\lambda+2G}\frac{\partial\sigma_z}{\partial x}=\tau_{xzi}^{(j)}\tag{3.9}$$

$$-\left(G+\frac{2\lambda G}{\lambda+2G}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{4G(\lambda+G)}{\lambda+2G}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-G\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$
$$-\frac{\lambda}{\lambda+2G}\frac{\partial\sigma_z}{\partial y}=\tau_{yzi}^{(j)}\tag{3.10}$$

$$-\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}-\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}=\sigma_{zi}^{(j)}\tag{3.11}$$

这里左端u，v，w，τ_{xz}，τ_{yz}，σ_z本来应当有上标$(j+1)$和下标i的，省略是为了书写简便．在讨论本节的问题时$j=0$，$i=1$，2，3，4，此外侧边条件(2.13)也须满足．

当$i=1$，2时，很容易找到解$\psi_i^{(1)}(i=1,\ 2)$，为

$$\left.\begin{aligned}
&\psi_1^{(1)}=\{0,\ 0,\ -x,\ 0,\ 0,\ 0\}^T\\
&\psi_2^{(1)}=\{0,\ 0,\ -y,\ 0,\ 0,\ 0\}^T
\end{aligned}\right\}\tag{3.12}$$

这里应该指出，求解过程中，(3.4)中的解的线性组合可任意迭加，不过这只能引起无谓重复，因而略去．(3.12)解$\psi_1^{(1)}$和$\psi_2^{(1)}$只是次级本征向量，并非直接就是原问题的解．与它们相对应的原问题的解为

$$\psi=\begin{Bmatrix}q\\p\end{Bmatrix}=\psi_1^{(1)}+z\psi_1^{(0)}=\{z,\ 0,\ -x,\ 0,\ 0,\ 0\}^T\tag{3.13}$$

注）重本征根的Jordan型的解本来是矩阵代数中的概念，这里用于偏微分方程的本征问题．

$$\psi=\psi_2^{(1)}+z\psi_2^{(0)}=\{0,\ z,\ -y,\ 0,\ 0,\ 0\}^T \tag{3.14}$$

可以看出解(3.13)代表绕y轴的刚体旋转；而(3.14)解表示对x轴的刚体旋转。由此得知如何运用这些次级本征向量的方法。

对于$i=3$，对(3.6)～(3.11)求解可得到次级本征向量得解：

$$\psi_3^{(1)}=\{ex,\ ey,\ 0,\ 0,\ 0,\ s\}^T \tag{3.15}$$

其中 $e=-\lambda/[2(\lambda+G)]$，$s=2G+G\lambda/(\lambda+G)$。同样组成原方程得解为

$$\psi=\psi_3^{(1)}+z\psi_3^{(0)}=\{ex,\ ey,\ z,\ 0,\ 0,\ s\}^T \tag{3.16}$$

其物理意义是简单单向拉伸解。

在讨论$i=4$情况时，次级本征解为

$$\psi_4^{(1)}=\left\{0,\ 0,\ \varphi,\ G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right),\ G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right),\ 0\right\}^T \tag{3.17}$$

因而关于Saint-Venant自由扭转问题的解可被描述为

$$\psi=\psi_4^{(1)}+z\psi_4^{(0)}=\left\{-yz,\ xz,\ \varphi,\ G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-y\right),\ G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+x\right),\ 0\right\}^T \tag{3.18}$$

其中函数φ为以下Newmann问题的解：

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2\varphi=0\\&\frac{d\varphi}{dn}\bigg|_{\partial\Omega}=ly-mx\end{aligned}\right\} \tag{3.19}$$

该解就是Saint-Venant找到的自由扭转解[2~4]。不难验证$\int_{\partial\Omega}\frac{d\varphi}{dn}ds=0$，因此(3.19)必有解。

3 第2级Jordan型解

前面已经讨论了第1级Jordan型的解，对于4个基本本征向量都找到了相应的Jordan型。下面继续寻求更下一层次的Jordan型。方程为

$$H\psi_i^{(2)}=\psi_i^{(1)}\qquad(i=1,\ 2,\ 3,\ 4). \tag{3.20}$$

其展开形式如同(3.6)～(3.11)（这里$i=1$）。侧边条件仍一样。以下逐个求解之。

当$i=1$时，将解(3.12)第一式代入(3.20)中，此时由于$u_1^{(1)}$，$v_1^{(1)}$，$\sigma_{z1}^{(1)}$皆为零，方程(3.20)($i=1$)会同边界条件将给出$\tau_{xz1}^{(2)}=\tau_{yz1}^{(2)}=w_1^{(2)}=0$。再将其余方程中消去$\sigma_{z1}^{(2)}$，经整理有

$$\left.\begin{aligned}&(\lambda+2G)\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+G\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+(\lambda+G)\frac{\partial^2v}{\partial x\partial y}-\lambda=0\\&(\lambda+G)\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+G\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+(\lambda+2G)\frac{\partial^2v}{\partial y^2}=0\end{aligned}\right\} \tag{3.21}$$

及边界条件

$$\left.\begin{aligned}&l(\lambda+2G)\frac{\partial u}{\partial x}+l\lambda\frac{\partial v}{\partial y}+mG\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)-l\lambda x=0\\&m\lambda\frac{\partial u}{\partial x}+m(\lambda+2G)\frac{\partial v}{\partial y}+lG\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)-m\lambda x=0\end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

方程组(3.21)同平面应变问题方程一样，非齐次项相当于在 x 方向有常值的体力分布，因此易于求出其解为

$$\left.\begin{aligned} u_1^{(2)}&=\alpha(x^2-y^2)\\ v_1^{(2)}&=2\alpha xy\\ \sigma_{z1}^{(2)}&=\beta x \end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

其中 $\alpha=\lambda/[4(\lambda+G)]$，$\beta=-(3\lambda G+2G^2)/(\lambda+G)$. 于是

$$\psi_1^{(2)}=\{\alpha(x^2-y^2),\ 2\alpha xy,\ 0,\ 0,\ 0,\ \beta x\}^T \tag{3.24}$$

同样 $\psi_1^{(2)}$本身还不是原问题的解，相应的原方程的解可描述为

$$\psi=\psi_1^{(2)}+z\psi_1^{(1)}+\frac{z^2}{2}\psi_1^{(0)} \tag{3.25}$$

该解的物理意义为在x-z平面内的纯弯曲.

当$i=2$时，完全类似地导出y-z平面内的纯弯曲解. 由于纯弯曲解的应力只有 σ_z 且按平面分布，因此不失一般性可以安排其x，y轴为横截面的中心惯性主轴. 然而当 $i=3$，4 时可以证明满足方程和边界条件的解是不存在的，因此相应Jordan型的链至此断绝.

4 第 3 级Jordan型解

在讨论第 3 级Jordan型解时，考虑方程

$$\boldsymbol{H}\psi_i^{(3)}=\psi_i^{(2)}\qquad (i=1,\ 2) \tag{3.26}$$

当$i=1$时可以求得

$$\psi_1^{(3)}=\Big\{\ 0,\ 0,\ \varphi-\alpha xy^2+\frac{1}{3}(1+\alpha)x^3,\ \ G\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}-2\alpha y^2 +(1+2\alpha)x^2\Big),\ \ G\frac{\partial\varphi}{\partial y},\ 0\Big\}^T \tag{3.27}$$

考虑边界条件可将上式函数φ化为Neumann问题:

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2\varphi=0\\ &\frac{d\varphi}{dn}\bigg|_{\partial\Omega}=[-(1+2\alpha)x^2+2\alpha y^2]l \end{aligned}\right\} \tag{3.28}$$

由于采用了中心坐标，(3.28)式解是存在的，至于具体求解可以有多种方法，这里不再深入. 原问题的解可表示为

$$\psi=\psi_1^{(3)}+z\psi_1^{(2)}+\frac{z^2}{2}\psi_1^{(1)}+\frac{z^3}{6}\psi_1^{(0)} \tag{3.29}$$

注意到以上所求得的满足方程和边界条件的解是可以迭加的. 因而将(3.25)与(3.29)两解迭加得

$$\psi=\psi_1^{(3)}-L\psi_1^{(2)}+z(\psi_1^{(2)}-L\psi_1^{(1)})+\frac{z^2}{2}(\psi_1^{(1)}-L\psi_1^{(0)})+\frac{z^3}{6}\psi_1^{(0)} \tag{3.30}$$

上述解的物理意义就是$z=0$端固支，而$z=L$截面作用有平行于截面x方向的力的剪力-弯曲问题的解.

同理，$i=2$ 可以讨论平行于y轴方向剪力-弯曲问题及两个方向联合作用问题的解. 可以证明满足方程和边界条件的第 4 级Jordan型($i=1$，2)解是不存在的，因此相应 Jordan 型

的链至此也断绝.

至此，我们已经得到了全部的Saint-Venant问题的解. 它相当于零本征值的解. 但从整个解空间来看，这些解显然是不全的. 本征方程还应当有非零本征值的解. 在考虑两端部边界条件时必须要用到的. 而这些解以往是用Saint-Venant原理来覆盖的. 这里已经可以看出这些解必然是只有局部影响的. 至于进一步的深入已超出本文目标之外，将在下一文中讨论.

四、结　论

弹性力学求解是数学物理方法的一个重要部分. Saint Venant半逆解在弹性力学求解方面占有极重要的地位，寻找其直接解法是一个焦点. 钱伟长在八十自述[9]中，特别提到了与von Karman合作的弹性扭转问题[10]. 钱伟长等的专著[11]又推进了该学科的发展. 但迄今弹性力学众多著作中，Saint-Venant问题的求解仍是半逆法.

引入Hamilton体系表达后，一百多年来半逆法的Saint-Venant解找到了直接法. 现在应当是从Hamilton体系的角度对应用力学若干方面进行再考察的时机. 相信体系与几何形态的变换将会带来许多新的机会.

参 考 文 献

[1] B. Saint Venant, Memoire sur la torsion des prismes, *Paris Memoires des Savants etrangers*, 14 (1856), 233—560.

[2] S. Timoshenko and J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, third ed., N.Y., McGraw-Hill Book Co.(1970).

[3] I. S. Sokolnikoff, *Mathematical Theory of Elasticity*, 2nd ed., N. Y., McGraw-Hill Book Co.(1956).

[4] 钱伟长、叶开沅，《弹性力学》，科学出版社，北京 (1956).

[5] W. X. Zhong and X. X. Zhong, Computational structural mechanics, optimal control and semi-analytical method in PDE, *Computers and Structures*, 37(6) (1990), 993—1004.

[6] 钟万勰，《计算结构力学与最优控制》，大连理工大学出版社，大连 (1993).

[7] 钟万勰，条形域弹性平面问题与哈密尔顿体系，大连理工大学学报，31(4) (1991), 373—384.

[8] 钟万勰，互等定理与共轭辛正交关系，力学学报，24(4) (1992), 432—437.

[9] 钱伟长，《八十自述》(1993).

[10] Th. von Kármán, and Chien Weizang, Torsion with varable twist, *J. Aeronautical Sciences*, 13 (1946), 503—510.

[11] 钱伟长、林鸿荪、胡海昌、叶开沅，《弹性柱体的扭转理论》，科学出版社，北京 (1956).

Hamiltonian System and the Saint Venant Problem in Elasticity

Zhong Wanxie Xu Xinsheng Zhang Hongwu

(Research Institute of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116023, *P. R. China)*

Abstract

The traditional semi-inverse solution method of the Saint Venant problem, which is described in the Euclidian space under the Lagrange system formulation, is updated to be solved in the symplectic space under the conservative Hamiltonian system. It is proved in the present paper that all the Saint Venant solutions can be obtained directly via the zero eigenvalue solutions and all their Jordan normal form of the corresponding Hamiltonian operator matrix.

Key words Hamiltonian system, Saint Venant problem, symplectic, eigenvalue problem