应用数学和力学，第17卷 第7期（1996年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

M.E. Shvez迭代解法及其在力学中的应用

袁镒吾[1] 刘又文[1]

（钱伟长推荐，1994年5月6日收到，1995年12月6日收到修改稿）

摘　　要

当微分方程中含有微量项时，可用 M. E. Shvez 迭代法求解。但当微量项出现奇性，或在某一区间内微量项并非微量时，用此法求解将遇到困难。本文针对这类问题，把原 M.E.Shvez 迭代解法稍加改变。算例表明，用改进了的 M. E. Shvez 法求解上述问题，其精度比原 M. E. Shvez 法的有所提高。

关键词　迭代法　奇异摄动法　地球-月球-宇宙飞船

一、引　　言

当微分方程中含有微量项时，可用 M. E. Shvez 迭代法求解[3]（以后简称 Shvez 法）。但当微量项出现奇性时，或者当微量项在某一区间内并非微量时，用此法求解会收敛很慢。

为了解决这个困难，本文提出将微量项变形，或者把那些出现奇性的微量项不视为微量项。

文中举了三个算例，并和准确解或奇异摄动法的解做了比较，表明用改进了的Shvez法求解，具有和奇异摄动法相同的精度，而计算过程则比后者更加简单。

二、微量项的变形

例 1　兹考虑定解问题

$$\left.\begin{aligned}&(x+\varepsilon y)y'+y=0 \qquad (2.1)\\ &y(1)=1 \qquad (2.2)\end{aligned}\right\}$$

式中标号“′”表示对变量x求导，ε为小参数。如果用正则摄动法求解，则在 $x=0$ 处有奇性，更高阶近似时，奇性越来越强[1]。

如果用 Shvez 法求解，则把式(2.1)改写成

$$xy'+y=-\varepsilon yy' \qquad (2.3)$$

上式右端为微量项。

零级近似：

---

1 中南工业大学，长沙 410083.

$$\left.\begin{aligned} xy_0'+y_0=0 \\ y_0(1)=1 \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

$(n+1)$级近似$(n\geqslant 0)$

$$xy_{n+1}'+y_{n+1}=-\varepsilon y_n y_n' \tag{2.5}$$

$$y_{n+1}(1)=1 \tag{2.6}$$

于是得式(2.1)、(2.2)的零级、一级近似解为

$$y_0=1/x \tag{2.7}$$

$$y_1=\frac{1}{x}+\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right) \tag{2.8}$$

由式(2.7)、(2.8)可见，零级近似解当$x=0$时出现奇性，一级近似解的奇性更强。

Shvez 法对于这个问题不适用的原因是由于当$x=0$时，由式(2.1)得$y'=-1/\varepsilon$，当$\varepsilon\to 0$时，$y\to\infty$。故在$x=0$附近，式(2.3)的右端并非微量。

于是，我们把式(2.3)变为

$$x+y/y'=-\varepsilon y \tag{2.9}$$

零级近似

$$x+y_0/y_0'=0,\quad y_0(1)=1 \tag{2.10}$$

式(2.10)的解为

$$y_0=1/x \tag{2.11}$$

一级近似

$$x+y_1/y_1'=-\varepsilon/x,\quad y_1(1)=1 \tag{2.12}$$

其解为

$$y_1=\sqrt{(1+\varepsilon)/(x^2+\varepsilon)} \tag{2.13}$$

二级近似

$$x+y_2/y_2'=-\varepsilon y_1=-\varepsilon\sqrt{(1+\varepsilon)/(x^2+\varepsilon)} \tag{2.14}$$

其解为

$$y_2=\exp\left[\int_x^1\frac{\sqrt{x^2+\varepsilon}\,dx}{x\sqrt{x^2+\varepsilon}+\varepsilon\sqrt{1+\varepsilon}}\right] \tag{2.15}$$

而式(2.1)、(2.2)的准确解为[1]

$$y=-\frac{x}{\varepsilon}+\sqrt{\frac{x^2}{\varepsilon^2}+\frac{2}{\varepsilon}+1} \tag{2.16}$$

表1及图1表示本文的一级、二级近似解和准确解的比较($\varepsilon=0.1$)。图 1 中实曲线表示准确解式 (2.16)；虚线表示本文的一级近似解式 (2.13)；点画线表示本文的二级近似解式(2.15)。

从表1及图1可见，本文的二级近似解具有很高的精度，其误差最大($x=0$) 才只 11.9%。

由表1及图1还可看到，本文的二级近似解的精度比一级近似解的有明显的提高，说明本文方法收敛速度相当快。

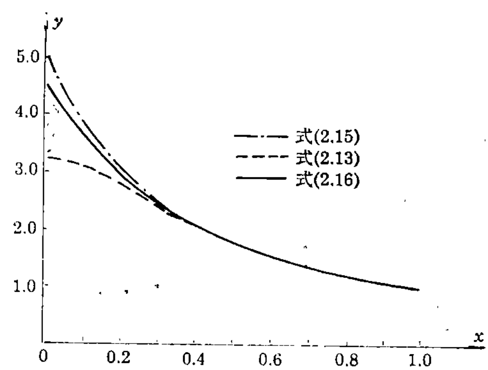


图 1

例2 兹研究下列定解问题：

表 1 ($\varepsilon=0.1$)

x		0	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12	0.14	0.16	0.18	0.20
y	准确解(2.16)	4.5826	4.3869	4.2000	4.0217	3.8519	3.6904	3.5371	3.3917	3.2539	3.1234	3.0000
	式(2.15)	5.1264	4.8264	4.5590	4.3185	4.1005	3.9013	3.7181	3.5491	3.3926	3.2469	3.1112
	式(2.13)	3.3166	3.3100	3.2904	3.2585	3.2153	3.1623	3.1009	3.0327	2.9594	2.8824	2.8031
x		0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
y	准确解(2.16)	2.7202	2.4772	2.2663	2.0828	1.9226	1.7823	1.5498	1.3666	1.2195	1.0990	1
	式(2.15)	2.8036	2.5419	2.3173	2.1236	1.9552	1.8085	1.5663	1.3766	1.2250	1.1018	1
	式(2.13)	2.6018	2.4061	2.2235	2.0569	1.9069	1.7728	1.5464	1.3654	1.2192	1.0995	1

$$(x+\varepsilon u)du/dx+(2+x)u=0 \tag{2.17}$$

$$u(1)=e^{-1} \tag{2.18}$$

把式(2.17)改写成

$$xdu/dx+(2+x)u=-\varepsilon udu/dx \tag{2.19}$$

上式右边为微量项。但当$x=0$时，由式(2.19)得$u'=-2/\varepsilon$，当$\varepsilon\to0$时，$u'\to\infty$，此时，式(2.19)的右边并非微量。因此，不便用M.E. Shvez 法求解。现将式(2.19)改写成

$$x+(2+x)u/u'=-\varepsilon u \tag{2.20}$$

零级近似

$$\left.\begin{aligned}&x+(2+x)u_0/u_0'=0\\&u_0(1)=e^{-1}\end{aligned}\right\} \tag{2.21}$$

$(n+1)$级近似$(n\geqslant0)$

$$\left.\begin{aligned}&x+(2+x)u_{n+1}/u_{n+1}'=-\varepsilon u_n\\&u_{n+1}(1)=e^{-1}\end{aligned}\right\} \tag{2.22}$$

我们求得式(2.17)、(2.18)的零级、一级、二级近似解分别为

$$u_0=x^{-2}\exp[-x] \tag{2.23}$$

$$u_1=\exp\left[-1+\int_x^1\left(\frac{2+x}{x+\varepsilon x^{-2}\exp[-x]}\right)dx\right] \tag{2.24}$$

$$u_2=\exp\left[-1+\int_x^1\left(\frac{2+x}{x+\varepsilon u_1}\right)dx\right] \tag{2.25}$$

文[1]用变形坐标法求得了式(2.17)、(2.18)的二级近似解为

$$u=\exp[-\xi]\cdot\xi^{-2}\left\{1+\varepsilon\left[\frac{2}{3\xi^3}+\frac{1}{3\xi^2}-\int_\xi^1\exp(-\xi)\left(\frac{2}{\xi^4}+\frac{1}{\xi^3}\right)\cdot d\xi\right]\right\}+O(\varepsilon^2/\xi^6) \tag{2.26}$$

$$x=\xi-\frac{\varepsilon}{3\xi^2}-\frac{3\varepsilon^2}{10\xi^4}+O\left(\frac{\varepsilon^3}{\xi^6}\right) \tag{2.27}$$

$x=0$时，

$$\left.\begin{aligned}&\xi=\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{1/3}+\frac{9}{10}\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^{2/3}+O(\varepsilon)\\&u=\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^{2/3}-\frac{3}{10}\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^{1/3}+O(1)\end{aligned}\right\} \tag{2.28}$$

为了检验本文二级近似解的准确程度，我们把它和文 [1] 的二级近似解进行了比较

(图2)．图中实曲线表示文[1]的解式(2.26)、(2.27)；虚线表示本文的二级近似解式(2.25)。取$\varepsilon=0.01$。从图2可见，本文的二级近似解与文[1]的二级近似解十分接近，特别是当$x\geqslant0.3$时。和式(2.26)、(2.27)所给出的解相比，本文的二级近似解式(2.25)的相对误差最大($x=0$时)为30%，而当$x=0.2$时便降为14.1%。

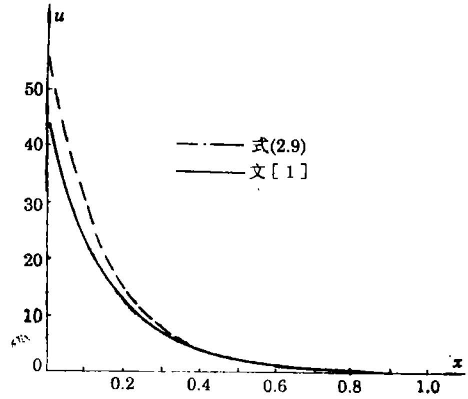
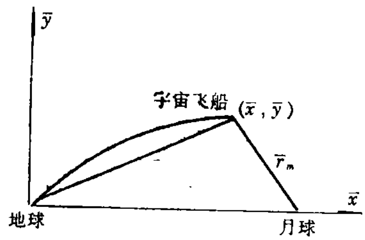


图 2



图

三、微量项出现奇性时

例3　如图3所示，宇宙飞船的无量纲形式的运动方程为

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-(1-\mu)\frac{x}{r_e^3}-\mu\cdot\frac{x-1}{r_m^3}\tag{3.1}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-(1-\mu)\frac{y}{r_e^3}-\frac{\mu y}{r_m^3}\tag{3.2}$$

$$r_e^2=x^2+y^2,\quad r_m^2=(x-1)^2+y^2\tag{3.3}$$

$$\mu=M_m/(M_m+M_e)\tag{3.4}$$

$$\bar{x}=x\cdot d,\quad \bar{y}=y\cdot d,\quad \bar{r}_e=r_e\cdot d,\quad \bar{r}_m=r_m\cdot d$$

$$\bar{t}=t\left[\frac{d^3}{G(M_m+M_e)}\right]^{1/2}\tag{3.5}$$

式中　$\bar{x}$，$\bar{y}$——坐标，$\bar{r}_e$——飞船、地球间距离，$\bar{r}_m$——飞船、月球间距离，d——地球、月球间距离，m，M_m，M_e——飞船、月球、地球的质量，G——万有引力常数。

我们仅讨论一维的情形，即设$y=0$。并设飞船的总能量为0。在式(3.1)中令$y=0$便得

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{1-\mu}{x^2}+\mu\cdot\frac{1-x}{(1-x)^3}$$

积分，并利用飞船的总能量为0的条件决定积分常数得[2]

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{1-\mu}{x}+\frac{\mu}{1-x},\qquad t(0)=0\tag{3. }$$

其中μ为小参数。如果用正则摄动法求解，则当$x\to1$时将出现奇性。

我们把式(3.6)改写成

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\frac{1}{x}=-\frac{\mu}{x}+\frac{\mu}{1-x},\qquad t(0)=0\tag{3.7}$$

当$x=0$时，上式右端微量项——μ/x具有奇性不便用 Shvez 法求解。因此，我们把式(3.7)改写成

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\frac{1-\mu}{x}=\frac{\mu}{1-x}, \qquad t(0)=0$$

即

$$\frac{1}{2}x\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-(1-\mu)=-\frac{\mu x}{1-x}, \qquad t(0)=0 \tag{3.8}$$

即是说，我们只把上式右端视为微量项，然后用 Shvez 法求解。

零级近似

$$(x_0/2)(dx_0/dt)^2-(1-\mu)=0, \quad t(0)=0 \tag{3.9}$$

$(n+1)$级近似$(n\geqslant 0)$

$$\frac{1}{2}x_{n+1}\left(\frac{dx_{n+1}}{dt}\right)^2-(1-\mu)=-\frac{\mu x_n}{1-x_n}, \quad t(0)=0 \tag{3.10}$$

于是得

$$x_0=[3\sqrt{2(1-\mu)}\,t/2]^{2/3} \tag{3.11}$$

$$x_1^{3/2}=\int_0^t\left[\frac{9}{2}\cdot(1-\mu)+\frac{9}{2}\cdot\frac{\mu(3\sqrt{2(1-\mu)}\,t/2)^{2/3}}{1-(3\sqrt{2(1-\mu)}\,t/2)^{2/3}}\right]^{1/2}dt \tag{3.12}$$

文[2]用变形坐标法也得到了这个问题的一级近似解。为了检验式(3.12)的准确程度，我们把它和文[2]的一级近似解进行了比较（表2）。表2中取$\mu=0.1$。从表 2 可见，本文结果式(3.12)和文[2]的一级近似结果十分符合，相对误差最大($t=0.45$时)仅为5%

表 2 $(\mu=0.1)$

t	x_1	
	本文 式(3.12)	文 [2]
0.1	0.34515	0.34726
0.2	0.55313	0.55690
0.3	0.73359	0.74098
0.4	0.90579	0.92657
0.43	0.96034	0.99329
0.44	0.98007	1.01991
0.45	0.99960	1.05069

参 考 文 献

[1] 钱伟长主编，《奇异摄动理论及其在力学中的应用》，科学出版社 (1981)，47—51.
[2] A. H. 奈弗，《摄动方法》王辅俊等译，上海科技出版社 (1984)，85—86.
[3] 袁镒吾，平行平板间径向气流的 Navier-Stokes 方程的新的近似解，上海力学，2 (1985)，1—9.

M.E.Shvez Iterative Method and Its Application in Mechanics

Yuan Yiwu Liu Youwen

(*Central South University of Technology, Changsha* 410083, *P. R. China*)

Abstract

Where there is contained small guantity termed in differential equation, we may solve it by using the M. E. Shvez iterative method.

If the small quantity term has singularity, or in the certian region, the small quantity term is not small, using this mthod to solve such differntial equation, we may meet difficulties. In this paper, the author improves the M. E. Shvez method. Several examples are given to demonstrate the algorithm.

Key words iterative method, singular perturbation method, earth-moon-spaceship problem