应用数学和力学，第17卷 第9期（1996年9月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

高阶泛函偏微分程边值问题的强迫振动*

靳明忠[1]　董　莹[1]　李崇孝[2]

（李骊推荐，1995年6月5日收到）

摘　要

本文研究一类高阶泛函偏微分方程边值问题的强迫振动性．主要工具是平均技巧，利用它将问题归结于相应的泛函微分不等式的振动性的研究．

关键词　高阶泛函偏微分方程　边值问题　强迫振动

一、引　言

近年来，带有函数变元的偏微分方程解的振动性研究有了较大发展．但是，这些成果大都是对二阶偏微分方程建立的[1~5,8]．迄今为止，极少见到对高阶方程的强迫振动性的研究．

本文研究偶数阶泛函偏微分方程

$$\frac{\partial^{2n}u}{\partial t^{2n}}+a(t)\frac{\partial^{2n-1}u}{\partial t^{2n-1}}+\sum_{i=1}^{m}p_i[x,\ t,\ u(x,\ t),\ u(x,\ \gamma_i(t))]$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(t)\Delta u(x,\ \tau_j(t))+f(x,\ t)\qquad((x,\ t)\in\Omega\times R_+)\tag{1.1}$$

这里 $\Omega\subset R^l$ 是带有分片光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域，$R_+=[0,\ \infty)$，$u=u(x,\ t)$ 且

$$\Delta u=\sum_{i=1}^{l}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

令 $G=\Omega\times R_+$，我们列出下面边界条件：

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}+\mu(x,\ t)u=0\qquad((x,\ t)\in\partial\Omega\times R_+)\tag{1.2}$$

这里 ν 表示 $\partial\Omega$ 的单位外法线向量，$\mu(x,\ t)$ 是非负连续函数．

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}=g(x,\ t)\qquad((x,\ t)\in\partial\Omega\times R_+)\tag{1.3}$$

---

* 云南省应用基础研究基金资助．

1 武汉汽车工业大学，武汉　430070．

2 云南工业大学，昆明　650051．

$$u=h(x,\ t)\qquad((x,\ t)\in\partial\Omega\times R_+)\tag{1.4}$$

其中，$g,\ h\in C(\partial\Omega\times R_+,\ R)$。令$\bar{G}=\partial\Omega\times R_+$。

我们给出若干假设：

(A_1) $p_i\in C(G\times R\times R,\ R)$且$p_i(x,\ t,\ -\eta,\ -\xi)=-p_i(x,\ t,\ \eta,\ \xi)$；当$(x,\ t,\ \eta,\ \xi)\in G\times(0,\ \infty)\times(0,\ \infty)$时，$p_i(x,\ t,\ \eta,\ \xi)\geqslant\psi_i(t)\phi_i(\xi)$，其中$\psi_i,\ \phi_i\in C((0,\ \infty),\ (0,\ \infty))$且$\phi_i$是$(0,\ \infty)$上的下凸函数。$i\in I_m=\{1,\ 2,\ \cdots,\ m\}$。

(A_2) $a\in C(R_+,\ R_+)$，$f\in C(G,\ R)$。

(A_3) $\gamma_i,\ \tau_j,\ \lambda_j\in C(R_+,\ R_+)$且$\lim\limits_{t\to\infty}\gamma_i(t)=\lim\limits_{t\to\infty}\tau_j(t)=\infty\qquad(i\in I_m,\ j\in I_k)$。

在本文的第二部份，我们给出边值问题和微分不等式的一些结果；在第三部份给出泛函微分不等式的振动准则；在第四部份建立三类边值问题振动的充分条件。

二、边值问题解的振动性

本节将导出三类边值问题的解振动的条件是相应的常微分不等式没有最终正解。

定义2.1 [见文6]. 函数$u\in C^2(\Omega)\cap C^{2n}(R_+)\cap C^1(\bar{G})$称为问题(1.1)(1.2)或(1.1)(1.3)或(1.1)(1.4)的解，如果它在区域G中满足带有相应边界条件的方程(1.1)。

定义2.2[6] 方程(1.1)的解u称为在区域G上是振动的，如果对每个正数β，存在点$(x_0,\ t_0)\in\Omega\times[\beta,\ \infty)$，使$u(x_0,\ t_0)=0$。

定义2.3 如果存在$t_0>0$，使当$t\geqslant t_0$时函数$v(t)>0(v(t)<0)$，则称$v(t)$是最终为正(负)的函数。

引理2.1 设条件(A_1)～(A_3)成立。若$u(x,\ t)$是问题(1.1)(1.2)在$\Omega\times[t_0,\ \infty)$上的一个正解$(t_0>0)$，则函数

$$v(t)=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x,\ t)dx\qquad(t\geqslant t_1,\ t_1\geqslant t_0)\tag{2.1}$$

满足微分不等式

$$v^{(2n)}(t)+a(t)v^{(2n-1)}(t)+\sum_{i=1}^m\psi_i(t)\phi_i[v(\gamma_i(t)]\leqslant\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(x,\ t)dx\tag{2.2}$$

证明 因$t\geqslant t_0$时$u(x,\ t)>0$，由(A_3)知，存在$t_1\geqslant t_0$，使当$t\geqslant t_1$时$\gamma_i(t)\geqslant t_0$，$\tau_j(t)\geqslant t_0$，$i\in I_m$，$j\in I_k$。利用(A_1)，当$(x,\ t)\in\Omega\times[t_1,\infty)$时

$p_i[x,\ t,\ u(x,\ t),\ u(x,\ \gamma_i(t))]\geqslant\psi_i(t)\phi_i[u(x,\ \gamma_i(t))]\ (i\in I_m)$。由(1.1)得

$$\frac{\partial^{2n}u}{\partial t^{2n}}+a(t)\frac{\partial^{2n-1}u}{\partial t^{2n-1}}+\sum_{i=1}^m\psi_i(t)\phi_i[u(x,\ \gamma_i(t))]$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^k\lambda_j(t)\Delta u(x,\ \tau_j(t))+f(x,\ t)\qquad((x,\ t)\in\Omega\times[t_1,\ \infty))\tag{2.3}$$

在Ω上积分(2.3)式，得到

$$v^{2n}(t)+a(t)v^{2n-1}(t)+\frac{1}{|\Omega|}\sum_{i=1}^m\psi_i(t)\int_\Omega\phi_i[u(x,\ \gamma_i(t))]dx$$

$$\leqslant\frac{1}{|\Omega|}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(t)\int_{\Omega}\Delta u(x,\ \tau_j(t))dx+\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega}f(x,\ t)dx\quad(t\geqslant t_1)\tag{2.4}$$

利用Green公式和边界条件(1.2)得

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\Delta u(x,\ \tau_j(t))dx&=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial\nu}u(x,\ \tau_j(t))d\omega\\&=-\int_{\partial\Omega}\mu(x,\ \tau_j(t))u(x,\ \tau_j(t))d\omega\\&\leqslant 0\qquad(t\geqslant t_1,\ j\in I_k)\end{aligned}\tag{2.5}$$

这里$d\omega$是曲面$\partial\Omega$上的面积元素．由(A_1)和Jensen不等式得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega}\phi_i[u(x,\ \gamma_i(t))]dx\geqslant\phi_i\left[\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega}u(x,\ \gamma_i(t))dx\right]\\&=\phi_i[v(\gamma_i(t))]\qquad(i\in I_m,\ t\geqslant t_1)\end{aligned}\tag{2.6}$$

联合(2.4)～(2.6)，我们得到(2.2)式，定理得证．

定理2.1 设条件(A_1)～(A_3)成立．如果微分不等式(2.2)和

$$v^{(2n)}(t)+a(t)v^{(2n-1)}(t)+\sum_{i=1}^{m}\psi_i(t)\phi_i[v(\gamma_i(t))]\leqslant-\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega}f(x,\ t)dx\tag{2.2$'$}$$

均无最终正解，则边值问题(1.1)(1.2)的每个解都是振动的．

证明 假设不然，令$u(x,\ t)$是(1.1)(1.2)的非振动解．设$t\geqslant t_1$时$u(x,\ t)>0$．由引理2.1知，由(2.1)式定义的$v(t)$是(2.2)的最终正解，这与假设矛盾；设$t\geqslant t_1$时$u(x,t)<0$，若令$\bar{u}(x,\ t)=-u(x,\ t)$，则$\bar{u}(x,\ t)$是下面方程

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^{2n}\bar{u}}{\partial t^{2n}}+a(t)\frac{\partial^{2n-1}\bar{u}}{\partial t^{2n-1}}+\sum_{i=1}^{m}p_i[x,\ t,\ \bar{u}(x,\ t),\ \bar{u}(x,\ \gamma_i(t))]\\&=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(t)\Delta\bar{u}(x,\ \tau_j(t))-f(x,\ t)\qquad((x,\ t)\in\Omega\times R_+)\end{aligned}\tag{1.1$'$}$$

带有边界条件$\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial\nu}+\mu(x,\ t)\bar{u}=0$的最终正解．令

$$\bar{v}(t)=\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega}\bar{u}(x,\ t)dx\qquad(t\geqslant t_1)\tag{2.1$'$}$$

则由引理2.1知$\bar{v}(t)$是(2.2)$'$的最终正解，这也与假设矛盾，从而定理结论成立．

引理2.2 设条件(A_1)～(A_3)成立．若$u(x,\ t)$是问题(1.1)(1.3)在$\Omega\times[t_0,\ \infty)$上的一个正解，$t_0>0$，则由(2.1)式确定的函数$v(t)$满足不等式

$$v^{(2n)}(t)+a(t)v^{(2n-1)}(t)+\sum_{i=1}^{m}\psi_i(t)\phi_i[v(\gamma_i(t))]\leqslant G(t)+F(t)\tag{2.7}$$

其中

$$G(t)=\frac{1}{|\Omega|}\sum_{j=1}^{k}\int_{\partial\Omega}\lambda_j(t)g(x,\ \tau_j(t))d\omega,\ \ F(t)=\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega}f(x,\ t)dx\tag{2.8}$$

引理2.2的证明类似于引理2.1的证明，略去．

定理2.2 设条件(A_1)～(A_3)成立．如果微分不等式(2.7)和

$$v^{(2n)}(t)+a(t)v^{(2n-1)}(t)+\sum_{i=1}^{m}\psi_i(t)\phi_i[v(\gamma_i(t))]\leqslant -G(t)-F(t) \tag{2.7$'$}$$

均无最终正解，则边值问题(1.1)(1.3)的每个解都是振动的。

证明 假设不然，令$u(x,\ t)$是(1.1)(1.3)的非振动解。设$t\geqslant t_1$时$u(x,\ t)>0$，由引理2.2知，由(2.1)式确定的$v(t)$是(2.7)的最终正解，这与假设矛盾；设$t\geqslant t_1$时$u(x,\ t)<0$，若令$\bar{u}(x,\ t)=-u(x,\ t)$，则$\bar{u}(x,\ t)$是方程(1.1)′带有边界条件$\frac{\partial\bar{u}}{\partial\nu}=-g(x,\ t)$的一个正解。由引理2.2知由(2.1)′定义的函数$\bar{v}(t)$是不等式(2.7)′的最终正解，这也与假设相违，定理证毕。

在区域Ω上，考虑下面的Dirichlet问题

$$\Delta u+\alpha u=0 \qquad (x\in\Omega);\quad u=0 \qquad (x\in\partial\Omega) \tag{2.9}$$

这里α是常数。由[6]知，(2.9)的最小特征值α_1是正值且相应的特征函数w在Ω上也是正的。对(1.1)(1.4)的解$u(x,\ t)$，令

$$v(t)=\left[\int_\Omega w(x)dx\right]^{-1}\int_\Omega u(x,\ t)w(x)dx \quad (t>0) \tag{2.10}$$

引理2.3 设条件$(A_1)\sim(A_3)$成立。若$u(x,\ t)$是问题(1.1)(1.4)在$\Omega\times[t_0,\ \infty)$上的一个正解，$t_0>0$。则由(2.10)式确定的函数$v(t)$满足微分不等式

$$v^{(2n)}(t)+a(t)v^{(2n-1)}(t)+\sum_{i=1}^{m}\psi_i(t)\phi_i[v(\gamma_i(t))]$$

$$+\sum_{j=1}^{k}\alpha_1\lambda_j(t)v(\tau_j(t))\leqslant S(t),$$

$$S(t)=\left[\int_\Omega w(x)dx\right]^{-1}\left[-\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(t)\int_{\partial\Omega}h(x,\ \tau_j(t))\frac{\partial w}{\partial\nu}d\omega\right.$$

$$\left.+\int_\Omega f(x,\ t)w(x)dx\right] \tag{2.11}$$

证明 因为$t\geqslant t_0$时$u(x,\ t)>0$，由条件(A_1)和(A_3)知存在$t_1\geqslant t_0$，使当$t\geqslant t_1$时(2.3)式成立。(2.3)式两端乘以$w(x)$并在Ω上积分得

$$v^{(2n)}(t)+a(t)v^{(2n-1)}(t)+\sum_{i=1}^{m}\psi_i(t)\left[\int_\Omega w(x)dx\right]^{-1}\int_\Omega\phi_i[u(x,\ \gamma_i(t))]w(x)dx$$

$$\leqslant\left[\int_\Omega w(x)dx\right]^{-1}\left[\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(t)\int_\Omega\Delta u(x,\ \tau_j(t))w(x)dx+\int_\Omega f(x,\ t)w(x)dx\right]$$

$$(t\geqslant t_1) \tag{2.12}$$

由Green公式和条件(1.4)及(2.9)得

$$\int_\Omega\Delta u(x,\ \tau_j(t))w(x)dx=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial\nu}u(x,\ \tau_j(t))w(x)d\omega$$

$$-\int_{\partial\Omega}u(x,\ \tau_j(t))\frac{\partial w}{\partial\nu}d\omega+\int_\Omega u(x,\ \tau_j(t))\Delta w dx$$

$$=-\int_{\partial\Omega}h(x,\ \tau_j(t)))\frac{\partial w}{\partial\nu}d\omega-a_1\int_{\Omega}u(x,\ \tau_j(t))w(x)dx \qquad (i\in I_k) \tag{2.13}$$

由Jensen不等式得到

$$\int_{\Omega}\phi_i[u(x,\ \gamma_i(t))]w(x)dx\geqslant\left[\int_{\Omega}w(x)dx\right]\phi_i\left[\left(\int_{\Omega}w(x)dx\right)^{-1}\int_{\Omega}u(x,\ \gamma_i(t))w(x)dx\right]$$

$$=\left[\int_{\Omega}w(x)dx\right]\phi_i[v(\gamma_i(t))] \qquad (i\in I_m) \tag{2.14}$$

联合(2.12)～(2.14)，我们得到(2.11)式，证毕。

定理2.3 设条件(A_1)～(A_3)成立，如果微分不等式(2.11)和

$$v^{(2n)}(t)+a(t)v^{(2n-1)}+\sum_{i=1}^{m}\psi_i(t)\phi_i[v(\gamma_i(t))]+\sum_{j=1}^{k}a_1\lambda_j(t)v(\tau_j(t))\leqslant -S(t) \tag{2.11$'$}$$

均无最终正解，则边值问题(1.1)(1.4)的每个解都是振动的。

定理2.3的证明类似于定理2.1的证明，略去。

三、泛函微分不等式的振动性

由上节的讨论可知，边值问题(1.1)(1.2)或(1.1)(1.3)或(1.1)(1.4)的解的振动性可归结于相应的泛函微分不等式的振动性。不等式(2.2)、(2.2)′、(2.7)、(2.7)′、(2.11)、(2.11)′两端乘以 $q(t)=\exp\left[\int_{t_0}^{t}a(t)dt\right]$，这些不等式均化成如下形式的微分不等式：

$$[q(t)y^{(2n-1)}(t)]'+\sum_{i=1}^{N}b_i(t)\phi_i[y(\sigma_i(t))]\leqslant E(t) \tag{3.1}$$

这里 $y(t)=v(t)$。

假设(3.1)式满足以下条件：

(B_1) $q\in C(R_+,\ (0,\ \infty))$，$q'(t)\geqslant 0$，$q(t)\leqslant q_0$，$q_0$为正常数。

(B_2) b_i，$\sigma_i\in C(R_+,\ (0,\ \infty))$且$\lim\limits_{t\to\infty}\sigma_i(t)=\infty$ $\quad(i\in I_N=\{1,\ 2,\ \cdots,\ N\})$；

(B_3) $\phi_i\in C((0,\ \infty),\ (0,\ \infty))$ $\quad(i\in I_N)$；

(B_4) 存在函数$e(t)$，满足$[q(t)e^{(2n-1)}(t)]'=E(t)$，且$e(t)$是振动；

(B_5) $e(t)$是减幅振动的，即存在数列$\{S_n\}$和$\{\bar{S}_n\}$，满足$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\bar{S}_n=\infty$使得$e(S_n)=\inf\{e(t),\ t\geqslant S_n\}$和$e(\bar{S}_n)=\sup\{e(t),\ t\geqslant\bar{S}_n\}$，并且$e(t)$是振动的。

引理3.1 设$y(t)$是不等式(3.1)的最终正解，令

$$y(t)=z(t)+e(t). \tag{3.2}$$

若条件(B_1)～(B_4)成立，则存在奇数L，$1\leqslant L\leqslant 2n-1$，使$t$充分大时

(i) $z^{(k)}(t)>0$ $\quad(k=0,\ 1,\ \cdots,\ L-1)$；

(ii) $(-1)^{L+K}z^{(k)}(t)>0$ $\quad(k=L,\ L+1,\ \cdots,\ 2n-1)$。

证明 将(3.2)式代入不等式(3.1)，得到

$$\left[q(t)z^{(2n-1)}(t)\right]'+\sum_{i=1}^{N}b_i(t)\phi_i[y(\sigma_i(t))]\leqslant 0 \tag{3.3}$$

利用条件$(B_1)\sim(B_4)$，知存在$t_0\geqslant 0$，使当$t>t_0$时，$y(\sigma_i(t))>0(i\in I_N)$，从而(3.3)产生

$$[q(t)z^{(2n-1)}(t)]'\leqslant-\sum_{i=1}^{N}b_i(t)\phi_i[y(\sigma_i(t))]<0 \tag{3.4}$$

由(3.4)式知$t\geqslant t_0$时$z^{(2n-1)}(t)>0$.事实上，若$z^{(2n-1)}(t_1)\leqslant 0$，$t_1\geqslant t_0$，则由(3.4)知当$t_2>t_1$时

$$q(t_2)z^{(2n-1)}(t_2)<q(t_1)z^{(2n-1)}\leqslant 0$$

于是由微分中值定理，存在$t_3>t_2$，当$t>t_3$时

$$\begin{aligned}z^{(2n-2)}(t)&=z^{(2n-2)}(t_2)+z^{(2n-1)}(t_3)(t-t_2)\\&\leqslant z^{(2n-2)}(t_2)+\frac{1}{q_0}q(t_2)z^{(2n-1)}(t_2)(t-t_2)\end{aligned} \tag{3.5}$$

在(3.5)中令$t\to\infty$，得到

$$\lim_{t\to\infty}z^{(2n-2)}(t)=-\infty,$$

这就导致

$$\lim_{t\to\infty}z(t)=-\infty.$$

这与(3.2)式及$y(t)$最终为正且$e(t)$是振动的相矛盾．故当$t\geqslant t_0$时，$z^{(2n-1)}(t)>0$．从而$z(t)$非振动，再由(3.2)式及$y(t)$最终为正知，$z(t)$是最终为正．由(3.3)式得

$$[q(t)z^{(2n-1)}(t)]'=q(t)z^{(2n)}(t)+q'(t)z^{(2n-1)}(t)<0,$$

故

$$z^{(2n)}(t)<-\frac{q'(t)}{q(t)}z^{(2n-1)}(t)\leqslant 0$$

综合上述，在t充分大时

$$z^{(2n)}(t)<0,\quad z^{(2n-1)}(t)>0,\quad z(t)>0 \tag{3.6}$$

利用文献[7]中的结果，知存在奇数L，满足引理3.1的结论．

文[9]研究了高阶时滞微分方程解的振动性，我们利用其中的方法，容易将其结论推广至微分不等式中．

定理3.1　设条件$(B_1)\sim(B_4)$成立．如果

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{e(t)}{t^{2n-1}}=-\infty \tag{3.7}$$

则不等式(3.1)无最终正解；如果

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{e(t)}{t^{2n-1}}=+\infty \tag{3.8}$$

则不等式

$$[q(t)y^{(2n-1)}(t)]'+\sum_{i=1}^{N}b_i(t)\phi_i[y(\sigma_i(t))]\leqslant-E(t) \tag{3.1$'$}$$

无最终正解．

证明　设$y(t)$是不等式(3.1)的最终正解，由引理3.1知，存在奇数L：$1\leqslant L\leqslant 2n-1$，使当$t$充分大时$z^{(k)}(t)>0(0\leqslant k\leqslant L)$，$z^{(L+1)}(t)<0$．故存在正数$M$，使对充分大的$t$有$0<z(t)\leqslant Mt^L$，由此得到

$$\lim_{t\to\infty}\sup\frac{z(t)}{t^L}\leqslant M \tag{3.9}$$

由(3.2)式得$z(t)=y(t)-e(t)>-e(t)$，结合(3.9)有

$$\lim_{t\to\infty}\sup\frac{-e(t)}{t^L}<\lim_{t\to\infty}\sup\frac{z(t)}{t^L}\leqslant M \tag{3.10}$$

但由(3.7)式得

$$\lim_{t\to\infty}\sup\frac{-e(t)}{t^L}=-t^{2n-1-L}\lim_{t\to\infty}\inf\frac{e(t)}{t^{2n-1}}=+\infty \tag{3.11}$$

(3.10)与(3.11)相矛盾.

现设$y(t)$是不等式(3.1)′的最终正解，由类似于(3.2)式的假设

$$y(t)=z(t)-e(t) \tag{3.2$'$}$$

将(3.2)′代入(3.1)′，得到(3.3)式.如前所证，存在$M>0$，使t充分大时有$0<z(t)\leqslant Mt^L$，其中L为奇数($1\leqslant L\leqslant 2n-1$)，利用(3.2)′式，可知$z(t)=y(t)+e(t)>e(t)$，结合(3.9)式得

$$\lim_{t\to\infty}\sup\frac{e(t)}{t^L}\leqslant\lim_{t\to\infty}\sup\frac{z(t)}{t^L}\leqslant M \tag{3.12}$$

由(3.8)式得

$$\lim_{t\to\infty}\sup\frac{e(t)}{t^L}=t^{2n-1-L}\lim_{t\to\infty}\sup\frac{e(t)}{t^{2n-1}}=+\infty \tag{3.13}$$

(3.12)与(3.13)相矛盾.

由以上论证知定理3.1结论成立.

定理3.2 设条件(B_1)～(B_4)成立. 如果ϕ_1和ϕ_2均是不减函数并且对$t_0\in(0,\infty)$有

$$\int_{t_0}^{\infty}b_1(t)\phi_1[e_+(\sigma_1(t))]dt=\infty \tag{3.14}$$

则不等式(3.1)无最终正解；如果

$$\int_{t_0}^{\infty}b_2(t)\phi_2[e_-(\sigma_2(t))]dt=\infty \tag{3.15}$$

则不等式(3.1)′无最终正解. 这里$e_+=\max\{e,0\}$，$e_-=-\min\{e,0\}$.

证明 用反证法，设$y(t)$是(3.1)的最终正解，由引理3.1知，由(3.2)式确定的$z(t)$满足(3.6)式. 取t_0充分大，使当$t\geqslant t_0$时(3.6)成立且$z(\sigma_i(t))>0$ ($i\in I_N$). 从t_0到T积分(3.4)式得

$$q(T)z^{(2n-1)}(T)-q(t_0)z^{(2n-1)}(t_0)\leqslant-\sum_{i=1}^{N}\int_{t_0}^{T}b_i(t)\phi_i[y(\sigma_i(t))]dt \tag{3.16}$$

由(3.6)式知$\lim\limits_{T\to\infty}q(T)z^{(2n-1)}(T)$存在. 利用(3.16)知

$$\lim_{T\to\infty}\int_{t_0}^{T}b_i(t)\phi_i[y(\sigma_i(t))]dt<\infty \qquad (i\in T_N) \tag{3.17}$$

考虑$y(t)=z(t)+e(t)=z(t)+e_+(t)-e_-(t)$，故

(i) 当$e_+=0$时$z+e=z-e_->0=e_+$；

(ii) 当$e_-=0$时$z+e=z+e_+>e_+$.

因此，当$t\geqslant t_0$时

$$z(\sigma_i(t))+e(\sigma_i(t))>e_+(\sigma_i(t)) \qquad (i\in I_N) \tag{3.18}$$

由ϕ_1是不减函数，所以由(3.18)式得

$$\phi_1[y(\sigma_1(t))]=\phi_1[z(\sigma_1(t)+e(\sigma_1(t))]>\phi_1[e_+(\sigma_1(t))] \tag{3.19}$$

利用(3.17)与(3.19)，得到

$$\int_{t_0}^{\infty} b_1(t)\phi_1[e_+(\sigma_1(t))]dt\leqslant\int_{t_0}^{\infty} b_1(t)\phi_1[y(\sigma_1(t))]dt<\infty$$

这与(3.14)式矛盾，从而(3.1)无最终正解.

同理可证(3.15)成立时(3.1)′也无最终正解.

定理3.3　设条件$(B_1)\sim(B_6)$成立. 如果ϕ_1是不减函数且对$t_0>0$有

$$\int_{t_0}^{\infty} b_1(t)dt=\infty \tag{3.20}$$

则不等式(3.1)与(3.1)′均无最终正解.

证明　用反证法. 设$y(t)$是(3.1)的最终正解，由引理3.1知，由(3.2)式决定的$z(t)$满足(3.3)和(3.6). 取t_0充分大，使当$t\geqslant t_0$时(3.6)成立且$z(\sigma_i(t))>0(i\in I_N)$. 利用条件$(B_5)$，知存在$n_0\in I=\{1, 2, 3, \cdots\}$，使$S_{n_0}\geqslant t_0$，则当$t\geqslant S_{n_0}$时

$$\begin{aligned}&z(t)+e(t)\geqslant z(t)+e(S_{n_0})=\bar{z}(t)\\&z(\sigma_i(t))+e(\sigma_i(t))\geqslant\bar{z}(\sigma_i(t))\qquad (i\in I_N)\end{aligned} \tag{3.21}$$

由(3.21)式知$z^{(k)}(t)=\bar{z}^{(k)}(t)(k\in I_{2n})$. 由(3.3)式及$\phi_1$是不减函数，得$t\geqslant S_{n_0}$时

$$\begin{aligned}&[q(t)\bar{z}^{(2n-1)}(t)]'+b_1(t)\phi_1[\bar{z}(\sigma_1(t))]\\&\leqslant[q(t)z^{(2n-1)}(t)]'+\sum_{i=1}^{N}b_i(t)\phi_i[z(\sigma_i(t)+e(\sigma_i(t))]\leqslant 0\end{aligned} \tag{3.22}$$

由引理3.1知$z'(t)>0$，故当$t\geqslant S_{n_0}$时

$$\bar{z}(t)=z(t)+e(S_{n_0})\geqslant z(S_{n_0})+e(S_{n_0})=y(S_{n_0})>0$$

从S_{n_0}到T积分(3.22)式产生

$$\begin{aligned}&q[T]\bar{z}^{(2n-1)}(T)-q(S_{n_0})\bar{z}^{(2n-1)}(S_{n_0})\leqslant-\int_{S_{n_0}}^{T} b_1(t)\phi_1[\bar{z}(\sigma_1(t))]dt\\&\leqslant-\phi_1[\bar{z}(\sigma_1^0)]\int_{S_{n_0}}^{T} b_1(t)dt\end{aligned} \tag{3.23}$$

这里　$\sigma_1^0=\min\{\sigma_1(t), S_{n_0}\leqslant t<\infty\}$. 在(3.23)式中令$T\to\infty$，因$\lim\limits_{T\to\infty}q(T)\bar{z}^{(2n-1)}(T)$存在，这与(3.20)式矛盾.

设$y(t)$是(3.1)′的最终正解，类似于上述证明，我们仍得到矛盾. 定理证毕.

四、边值问题的振动准则

由第二节知，本文所述三类边值问题解的振动性取决于形如(3.1)的不等式的振动性. 在第三节我们又给出了不等式(3.1)或(3.1)′的振动条件，综合上面的讨论，我们容易建立下列边值问题的振动准则.

定理4.1　设条件$(A_1)\sim(A_3)$成立. 如果$\int_{t_0}^{\infty}a(t)dt<\infty$，且存在函数$e(t)$满足

$$\left(\exp\left[\int_{t_0}^{t}a(t)dt\right]e^{(2n-1)}(t)\right)'=\frac{1}{|\Omega|}\exp\left[\int_{t_0}^{t}a(t)dt\right]\int_{\Omega}f(x, t)dx \tag{4.1}$$

且$e(t)$是振动的，则当(3.7)和(3.8)均成立时，边值问题(1.1)(1.2)的一切解均在G内是振动的.

证明 不等式(2.2)和(2.2)$'$两端分别乘以$q(t)=\exp\left[\int_{t_0}^{t}a(t)dt\right]$，则有

$$[q(t)v^{(2n-1)}(t)]'+\sum_{i=1}^{m}q(t)\psi_i(t)\phi_i[v(\gamma_i(t))]\leqslant\frac{1}{|\Omega|}q(t)\int_{\Omega}f(x,\ t)dx \tag{4.2}$$

和

$$[q(t)v^{(2n-1)}(t)]+\sum_{i=1}^{m}q(t)\psi_i(t)\phi_i[v(\gamma_i(t))]\leqslant-\frac{1}{|\Omega|}q(t)\int_{\Omega}f(x,\ t)dx \tag{4.2$'$}$$

由条件$(A_1)\sim(A_3)$和定理条件知$(B_1)\sim(B_4)$成立，又(3.7)和(3.8)也成立，故由定理3.1知不等式(4.2)和(4.2)$'$均无最终正解. 再由定理2.1知本定理结论成立.

定理4.2 设条件$(A_1)\sim(A_3)$成立且$\int_{t_0}^{\infty}a(t)dt<\infty$，如果由(4.1)式定义的$e(t)$是振动的且$\phi_1$和$\phi_2$均为不减函数，满足(3.14)与(3.15). 其中$b_i(t)=q(t)\psi_i(t)$，$\sigma_i(t)=\gamma_i(t)$ $(i=1,2)$. 则边值问题(1.1)(1.2)的一切解均在G内是振动的.

证明 不等式(4.2)和(4.2)$'$满足定理3.2的条件，故均无最终正解. 由定理2.1知结论成立.

定理4.3 设条件$(A_1)\sim(A_3)$成立且$\int_{t_0}^{\infty}a(t)dt<\infty$，如果由(4.1)式定义的$e(t)$是减幅振动的，则当$\phi_1$是不减函数及(3.20)式成立时，其中$b_1(t)=q(t)\psi_1(t)$，则边值问题(1.1)(1.2)的一切解均在$G$内是振动的.

证明 不等式(4.2)和(4.2)$'$满足定理3.3的条件，均无最终正解，由定理2.1知结论成立.

对于边值问题(1.1)(1.3)和(1.1)(1.4)，我们建立下面的振动准则，证明略去.

定理4.4 设条件$(A_1)\sim(A_3)$成立. 如果$\int_{t_0}^{\infty}a(t)dt<\infty$，且存在振动函数$e(t)$满足

$$\left(\exp\left[\int_{t_0}^{t}a(t)dt\right]e^{(2n-1)}(t)\right)'=\exp\left[\int_{t_0}^{t}a(t)dt\right](G(t)+F(t)) \tag{4.3}$$

则当(3.7)(3.8)均成立时，边值问题(1.1)(1.3)的一切解均在G内是振动的.

定理4.5 设条件$(A_1)\sim(A_3)$成立且$\int_{t_0}^{\infty}a(t)dt<\infty$，如果由(4.3)式定义的$e(t)$是振动的且$\phi_1$与$\phi_2$均为不减函数，满足(3.14)与(3.15)，其中$b_i(t)=q(t)\psi_i(t)$，$\sigma_i(t)=\gamma_i(t)$ $(i=1,2)$. 则边值问题(1.1)(1.3)的一切解均在G内是振动的.

定理4.6 设条件$(A_1)\sim(A_3)$成立且$\int_{t_0}^{\infty}a(t)dt<\infty$，如果由(4.3)式定义的$e(t)$是减幅振动的，则当$\phi_1$是不减函数及(3.20)式成立时，其中$b_1(t)=q(t)\psi_1(t)$，边值问题(1.1)(1.3)的一切解均在$G$内是振动的.

定理4.7 设条件$(A_1)\sim(A_3)$成立且$\int_{t_0}^{\infty}a(t)dt<\infty$，若存在振动函数$e(t)$，满足

$$\left(\exp\left[\int_{t_0}^{t}a(t)dt\right]e^{(2n-1)}(t)\right)'=\exp\left[\int_{t_0}^{t}a(t)dt\right]S(t) \tag{4.4}$$

则当(3.7)和(3.8)均成立时，边值问题(1.1)(1.4)的一切解均在G内是振动的.

定理4.8 设条件$(A_1)\sim(A_3)$成立且$\int_{t_0}^{\infty}a(t)dt<\infty$. 若由(4.4)式定义的$e(t)$是振动的且下列两个条件之一成立时，边值问题(1.1)、(1.4)的一切解在G内均是振动的.

(i) ϕ_1与ϕ_2为不减函数满足(3.14)与(3.15)，其中$\sigma_i(t)=\gamma_i(t)$，$b_i(t)=q(t)\psi_i(t)$ $(i=1,2)$.

(ii) $\int_{t_0}^{\infty}\lambda_1(t)q(t)e_+(\tau_1(t))dt=\infty$及$\int_{t_0}^{\infty}\lambda_2(t)q(t)e_-(\tau_2(t))dt=\infty$.

定理4.9 设条件$(A_1)\sim(A_3)$成立且$\int_{t_0}^{\infty}a(t)dt<\infty$，若由(4.4)式定义的$e(t)$是减幅振动的，则当下列两个条件之一成立时，边值问题(1.1)、(1.4)的一切解在G内是振动的.

(i) φ_1是不减函数且$\int_{t_0}^{\infty}q(t)\psi_1(t)dt=\infty$.

(ii) $\int_{t_0}^{\infty}q(t)\lambda_1(t)dt=\infty$.

通过以上的定理，我们将文献[2,3,5,8]中的某些结果推广至高阶方程，下面举一个具体例子. 考虑方程

$$u_{tt}+\exp\left[-\frac{t}{2}\right]u_t+2u=u_{xx}+\exp[\pi]u_{xx}(x,\ t-\pi)+f(x,\ t) \tag{4.5}$$

其中 $(x,\ t)\in(0,\ \pi)\times(0,\infty)$，$f(x,\ t)=\sin x\left(2\exp[t]+\exp\left[\frac{t}{2}\right]\right)(\sin t+\cos t)$. 带有边界条件

$$u(0,\ t)=u(\pi,\ t)=0 \tag{4.6}$$

与方程(1.1)和条件(1.4)比较得到$a(t)=\exp\left[-\frac{t}{2}\right]$，$n=1$，$m=1$，$k=1$，$p_1=2u$. 由(2.9)式计算得$a_1=1$，$w(x)=\sin x$. 再据(2.11)式算出$S(t)=\frac{\pi}{4}\left(2e^t+\exp\left[\frac{t}{2}\right]\right)(\sin t+\cos t)$. 再由(4.4)式算出

$$e(t)=\int_0^t\left[\exp\left(2-2\exp\left[-\frac{s}{2}\right]\right)\int_0^s\pi\left(\exp[t]-\frac{1}{2}\exp\left[\frac{t}{2}\right]-\frac{1}{2}\right)\cdot(\sin t+\cos t)dt\right]ds$$

显然$e(t)$是振动的. 我们可以证明(3.7)、(3.8)或定理4.8中条件(i)，(ii)均成立. 利用定理4.7或4.8均可证明边值问题(4.5)、(4.6)的一切解均在$(0,\ \pi)\times(0,\ \infty)$是振动的. 事实上，$u=\exp[t]\sin t\sin x$就是(4.5)(4.6)的一个振动解.

参考文献

[1] D. Georgou and K. Kreith, Founctional characte-ristic initial value problems, *J. Math. Anal. Appl.*, 107(2)(1985), 414—424.

[2] D. P. Mishev, Oscillatory properties of the solutions of hyperbolic differential equations with"maximum", *Hiroshima Math. J.*, 16(1986), 77—83.

[3] D. P Mishev and D. D. Bainov, Oscillation properties of the solutions of a

class of hyperbolic equations of neutral type, *Funkcial. Ekvac.*, 29(2) (1986), 213—218.

[4] N. Yoshida, Forced oscillation of solutions of parabolic equations, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 36 (1987), 289—294.

[5] N. Yoshida, On the zeros of solutions of hyperbolic equations of neutral type, *Diff. Integral Eqs.*, 3 (1990), 155—160.

[6] D. P. Mishev and D. D. Bainov, Oscillation of the solutions of parabolic differential equations of neutral type, *Appl. Math. Comput.*, 28 (1988), 97—111.

[7] R. O. Ẑilina, Oscillatin of linear retarded differential equation, *Czech. Math. J.*, 34 (1984), 371—377.

[8] 俞元洪、崔宝同，关于具有偏差变元的双曲方程解的强迫振动性，应用数学学报，17(3) (1994), 448—458.

[9] 靳明忠，高阶非线性时滞微分方程的振动定理，应用数学和力学，15(9) (1994), 823—830.

Forced Oscillations of Boundary Value Problems of Higher Order Functional Partial Differential Equations

Jin Mingzhong   Dong Ying

(*Wuhan Automotive Polytechnic University, Wuhan* 430070, *P. R. China*)

Li Chongxiao

(*Yunnan Polytechnic University, Kunming* 650051, *P. R. China*)

Abstract

In this paper we study the forced oscillations of boundary value problems of a class of higher order functional partial differential equations. The principal tool is an everaging technique which enables one to establish oscillation in terms of related functional differential inequalities.

Key words higher order functional partial differential equation, boundary value problems, forced oscillation