应用数学和力学，第17卷 第9期（1996年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

没有紧性，连续性和凹性的多准则对策的帕雷多平衡*

丁协平[1]

（1995年9月6日收到）

摘　要

在本文中利用作者得到的一极小极大不等式，对不具有紧性，连续性和凹性的多准则对策在拓扑矢量空间和自反Banach空间内证明了某些帕雷多平衡存在定理.

关键词　多准则对策　帕雷多平衡　γ-转移紧下半连续　γ-对角拟凹.

一、引　言

Williams[1]已经对N-人对策的Nash平衡点的存在性得到了充分条件，其中策略集是自反Banach空间的闭凸，可能无界的子集. 此后，Yu[2]，Yao[3]和Tan-Yu[4]在比Williams给出的条件更弱的条件下，对N-人对策的Nash平衡点证明了某些存在性定理.

最近在对策论领域内，许多注意已集中在具有矢量支付函数的问题上，例如见[5～7]，这是因为多准则模型能更好地应用于实际情形. Wang[8]对具有紧凸策略集和连续支付函数的多准则对策的帕雷多平衡点的存在性已得到了某些充分条件.

在本文中应用作者得到的一极小极大不等式对不具有紧性，连续性和凹性的多准则对策在拓扑矢量空间和自反Banach空间内得到了帕雷多平衡点存在的某些充分条件. 我们的定理改进和推广了文献中的某些最近结果.

二、预备知识

设A和X是拓扑矢量空间E的非空子集，我们将用$\mathrm{co}(A)$表A的凸包，分别用$\mathrm{cl}_X A$和$\mathrm{int}_X A$表A在X内的闭包和内部. R表实数集. 设X是拓扑空间，称X的子集A在X内是紧闭（紧开）的，如果对X的每一非空紧子集K，$A\cap K$在K内是闭（开）的. 显然X的每一闭(开)子集是紧闭(紧开)的，其逆一般不真. 我们对X的子集A定义紧闭包$\mathrm{ccl}(A)$和紧内部$\mathrm{cint}(A)$如下：

---

* 国家自然科学基金资助项目.

1 四川师范大学，成都 610066.

$$\mathrm{ccl}(A)=\cap\{B\subset X:\ A\subset B\text{和}B\text{在}X\text{内是紧闭的}\},$$
$$\mathrm{cint}(A)=\cup\{B\subset X:\ B\subset A\text{和}B\text{在}X\text{内是紧开的}\}.$$

显然对X的任何非空紧子集K，我们有

$\mathrm{ccl}(A)\cap K=\mathrm{cl}_K(A\cap K)$和$\mathrm{cint}(A)\cap K=\mathrm{int}_K(A\cap K)$，因此$\mathrm{ccl}(A)(\mathrm{cint}(A))$是紧闭（紧开）的．由定义，$X$的子集$A$是紧闭（紧开）的充要条件是$\mathrm{ccl}(A)=A$ $(\mathrm{cint}(A)=A)$．

称拓扑空间X的子集C是σ-紧的如果存在X的紧子集序列$\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$使得$C=\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n$．令$C=\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n$，其中$\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$是非空紧集的增序列，按照Border[9,p.34]，称C内一序列$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$关于$\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$从C跑出，如果对每一$n=1,2,\cdots$,存在一正整数M使得对一切$k\geqslant M$，$x_k\notin C_n$．

设X是拓扑矢量空间E的非空凸子集和f：$X\times X\to R\cup\{\pm\infty\}$．称函数$f(x,y)$对每一固定的$y\in X$在$x$是拟凹的，如果对任何有限子集$\{x_1,\cdots,x_m\}\subset X$和任何$x_0\in\mathrm{co}(\{x_1,\cdots,x_m\})$，我们有对任何$y\in X$，

$$\min_{1\leqslant i\leqslant m}f(x_i,y)\leqslant f(x_0,y).$$

称函数$f(x,y)$在x是γ-对角拟凹的，$\gamma\in R\cup\{\pm\infty\}$（见[10]）,如果对任何有限子集$\{x_1,\cdots,x_m\}\subset X$和任何$x_0\in\mathrm{co}(\{x_1,\cdots,x_m\})$，我们有

$$\min_{1\leqslant i\leqslant m}f(x_i,x_0)\leqslant\gamma.$$

特别，如果$f(x,y)$对每一固定的$y\in X$在x是拟凹的，则$f(x,y)$在x是γ-对角拟凹的,其中$\gamma=\sup_{x\in X}f(x,x)$．

设X是拓扑空间，$\gamma\in R$和f：$X\times X\to R\cup\{\pm\infty\}$．称函数$f(x,y)$在$y$是$\gamma$-转移紧下半连续的，如果对$X$的任何非空紧子集$K$，对每一$x\in X$和对每一$y\in K$，$f(x,y)>\gamma$蕴含存在某$x'\in X$和$y$在$K$内的某开邻域$N(y)$使得对一切$z\in N(y)$，$f(x',z)>\gamma$．称$f(x,y)$在$y$是$\gamma$-转移紧上半连续的，如果$-f(x,y)$在$y$是$\gamma$-转移紧下半连续的．

显然γ-转移紧下（上）半连续性概念推广了Tian[11]引入的相应概念．

三、极小极大不等式

下面极小极大不等式是Ding[12]的系4.1和Ding[13]的定理2.2的特殊情形．

定理D 设X是拓扑矢量空间E的非空凸子集和f：$X\times X\to R\cup\{\pm\infty\}$使得

（1） $f(x,y)$在y是γ-转移紧下半连续的，

（2） 对任何有限集$A=\{x_1,\cdots,x_m\}\subset X$，

$$\mathrm{co}(A)\subset\bigcup_{x\in A}\mathrm{ccl}(\{y\in X:\ f(x,y)\leqslant\gamma\}),$$

（3） 存在X的非空紧凸子集X_0和非空紧子集K使得对每一$y\in X\setminus K$，存在$x\in\mathrm{co}(X_0\cup\{y\})$满足$y\in\mathrm{cint}(\{z\in X:f(x,z)>\gamma\})$．

则存在$\hat{y}\in K$使得对一切$x\in X$，$f(x,\hat{y})\leqslant\gamma$．

注3.1 如果对每一固定$x\in X$，$f(x,y)$关于y在X的每一紧子集C上是下半连续的，则条件(1)被满

足；如果$f(x, y)$在x是γ-对角拟凹的，则条件(2)被满足；如果X也是紧的，由令$X=X_0=K$，则条件(3)平凡成立。定理D改进了Tian[11]的定理 4 并顺次推广了Fan[11]，Allen[15]和Zhou-Chen[10]的相应结果。

系3.1 设X是拓扑矢量空间E的非空紧凸子集和f，$g: X\times X\to R\cup\{\pm\infty\}$使得

(1) 对一切x，$y\in X$，$f(x, y)\leqslant g(x, y)$，

(2) $f(x, y)$在y是γ-转移紧下半连续的，

(3) 对任何有限集$A=\{x_1, \cdots, x_m\}\subset X$，

$$\operatorname{co}(A)\subset\bigcup_{x\in A}\operatorname{ccl}(\{y\in X: g(x, y)\leqslant\gamma\}).$$

则存在$\hat{y}\in X$使得对一切$x\in X$，$f(x, \hat{y})\leqslant\gamma$。

证明 注意到条件(1)和(3)蕴含定理D的条件(2)成立。结论从具有 $X=X_0=K$ 的定理D推得。

注3.2 如果函数$g(x, y)$在x是γ-对角拟凹的，则条件(3)被满足且因此系3.1改进了 Tan-Yu[4] 的引理3.1，Zhou-Chen[10]的定理2.11和系2.12和Ky Fan[14]的极小极大不等式。

定理3.1 设X是拓扑矢量空间E的非空子集使得 $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n$ 其中$\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是X的紧凸子集的增序列。假设f，$g: X\times X\to R\cup\{\pm\infty\}$使得

(1) 对一切x，$y\in X$，$f(x, y)\leqslant g(x, y)$，

(2) $f(x, y)$在y是γ-转移紧下半连续的，

(3) 对任何有限集$A=\{x_1, \cdots, x_m\}\subset X$，

$$\operatorname{co}(A)\subset\bigcup_{x\in A}\operatorname{ccl}(\{y\in X: g(x, y)\leqslant\gamma\}),$$

(4) 对X内每一序列$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$满足 $y_n\in C_n$和$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 关于 $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ 从X跑出，存在X内的序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足$x_n\in C_n$使得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ f(x_n, y_n)>\gamma.$$

则存在$\hat{y}\in X$使得对一切$x\in X$，$f(x, \hat{y})\leqslant\gamma$。

证明 对每一$n=1, 2, \cdots$，因C_n是非空紧凸的，从条件(3)推得对任何有限集 $A=\{x_1, \cdots, x_m\}\subset C_n$，我们一定有

$$\begin{aligned}\operatorname{co}(A)&\subset C_n\cap\Big[\bigcup_{x\in A}\operatorname{ccl}(\{y\in X: g(x, y)\leqslant\gamma\})\Big]\\&=\bigcup_{x\in A}[C_n\cap\operatorname{ccl}(\{y\in X: g(x, y)\leqslant\gamma\})]\\&=\bigcup_{x\in A}\operatorname{clc}_{C_n}(\{y\in C_n: g(x, y)\leqslant\gamma\})\\&=\bigcup_{x\in A}\operatorname{ccl}(\{y\in C_n: g(x, y)\leqslant\gamma\}).\end{aligned}$$

由系3.1，存在$y_n\in C_n$使得对一切$x\in C_n$，

$$f(x, y_n)\leqslant\gamma.$$

假设序列$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 关于$\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ 从 X 跑出。由(4)，存在序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $x_n\in C_n$使得 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}f(x_n, y_n)>\gamma$。但是 $x_n\in C_n$ 蕴含$f(x_n y_n)\leqslant\gamma$对一切 $n=1, 2, \cdots$成立，故矛盾。因此序列$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 关于$\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不从X跑出，从而存在$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子序列全体含于某C_{n_0}中。因为C_{n_0}是

紧的，故在C_{n_0}中存在$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$的子序列$\{y_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$和$\hat{y}\in C_n$。使得$y_{n_i}\to\hat{y}(i\to\infty)$。我们主张对一切$x\in X$有$f(x,\ \hat{y})\leqslant\gamma$。如果不真，则存在$x^*\in X$使得$f(x^*,\ \hat{y})>\gamma$。注意到$\hat{y}\in C_{n_0}$和$C_{n_0}$是紧的，由(2)，存在点$x'\in X$和$\hat{y}$在$C_{n_0}$内的相对开邻域$N(\hat{y})$使得对一切$z\in N(\hat{y})$，$f(x',\ z)>\gamma$。因为$y_{n_i}\to\hat{y}$，存在$i_0$使得对一切$i\geqslant i_0$，$y_{n_i}\in N(\hat{y})$且因此我们有

$$f(x',\ y_{n_i})>\gamma \qquad (\text{对一切} i\geqslant i_0) \tag{3.1}$$

另一方面，因$X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}C_n$和$\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$是增序列，我们能选取$k>n_0$使得$x'\in C_k$。选取$i_1\geqslant i_0$使得对一切$i\geqslant i_1$，$n_i>k$。于是有$x'\in C_k\subset C_{n_i}$和$y_{n_i}\in C_{n_i}$对一切$i\geqslant i_1$成立。由此推得对一切$i\geqslant i_1$，有$f(x',\ y_{n_i})\leqslant\gamma$，这与(3.1)式相矛盾。因此我们必有

$$f(x,\ \hat{y})\leqslant\gamma \quad (\text{对一切} x\in X)。$$

注3.3. 定理3.1通过放松$f(x,\ y)$在y的下半连续性和$g(x,y)$在x的0-对角拟凹性，推广了Tan-Yu[4]的定理3.1。定理3.1也从几方面推广了Yu[2]的定理2.1，Zhou-Chen[10]的定理2.11和Yao[3]的理定1。

四、多准则对策

在本节中，我们将研究多准则对策。设I局中人的（有限或可数无限）集，X_i是局中人i的策略集和一切可行结果是$X=\prod\limits_{i\in I}X_i$。对每一可行结果$x\in X$，局中人$i$接受一矢量支付$(f_1^i(x),\ \cdots,\ f_{k_i}^i(x))$其中$f_j^i:X\to R$是实值函数，$i\in I$和$j=1,\ \cdots,\ k_i$。每一局中人都企图在$X$上极小化他的所有支付函数。由$\Gamma=(x_i,\ F^i)_{i\in I}$表示的上述对策称为多准则对策，其中$F^i=(f_1^i,\ \cdots,\ f_{k_i}^i)$。我们将用$X_{-i}$表乘积$\prod_{j\in I,j\neq i}X_j$和用$x_{-i}$表$X_{-i}$的一般元素。

现在我们对多准则对策引入帕雷多平衡概念。称点$\hat{x}\in X$是Γ的一帕雷多平衡点，如果对每一$i\in I$，不存在$y_i\in X_i$使得

$$f_j^i(y_i,\ \hat{x}_{-i})\leqslant f_j^i(\hat{x}_i,\ \hat{x}_{-i})=f_j^i(\hat{x})$$

对一切$j=1,\ \cdots,\ k_i$成立且对至少一个j上述不等式严格成立。

对每一$i\in I$，令$W_i\in R_+^{k_i}=\left\{W\in R^{k_i}:\ w_j>0\text{和}\sum\limits_{j=1}^{k_i}w_j=1\right\}$。对每一$i\in I$，称由下式定义的函数$g_i:X\to R$：

$$g_i(x)=(W_i)^TF^i(x)=\sum_{j=1}^{k_i}w_jf_j^i(x)$$

为局中人i的聚合支付函数。

现在我们定义聚合支付函数$f:X\times X\to R\cup\{\pm\infty\}$如下：

$$f(x,\ y)=\sum_{i\in I}\frac{1}{2^i}(g_i(y)-g_i(x_i,\ y_{-i})) \qquad (\text{对一切} x,\ y\in X)$$

定理4.1 设$\Gamma=(X_i,\ F^i)_{i\in I}$是一多准则对策使得对每一$i\in I$，

(1) X_i是拓扑矢量空间E_i的非空凸子集，

(2) 聚合支付函数

$$f(x,\ y)=\sum_{i\in I}\frac{1}{2^i}(W_i)^T[F^i(y)-F^i(x_i,\ y_{-i})]$$

在y是0-转移紧下半连续的，

（3） 对任何有限集$A=\{x_1, \cdots, x_m\}\subset X$，

$$\mathrm{co}(A)\subset \bigcup_{x\in A}\mathrm{ccl}(\{y\in X: f(x, y)\leqslant 0\}),$$

（4） 存在X的非空紧凸子集X_0和非空紧子集K使得对每一$y\in X\backslash K$，存在$x\in\mathrm{co}(X_0\cup\{y\})$满足$y\in\mathrm{cint}(\{z\in X: f(x, z)>0\})$。

则Γ至少有一帕雷多平衡点$\hat{x}\in K$。

证明 容易检验聚合支付函数$f(x, y)$满足定理D的一切条件，其中$\gamma=0$.故存在$\hat{x}\in K$使得对一切$x\in X$，$f(x, \hat{x})\leqslant 0$。由此推得对一切$x\in X$，

$$\sum_{i\in I}\frac{1}{2^i}[(W_i)^T(F^i(\hat{x})-F^i(x_i, \hat{x}_{-i}))]\leqslant 0 \tag{4.1}$$

对任何$i\in I$和$x_i\in X_i$，选取$x^*\in X$使得$x_i^*=x_i$和$x_k^*=\hat{x}_k(k\neq i)$，则从(4.1)推得对一切$i\in I$和$x_i\in X_i$，

$$(W_i)^TF^i(\hat{x})\leqslant(W_i)^TF^i(x_i, \hat{x}_{-i}) \tag{4.2}$$

如果$\hat{x}$不是Γ的一帕雷多平衡点，则存在$i_0\in I$和$x_{i_0}\in X_{i_0}$使得

$$f_j^{i_0}(x_{i_0}, \hat{x}_{-i})\leqslant f_j^{i_0}(\hat{x})$$

对一切$j=1, \cdots, k_{i_0}$成立且上面不等式中至少一个是严格的。注意到$W_{i_0}\in R_+^{i_0}$，我们必有

$$(W_{i_0})^TF^{i_0}(x_{i_0}, \hat{x}_{-i})<(W_{i_0})^TF^{i_0}(\hat{x})$$

这与(4.2)式矛盾。所以$\hat{x}$是Γ的一帕雷多平衡点。

系4.1 设$\Gamma=(X_i, F^i)_{i\in I}$是一多准则对策使得对每一$i\in I$，

（1） X_i是拓扑矢量空间E_i的非空凸子集，

（2） 对每一固定的$x_i\in X_i$和任何$j=1, \cdots, k_i$，函数$y_{-i}\to f_j^i(x_i, y_{-i})$在$X_{-i}$上是上半连续的，

（3） 函数$\sum_{i\in I}\frac{1}{2^i}(W_i)^TF^i(x)$在$X$上是下半连续的，

（4） 聚合支付函数$f(x, y)$在x是0-对角拟凹的，

（5） 存在X的非空紧凸子集X_0和非空紧子集K使得对每一$y\in X\backslash K$，存在$x\in\mathrm{co}(X_0\cup\{y\})$满足$f(x, y)>0$。

则Γ有一帕雷多平衡点$\hat{x}\in K$。

证明 从条件(2)，(3)和聚合支付函数的定义推得$f(x, y)$关于y在X上是下半连续的且因此定理4.1的条件(2)被满足。条件(4)蕴含定理4.1的条件(3)成立。由$f(x, y)$对y的下半连续性，集$\{z\in X: f(x, z)>0\}$在X内是开集。由(5)，我们有$y\in\{z\in X: f(x, z)>0\}=\mathrm{cint}(\{z\in X: f(x, z)>0\})$。定理4.1的条件(4)被满足。结论由定理4.1推得。

注4.1 如果每一$f_j^i(x)$是连续的，系4.1的条件(2)和(3)被满足。如果函数

$$x\mapsto\sum_{i\in I}\frac{1}{2^i}(W_i)^TF^i(x_i, y_{-i})$$

在X上是拟凸的，则聚合支付函数$f(x, y)$在x是拟凹的且因此系4.1的条件(4)被满足。如果X_i是E_i的非空紧凸子集，由令$X_0=K=X$，则系4.1的条件(5)被平凡满足。因此系4.1从而定理4.1从几方面推广了Wang[8]的定理1。

定理4.2　设$\Gamma=(X_i, F^i)_{i\in I}$是一多准则对策，使得对每一$i\in I$，

（1）　$X_i=\bigcup_{n=1}^{\infty}C_{i,n}$，其中$\{C_{i,n}\}_{n=1}^{\infty}$是拓扑矢量空间$E_i$的非空紧凸子集的增序列，

（2）　聚合支付函数

$$f(x, y)=\sum_{i\in I}\frac{1}{2^i}(W_i)^T[F^i(y)-F^i(x_i, y_{-i})]$$

在y是0-转移紧下半连续的，

（3）　对任何有限集$A=\{x_1, \cdots, x_m\}\subset X$，

$$\mathrm{co}(A)\subset\bigcup_{x\in A}\mathrm{ccl}(\{y\in X: f(x, y)\leqslant 0\}),$$

（4）　对$X=\prod_{i\in I}X_i$内每一满足$y^n\in C_n=\prod_{i\in I}C_{i,n}$的序列$\{y^n\}_{n=1}^{\infty}$，它关于$\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$从$X$跑出，存在$i\in I$和$u_{i,n}\in C_{i,n}$，$(n=1, 2, \cdots)$，使得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(W_i)^T[F^i(y^n)-F^i(u_{i,n}y^n_{-i})]>0.$$

则Γ有一帕雷多平衡点$\hat{x}\in X$。

证明　由(4)，对X内每一满足$y^n\in C_n$和关于$\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$从X跑出的序列$\{y^n\}_{n=1}^{\infty}$，存在$i_0\in I$和$u_{i_0,n}\in C_{i_0,n}$，$(n=1, 2, \cdots)$，使得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(W_{i_0})^T[F^{i_0}(y^n)-F^{i_0}(u_{i_0,n}, y^n_{-i_0})]>0$$

对每一$n=1, 2, \cdots$，令$x^n_{i_0}=u_{i_0,n}$和$x^n_j=y^n_j$，对一切$j\neq i_0$，则$x^n\in C_n$满足

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}f(x_n, y_n)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{i\in I}\frac{1}{2^i}(W_i)^T[F^i(y^n)-F^i(x^n_i, y^n_{-i})]$$

$$=\frac{1}{2^{i_0}}(W_{i_0})^T[F^{i_0}(y^n)-F^{i_0}(u_{i_0,n}, y^n_{-i})]>0.$$

因此具有$f=g$和$\gamma=0$的定理3.1的一切条件被满足.所以存在$\hat{x}\in X$使得对一切$x\in X$，$f(x, \hat{x})\leqslant 0$。使用定理4.1证明中同样的理论，我们能证明$\hat{x}$是Γ的一帕雷多平衡点。

系4.2　设$\Gamma=(X^i, F^i)_{i\in I}$是一多准则对策，使得对每一$i\in I$，

（1）　$X_i=\bigcup_{n=1}^{\infty}C_{i,n}$其中$\{C_{i,n}\}_{n=1}^{\infty}$是拓扑矢量空间$E_i$的非空紧凸子集的增序列，

（2）　对每一$x_i\in X_i$和任何$j=1,\cdots,k_i$，函数$y_{-i}\mapsto f^i_j(x_i, y_{-i})$在$\prod_{j\in I, j\neq i}C_{jn}$上是上半连续的，$n=1, 2, \cdots$，

（3）　函数$\sum_{i\in I}\frac{1}{2^i}(W_i)^TF_i(x)$在$C_n=\prod_{i\in I}C_{in}$上是下半连续的，$n=1, 2, \cdots$，

（4）　聚合支付函数$f(x, y)$在x是0-对角拟凹的，

（5）　对$X=\prod_{i\in I}X_i$内每一满足$y^n\in C_n$且关于$\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$从X跑出的序列$\{y^n\}_{n=1}^{\infty}$，存在$i\in I$和$u_{i,n}\in C_{i,n}(n=1, 2, \cdots,)$使得，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(W_i)^T[F_i(y^n)-F^i(u_{i,n}, y^n_{-i})]>0$$

则Γ有一帕雷多平衡点$\hat{x}\in X$。

证明　容易看出条件(2)和(3)蕴含聚合支付函数$f(x, y)$关于y在C_n上是下半连续的对$n=1, 2, \cdots$成立且因此定理4.2的条件(2)被满足，显然条件(4)蕴含定理4.2的条件(3)成立。结论从定理4.2推得。

注4.2 如果对每一固定的$i\in I$, $y_{-i}\in X_{-i}$和任何$j=1, \cdots, k_i$, $f_j(\cdot, y_{-i})$在X_i上是拟凹的, 则容易检验聚合支付函数$f(x, y)$关于x在X上是拟凹的且因此它关于x在X内是0-对角拟凹的。因此系4.2从而定理4.2从几个方面改进和推广了Tan-Yu[4]的定理4.5。

定理4.3 设$\Gamma=(X^i, F^i)_{i\in I}$是一多准则对策使得对每一$i\in I$,

(1) X_i是自反Banach空间$(E_i, \|\cdot\|_i)$的非空闭凸子集和$X=\prod_{i\in I}X_i$,

(2) 聚合支付函数

$$f(x, y)=\sum_{i\in I}\frac{1}{2_i}(W_i)^T[F^i(y)-F^i(x_i, y_{-i})]$$

在y是0-转移紧下半连续的,

(3) 对任何有限集$A=\{x_1, \cdots x_m\}\subset X$,

$$\mathrm{co}(A)\subset\bigcup_{x\in A}\mathrm{ccl}(\{y\in X: f(x, y)\leqslant 0\}),$$

(4) 对X内每一满足$\|y^n\|=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\|y_j^n\|_j\to\infty(n\to\infty)$, 的序列$\{y^n\}_{n=1}^{\infty}$, 存在$i_0\in I$和序列$\{u_{i_0, n}\}_{n=1}^{\infty}$具有$\|u_{i_0, n}\|_{i_0}\leqslant n$使得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(W_{i_0})^T[F^{i_0}(y^n)-F^{i_0}(u_{i_0, n}, y_{-i_0}^n)]>0.$$

则Γ有一帕雷多平衡点$\hat{x}\in X$。

证明 不失一般性, 我们可以假定对每一$i\in I$和$n=1, 2, \cdots$, 集

$$C_{i, n}=\{x_i\in X_i: \|x_i\|_i\leqslant n\}$$

是非空的。因此$C_{i, n}$是E_i的非空弱紧凹子集和$X_i=\bigcup_{n=1}^{\infty}C_{i, n}$。对$E_i$赋予弱拓扑。如果$\{y^n\}_{n=1}^{\infty}$是$X$内满足$y^n\in C_n=\prod_{i\in I}C_{i, n}$且关于$\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$从$X$跑出的序列, 则

$$\|y^n\|=\sum_{j=1}\frac{1}{2^j}\|y_j^n\|_j\to\infty,\quad n\to\infty.$$

故由(4), 存在$i_0\in I$和$\{u_{i_0, n}\}_{n=1}^{\infty}\subset X_i$具有$u_{i_0, n}\in C_{i_0, n}$对每一$n$成立使得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(W_{i_0})^T[F^{i_0}(y^n)-F^{i_0}(u_{i_0, n}, y_{-i_0}^n)]>0$$

因此结论从定理4.2推得。

注4.3 定理4.3从几方面改进和推广了Williams[1]的定理2.1, Yu[2]的定理3.1, Yao[3]的定理1和Tan-Yu[4]的定理4.6。

参 考 文 献

[1] R. J. Williams, Sufficient conditions for Nash equilibria in N-person games over reflexive Banach spaces, *J. Optim. Theory and Appl.*, 30 (1980), 383—394.

[2] J. Yu., On Nash equilibria in N-person games over reflexive Banach spaces, *J. Optim. Theory and Appl.*, 73 (1992), 211—214.

[3] J. C. Yao, Nash equilibria in N-person games without convexity, *Appl. Math.*

Lett. 5(5) (1992), 67—69.

[4] K. K. Tan and J. Yu, New minimax inquality with applications to existence theorems of equilibrium points, *J. Optim. Theory and Appl.*, **82** (1994), 105—120.

[5] D. Ghose and U. R. Prasad, Solution concepts in two-person multicriteria games, *J. Optim. Theory and Appl.*, **63** (1989), 167—189.

[6] F. Szidarovszky, M. E. Gershou and L. Duckstein, *Technigues for Multiobjective Decision Making in Systems Management*, Elsevier, Amsterdam (1968).

[7] R. V. Khachatryan, Dynamically stable optimality principle in multicriteria multistep games, *Dokl. Akad. Nauk. Arm. SSR*, **86** (1) (1988), 23—26. (in Russian)

[8] S. Y. Wang, An existence theorem of a Pareto equilibrium, *Appl. Math. Latl.*, **4**(3) (1991), 61—63.

[9] K.C. Border, *Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory*, Cambridge Univ. Press, Canlbridge (1985).

[10] J. X. Zhou and G. Chen, Diagonal convexity conditions for problems in convex analysis and quasivariational inequalities, *J. Math. Anal. Appl.*, **132** (1988), 213—225.

[11] G. Tian, Generalizations of the FKKM theorem and the Fan minimax inequality with applications to maximal elements, price equilibrium and complementarity, *J. Math. Anal. Appl.*, **170** (1992), 457—471.

[12] X. P. Ding, New H-KKM theorems and their applications to geometric property, coincidence theorems, minimax inequality and maximal elements, *Indian J. Pure and Appl. Math.*, **26**(1) (1995), 1—19.

[13] X. P. Ding, Best approximation and coincidence theorems, 四川师范大学学报(自然科学版), **18**(2) (1995), 21—29.

[14] Fans Ky, A minimax inequality and applications, in *Ineqnalites* Ⅲ(Ed. O. Shiha), Acad. Press, New York(1972), 103—113.

[15] G. Allen, Variational inequalities, complementarity problems, and duality theorems, *J. Math. Anal. Appl.*, **58** (1977), 1—10.

Pareto Equilibria of Multicriteria Games without Compactness, Continuity and Concavity

Ding Xieping

(*Department of Mathematics, Sichuan Normal University Chengdu, Sichuan* 610066, *P. R. China*)

Abstract

In this paper, by using a minimax inequality obtained by the author, some existence theorems of Pareto equilibria for multicriteria games without compactness, continuity and concavity are proved in topological vector spaces and reflexive Banach spaces.

Key words multicriteria game, Pareto equilibria, γ-transfer compactly lower semicontinuity, γ-digonally quasiconcave