应用数学和力学，第17卷 第8期（1996年8月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

均值误差的随机加权逼近的重对数律
——非独立同分布情况

王炳章[1]　彭建平[1]

（丁浩江推荐，1995年3月6日收到，1996年1月11日收到修改稿）

摘　要

讨论了独立不同分布情况下均值误差的分布估计问题，用随机加权法给出了精度为$O(\sqrt{\ln\ln n}/n)$的逼近分布。

关键词　均值误差　随机加权　重对数律

一、引　　言

设有一个测量对象，现用几种不同的仪器对这一对象进行测量，这几个测量值的模型应该是

$$\left.\begin{array}{l} X_1=\mu+e_1 \\ X_2=\mu+e_2 \\ \quad\cdots\cdots \\ X_n=\mu+e_n \end{array}\right\} \tag{1.1}$$

其中e_i，$i=1,2,\cdots,n$是相互独立的，且$Ee_i=0$。由于几种仪器具有不同的误差特性，因而一般不能假定$e_1,e_2,\cdots,e_n$是同分布的。本文欲对上述独立不同分布的测量模型，找出其均值误差

$$T_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu$$

的分布，但由于T_n是一个不可实现的随机变量，我们只能考虑给出T_n的分布的估计。首先自然会想到用正态分布作为T_n分布的近似，但正态逼近的精度不高，至多能达到$O(1/\sqrt{n})$。文献[1]中对独立同分布情况也只得到了精度为$o(1/\sqrt{n})$的逼近分布，较之正态逼近的精度改进不大。本文作者经过仔细研究，给出了精度达到$O(\sqrt{\ln\ln n}/n)$的T_n的逼近分布。

二、结　　论

为使讨论明确起见，设

1 烟台大学数学系，山东烟台 264005

$$F_n(x)=P\{T_n/(\mathrm{var}T_n)^{1/2}\leqslant x\}=P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)}{\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right)^{1/2}}\leqslant x\right\} \tag{2.1}$$

其中，$\sigma_i^2=Ee_i^2\triangleq\mu_{2i}$．它是标准化的均值误差分布．为了给出$F_n(x)$的逼近分布，我们令

$$H_n=\sum_{j=1}^{n}(X_j-\bar{X})\eta_j,\quad \bar{H}_n^2=\sum_{j=1}^{n}(X_j-\bar{X})^2 \tag{2.2}$$

其中，$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j$，而$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$相互独立，服从同一分布$\Gamma(4,2)$，且与样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立．$H_n$称为随机加权统计量．我们考虑用$H_n$在$X_1,X_2,\cdots,X_n$给定之下的条件分布去逼近$F_n(x)$．以$P^*$表示$X_1,X_2,\cdots,X_n$给定之下的条件概率，记

$$F_n^*(x)=P^*\{H_n/\bar{H}_n\leqslant x\} \tag{2.3}$$

为了精确地叙述$F_n^*(x)$与$F_n(x)$之间的逼近程度，我们设：$X_1,X_2,\cdots$ 为独立随机变量序列，$X_i=\mu+e_i$，$i=1,2,\cdots$，其中e_i满足$Ee_i=0$．此外它们还满足

（Ⅰ）存在常数k以及p和p'，$0\leqslant p'<\min(p,(1+p)/3)$，$i=1,2,\cdots$,使得

$$E|X_n-\mu|^{6(1+p)}\leqslant k\cdot n^{p'} \tag{2.4}$$

（Ⅱ）
$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E|X_i-\mu|^6<\infty \tag{2.5}$$

（Ⅲ）
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2=\sigma_0^2>0 \tag{2.6}$$

（Ⅳ）记$V_j(t)=E\exp[it(X_j-\mu)]$，又记

$$n_{\varepsilon,\delta}=\#\{j:\ |V_j(t)|\leqslant 1-\delta,\ \text{对一切}|t|\geqslant\varepsilon\text{成立},\ j=1,2,\cdots,n\}$$

上式中#{　}表示集合{　}中元素的个数．关于$V_j(t)$的条件是，对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta=\delta_\varepsilon>0$，使得

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{n_{\varepsilon,\delta}}{n}>0 \tag{2.7}$$

（Ⅴ）
$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}E[(X_j-\mu)^2-E(X_j-\mu)^2]^2>0 \tag{2.8}$$

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}E[(X_j-\mu)^3-E(X_j-\mu)^3]^2>0 \tag{2.9}$$

在这些条件下，本文的主要结论是

定理1　设上述条件（Ⅰ）～（Ⅴ）成立，则对几乎所有的样本序列$X_1,X_2,\cdots$,

$$\sup_{x\in R'}|F_n(x)-F_n^*(x)|=O\left(\frac{\sqrt{\ln\ln n}}{n}\right)$$

三、结论的证明

首先给出$F_n(x)$的渐近展开。

引理1 设条件(Ⅰ)～(Ⅳ)成立，则

$$F_n(x)=\Phi(x)-\frac{1}{6}\varphi(x)(x^2-1)\frac{\sum_{j=1}^{n}\mu_{3j}}{\left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2\right)^{3/2}}-\frac{1}{24}\varphi(x)(x^3-3x)\frac{\sum_{j=1}^{n}r_{4j}}{\left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2\right)^2}$$

$$-\frac{1}{72}\varphi(x)(x^5-10x^3+15x)\frac{\left(\sum_{j=1}^{n}\mu_{3j}\right)^2}{\left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2\right)^3}+o\left(\frac{1}{n}\right) \tag{3.1}$$

对$x\in R'$一致成立，其中

$$\mu_{3j}=E(X_j-\mu)^3,\quad \mu_{4j}=E(X_j-\mu)^4$$

$$r_{4j}=\mu_{4j}-3\mu_{2j}^2=E(X_j-\mu)^4-3\sigma_j^4$$

证明 由条件(Ⅱ)得，对每个j，

$$E|X_j-\mu|^4<\infty$$

于是利用文献[2]中定理1（取$k=4$）只需证明

$$C(4)\Big\{(1+|x|)^{-4}\left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2\right)^{-2}\sum_{j=1}^{n}E|W_{nj}^{(x)}|^4+(1+|x|)^{-5}\left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2\right)^{-5/2}$$

$$\cdot\sum_{j=1}^{n}E|Z_{nj}^{(x)}|^5+(1+|x|)^{-5}n^{10}\left(\sup_{|t|\geqslant\delta_n}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}|V_j(t)|+\frac{1}{2n}\right)^n\Big\}$$

$$\triangleq C(I_1+I_2+I_3)=o\left(\frac{1}{n}\right) \tag{3.2}$$

对$x\in R'$一致成立，其中

$$\delta_n=\frac{1}{12}B_n^2\left(\sum_{j=1}^{n}E|Y_{nj}|^3\right)^{-1},\quad B_n^2=\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2$$

$$Y_{nj}=(X_j-\mu)I_{\{|X_j-\mu|\leqslant B_n\}}$$

$$Z_{nj}^{(x)}=(X_j-\mu)I_{(|X_j-\mu|\leqslant B_n(1+|x|))}$$

$$W_{nj}^{(x)}=(X_j-\mu)I_{(|X_j-\mu|>B_n(1+|x|))}$$

我们分三项证明(3.2)式。

对I_1，利用条件(2.4)式及(2.6)式我们有

$$nI_1\leqslant n\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2\right)^{-2}\sum_{j=1}^{n}|W_{nj}^{(x)}|^4$$

$$\leqslant n\left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2\right)^{-2}\sum_{j=1}^{n}\frac{E|X_j-\mu|^{6(1+p)}}{B_n^{2+6p}}$$

$$\leqslant k\cdot n^{2+p'}\Big(\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2\Big)^{-2-1-3p}\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

类似地，对I_2我们有

$$nI_2\leqslant n\cdot\Big(\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2\Big)^{-5/2}\sum_{j=1}^{n}E|Z_{nj}^{(x)}|^5$$

$$\leqslant n\cdot\Big(\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2\Big)^{-5/2}\sum_{j=1}^{n}(E|X_j-\mu|^{6(1+p)})^{5/6(1+p)}$$

$$\leqslant k'\Big(\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2\Big)^{-5/2}\cdot n^{2+5p'/6(1+p)}$$

$$=k'\cdot\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2\Big)^{-5/2}\cdot n^{-1/2+5p'/6(1+p)}\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

下面证明对I_3亦满足．$nI_3\to 0$。首先易知

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}E|Y_{nj}|^3$$

$$\leqslant\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}E|X_j-\mu|^3$$

$$\leqslant\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(E|X_j-\mu|^6+1)<\infty$$

于是有

$$\liminf_{n\to\infty}\delta_n>0$$

再利用条件(Ⅳ)可知存在$\varepsilon,\delta_\varepsilon>0$，使当$n$充分大时

$$\sup_{|t|\geqslant\delta_n}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}|V_j(t)|\leqslant\frac{n_{\varepsilon},\delta_{\varepsilon}}{n}(1-\delta_\varepsilon)+\frac{n_{\varepsilon},\delta_{\varepsilon}}{n}$$

$$=1-\frac{n_{\varepsilon},\delta_{\varepsilon}}{n}\cdot\delta_\varepsilon<1-\frac{a}{2}\delta_\varepsilon$$

其中 $a=\liminf\limits_{n\to\infty}\dfrac{n_{\varepsilon},\delta_{\varepsilon}}{n}>0$。由上式立即可得

$$nI_3=(1+|x|)^{-5}n^{10}\Big(\sup_{|t|\geqslant\delta_n}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}|V_j(t)|+\frac{1}{2n}\Big)^n$$

$$\leqslant n^{10}\Big(1-\frac{a}{2}\delta_\varepsilon+\frac{1}{2n}\Big)^n\to 0$$

故(3.2)式得证．引理1得到证明．

引理2 设条件(Ⅰ)～(Ⅲ)成立，则对几乎所有的样本序列$X_1,X_2,\cdots$,

(i) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}[(X_j-\mu)^m-E(X_j-\mu)^m]=0 \qquad (m=2,3,4)$ (3.3)

(ii) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}[|X_j-\mu|^m-E|X_j-\mu|^m]=0 \qquad (m=2,3,4)$ (3.4)

(iii) $\lim_{n\to\infty}\bar{X}=\mu$ (3.5)

证明 (i) 以$m=4$为例．由条件(Ⅰ)

$$E|X_n-\mu|^{4(1+p)}\leqslant k\cdot n^{p'}$$

于是利用Cr-不等式得

$$E|(X_i-\mu)^4-E(X_i-\mu)^4|^{1+p}\leqslant 2^p(E|X_i-\mu|^{4(1+p)}+(E|X_i-\mu|^4)^{1+p})$$
$$\leqslant 2^{p+1}\cdot E|X_i-\mu|^{4(1+p)}\leqslant k\cdot 2^{p+1}\cdot i^{p'}$$

故若$0<p\leqslant 1$，我们有

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{E|(X_i-\mu)^4-E(X_i-\mu)^4|^{1+p}}{i^{1+p}}\leqslant k\cdot 2^{p+1}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^{1+p-p'}}<\infty$$

据强收敛判别法([3]第九章Theorem12)可知

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^4-E(X_i-\mu)^4)\to 0,\quad \text{a.e.} \tag{3.6}$$

若$p>1$，由$p'<(1+p)/3$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{E|(X_i-\mu)^4-E(X_i-\mu)^4|^2}{i^2}\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(E|(X_i-\mu)^4-E(X_i-\mu)^4|^{1+p})^{2/(1+p)}}{i^2}$$

$$\leqslant k'\sum_{i=1}^{\infty}i^{2p'/(1+p)-2}<\infty$$

故(3.6)式亦成立．

同理可证(ii)及(iii)．

引理3 设条件(Ⅰ)～(Ⅲ)成立，则对几乎所有的样本序列$X_1,X_2,\cdots$,

(i) $\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i-\bar{X}|^m<\infty \qquad (m=3,4)$ (3.7)

(ii) $\lim_{m\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i-\bar{X}|^2=\sigma_0^2>0$ (3.8)

(iii) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{1\leqslant j\leqslant n}|X_j-\bar{X}|=0$ (3.9)

证明 (i) 以$m=3$为例．利用不等式

$$||a|^3-|b|^3|\leqslant|a-b|^3+3|a-b|^2\cdot|b|+3|a-b|\cdot|b|^2$$

我们有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}||X_i-\bar{X}|^3-|X_i-\mu|^3|$$

$$\leqslant|\bar{X}-\mu|^3+3|\bar{X}-\mu|^2\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n|X_i-\mu|+3|\bar{X}-\mu|\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n|X_i-\mu|^2$$

由引理2之(ii)，

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n|X_i-\mu|^2=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E|X_i-\mu|^2$$

$$\leqslant\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(E|X_i-\mu|^6+1)<\infty$$

同理有

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n|X_i-\mu|^m<\infty\qquad(m=1,3)$$

结合引理2(iii)得

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\left||X_i-\mu|^3-|X_i-\bar{X}|^3\right|=0$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(|X_i-\bar{X}|^3-|X_i-\mu|^3)=0\tag{3.10}$$

于是有

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n|X_i-\bar{X}|^3=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n|X_i-\mu|^3<\infty$$

下面证(ii)式．与(3.10)式同理有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n((X_i-\mu)^2-(X_i-\bar{X})^2)=0$$

故有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n|X_i-\bar{X}|^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E|X_i-\mu|^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\sigma_i^2=\sigma_0^2$$

下面证明(iii)式．对任意$\varepsilon>0$

$$\sum_{n=1}^\infty P\{|X_n-\mu|\geqslant\sqrt{n}\,\varepsilon\}\leqslant\sum_{n=1}^\infty\frac{E|X_n-\mu|^{6(1+p)}}{n^{3(1+p)}\varepsilon^{6(1+p)}}$$

$$\leqslant\frac{k}{\varepsilon^{6(1+p)}}\cdot\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^{3(1+p)-p}}<\infty$$

于是有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}|X_n-\mu|=0,\quad\text{a.e.}$$

故有

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1<j<n}\frac{1}{\sqrt{n}}|X_j-\mu|=0,\qquad \text{a.e.}$$

由上式不难得到

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1<j<n}\frac{1}{\sqrt{n}}|X_j-\bar{X}|=0,\qquad \text{a.e.}$$

引理4 设条件(Ⅰ)～(Ⅲ)成立，则对几乎所有的样本序列X_1，X_2，…，

$$F_n^*(x)=\Phi(x)-\frac{1}{6}\varphi(x)(x^2-1)\sum_{j=1}^{n}\beta_{nj}^3-\frac{1}{16}\varphi(x)(x^3-3x)\sum_{j=1}^{n}\beta_{nj}^4$$

$$-\frac{1}{72}\varphi(x)(x^5-10x^3+15x)\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_{nj}^3\right)^2+o\left(\frac{1}{n}\right)\tag{3.11}$$

对$x\in R'$一致成立，其中

$$\beta_{nj}=\frac{X_j-\bar{X}}{\left[\sum_{j=1}^{n}(X_j-\bar{X})^2\right]^{1/2}}\tag{3.12}$$

证明 参考文献[4]中定理1的证明方法易证明本引理，限于篇幅，此处从略。

由条件(Ⅱ)不难得到

$$\limsup_{n\to\infty} n\cdot\sup_{x\in R}\left|\varphi(x)(x^3-3x)\frac{\sum_{j=1}^{n}r_{4j}}{\left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2\right)^2}\right|<\infty$$

$$\limsup_{n\to\infty} n\cdot\sup_{x\in R}\left|\varphi(x)(x^5-10x^3+15x)\frac{\left(\sum_{j=1}^{n}\mu_{3j}\right)^2}{\left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2\right)^3}\right|<\infty$$

结合引理1可得

定理2 设条件(Ⅰ)～(Ⅳ)成立，则

$$F_n(x)=\Phi(x)-\frac{1}{6}\varphi(x)(x^2-1)\frac{\sum_{j=1}^{n}\mu_{3j}}{\left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2\right)^{3/2}}+O\left(\frac{1}{n}\right)\tag{3.13}$$

对$x\in R'$一致成立。

由引理3易得

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt{n}\sum_{j=1}^{n}|\beta_{nj}|^3<\infty,\quad \limsup_{n\to\infty} n\cdot\sum_{j=1}^{n}|\beta_{nj}|^4<\infty$$

结合引理4可得

定理3 设条件(Ⅰ)～(Ⅲ)成立，则对几乎所有的样本序列$X_1,X_2,\cdots$，

$$F_n^*(x)=\Phi(x)-\frac{1}{6}\varphi(x)(x^2-1)\sum_{j=1}^{n}\beta_{nj}^3+O\left(\frac{1}{n}\right)\tag{3.14}$$

对$x\in R'$一致成立。

引理5 设$\{Y_n\}$为相互独立零均值随机变量列，

$$B_n^2=\sum_{i=1}^{n}E|Y_i|^2$$

若下列两条件成立

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(2B_n^2\ln\ln B_n^2)^{-(2+\alpha)/2}E|Y_n|^{2+\alpha}<\infty \qquad (0<\alpha\leqslant 1)$

2. $\lim B_n=\infty, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{B_{n+1}}{B_n}<\infty$

则有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\sum_{i=1}^{n}Y_i}{(2B_n^2\ln\ln B_n^2)^{1/2}}=1 \quad \text{a.s.}$$

本引理引自文献[5]。

在上引理中取

$$Y_i=(X_j-\mu)^3-E(X_j-\mu)^3$$

利用条件(Ⅱ)及条件(Ⅴ)易得

$$0<\liminf_{n\to\infty}\frac{B_n^2}{n}\leqslant\limsup_{n\to\infty}\frac{B_n^2}{n}<\infty$$

故易知引理5之条件2成立。

为证引理5之条件1成立，令$\Delta=\min(2p,1)$，易知有

$$\frac{\Delta}{2}>\frac{p'}{1+p}\left(1+\frac{\Delta}{2}\right)$$

由于

$$E|Y_n|^{2+\Delta}=E|(X_n-\mu)^3-E(X_n-\mu)^3|^{2+\Delta}\leqslant 2^{2+\Delta}E|X_n-\mu|^{6+3\Delta}$$
$$\leqslant 2^{2+\Delta}(E|X_n-\mu|^{6(1+p)})^{(6+3\Delta)/6(1+p)}\leqslant k''\cdot n^{\frac{p'}{1+p}\left(1+\frac{\Delta}{2}\right)}$$

于是有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2B_n^2\ln\ln B_n^2)^{-(2+\Delta)/2}E|Y_n|^{2+\Delta}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}(2B_n^2)^{-(2+\Delta)/2}\cdot E|Y_n|^{2+\Delta}$$
$$\leqslant k'''\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\frac{p'}{1+p}\left(1+\frac{\Delta}{2}\right)}}{n}<\infty$$

从而依引理5得

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^3-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mu_{3j}=O\left(\left(\frac{\ln\ln n}{n}\right)^{1/2}\right)$$

同理可证明

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j-\mu)^2-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2=O\left(\left(\frac{\ln\ln n}{n}\right)^{1/2}\right)$$

$$\bar{X}-\mu=O\left(\left(\frac{\ln\ln n}{n}\right)^{1/2}\right)$$

由这三式容易得到

引理6 设条件(Ⅰ)、(Ⅱ)、(Ⅲ)、(Ⅴ)成立，则对几乎所有的样本序列$X_1, X_2, \cdots$,

$$\sqrt{n}\sum_{j=1}^{n}\beta_{nj}^3-\frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mu_{3j}}{\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^2\right)^{3/2}}=O\left(\left(\frac{\ln\ln n}{n}\right)^{1/2}\right)$$

由引理6及定理2和定理3得到定理1。

参 考 文 献

[1] 涂冬生、郑忠国，随机加权法的渐近展开，应用概率统计，3(4) (1987)，340—347.

[2] 白志东、赵林诚，独立随机变量之和的分布函数的渐近展开，中国科学(A辑)，(8) (1985).

[3] V. V. Petrov, *Sums of Indenpendent Random Variables*, Springer-Verlag (1975).

[4] 姚泽清，一类有渐近展开的分布的独立和逼近，系统科学与数学，8(2) (1988)，113—126.

[5] R. Wittmann, A general law of iterated logarithm, *Z. Wahr. Verw. Geb.*, 68 (1985), 521—543.

The Law of the Iterated Logarithm of Random Weighting Approximation for Mean Error——Non.I.I.D. Situation

Wang Bingzhang Peng Jianping

(*Yantai University*, *Yantai*, *Shandong* 264005, *P. R. China*)

Abstract

For the distribution of mean error under independent but not identically distributed conditions, it approximating distribution whose precision reach $O(\sqrt{\ln\ln n}/n)$ is obtained.

Key words mean error, random weight, approximation