应用数学和力学，第17卷 第6期（1996年6月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

某四阶微分算子的一个正则性定理

刘 颖 范[1]

（林宗池推荐，1994年12月31日收到）

摘 要

本文给出了某带参数λ的四阶微分算子 B_λ 的一个正则性定理，由此我们分别获得了关于该算子在“非线性情形”的二个同胚类及在“线性情形”的三个线性同构类。这对描述某飞行器在其运行过程中某些类双向稳定性质是有用与方便的。

关键词 同胚 线性同构 内插不等式

一、引 言

考虑由研究某类飞行器运动性状而引入的四阶微分方程边值问题：

$$\left.\begin{array}{ll} y^{(4)}(x)-N(x)y'(x)+(\lambda^2+\lambda N(x))y(x)=f(x), & x\in[0,1] \\ y(x)\in C^4[0,1], \qquad f(x)\in C[0,1] & \\ \text{且} \quad y_{x=0,1}=y'_{x=0,1}=0 \quad (\text{或} y''_{x=0,1}=y^{(3)}_{x=0,1}=0) & \end{array}\right\} \tag{1.1}$$

则$y(x)$与$f(x)$（依赖于参数 λ）的双向连续性能刻划该类飞行器在其运行过程中的双向平稳性[1]，且恰恰能被如下算子$\hat{A}_\lambda$：$K_{(i,j)}\longrightarrow\hat{A}_\lambda K_{(i,j)}$相关于$\lambda$的正则性所描述，其中

$$\hat{A}_\lambda=\frac{d^4}{dx^4}+\sum_{i=1}^{3}P_i(x)\frac{d^i}{dx^i}+(\lambda^2+\lambda N(x))I$$

$$K_{(i,j)}=\{y(x)\in C^4[0,1]\,|\,y^{(i)}_{x=0,1}=y^{(j)}_{x=0,1}=0\},\qquad (i,j)=(0,1)\text{或}(2,3)$$

与该飞行器飞行性状更贴切的模型是在(1.1)中方程左端加上非线性扰动，即在$\hat{A}_\lambda$上加上一非线性项B，例如

$$By=\sum_{i=0}^{3}[b_i\sin(y^{(4-i)})+c_i(y^{(4-i)})^2(1+(y^{(4-i)})^2)^{-1}]$$

$$+\sum_{i=1}^{3}Q_i(x)y^{(i)}(1+(y^{(i)})^2)^{-1}+\sin\left(\sum_{i=1}^{3}R_i(x)y^{(i)}\right)$$

$y\in C^4[0,1]$。由于$\hat{A}_\lambda$为非对称及$\hat{A}_\lambda+B$为非线性，因此适用于高阶对称算子的自伴算子谱分解理论，Sturm-Liouville 理论与 Titchmarch 的函数论方法（[2]—[4]），很难被应用到如上算子$\hat{A}_\lambda$与$\hat{A}_\lambda+B$的正则性研究中去。本文采用与上述方法完全不同的泛函与估计技巧

1 南京航空航天大学理学院应用数学教研室，南京 210016

研究了一类以上述$\hat{A}_\lambda$与$\hat{A}_\lambda+B$为特例的四阶线性或非线性微分算子B_λ的正则性，得到了关于B_λ，参数λ与$C^4[0,1]$的一类子空间K的实的非线性同胚结果与复的线性同构结果。这不但使$\hat{A}_\lambda$与$\hat{A}_\lambda+B$的正则性研究成为可能，而且本文采用的方法还可以毫不费力地延伸到$2n$阶线性与非线性微分算子的正则性研究中去。

定义 设$B_\lambda=A+N_\lambda(x)I$：$C^4[0,1]\to C[0,1]$为一四阶微分算子，其中

a）A：$C^4[0,1]\to C[0,1]$是一线性或非线性算子，$\lambda\in R$或C（实或复数域）；

b）$N_\lambda(x)=\lambda^2+\lambda N(x)$，$N(x)\in C[0,1]$恒为实函数且可具有一定可微性，$I$是恒等算子。

本文以(,)，$\|\cdot\|_{L^2}$记$L^2(0,1)$中的内积与范数，以$\|\cdot\|_{H^m}$与$\|\cdot\|_{C^m}$记$H^m(0,1)$及$C^m[0,1](0\leqslant m\leqslant 4)$中的范数，即当$y\in H^m(0,1)$时，$\|y\|_{H^m}=\left(\sum\limits_{i=0}^{m}\|y^{(i)}\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}$；当$y\in C^m[0,1]$时，$\|y\|_{C^m}=\sum\limits_{i=0}^{m}\|y^{(i)}\|_C$。设$K$是$C^4[0,1]$的子空间，特别，$K=K_{(i,j)}=\{y\in C^4[0,1]\mid y^{(i)}_{x=0,1}=y^{(j)}_{x=0,1}=0\}$，$0\leqslant i<j\leqslant 3$。又记$\bar{K}^{\|\cdot\|_{H^m}}$是$K$的$\|\cdot\|_{H^m}$范数闭包，$(\bar{K}^{\|\cdot\|_{H^m}})^*$是$(\bar{K}^{\|\cdot\|_{H^m}},\|\cdot\|_{H^m})$的对偶空间并赋以对偶范数$\|\cdot\|_{H^{-m}}$。本文中，泛函总以对偶积形式< , >记之。

本文对B_λ与K的正则性研究是通过考察下述算子的同胚与线性同构展开的：

(A$_1$) B_λ：$(K,\|\cdot\|_{H^4})\to(B_\lambda K,\|\cdot\|_{H^{-4}})$，

(B$_1$) $\tilde{B}_\lambda$：$(\bar{K}^{\|\cdot\|_{H^4}},\|\cdot\|_{H^4})\to((\bar{K}^{\|\cdot\|_{H^4}})^*,\|\cdot\|_{H^{-4}})$；

(C$_1$) B_λ：$(K,\|\cdot\|_{H^4})\to(B_\lambda K,\|\cdot\|_{L^2})$，

(D$_1$) $\bar{B}_\lambda$：$(\bar{K}^{\|\cdot\|_{H^4}},\|\cdot\|_{H^4})\to(\overline{B_\lambda K}^{\|\cdot\|_{L^2}},\|\cdot\|_{L^2})$；

(E$_1$) B_λ：$(K,\|\cdot\|_{C^4})\to(B_\lambda K,\|\cdot\|_C)$。

其中$\tilde{B}_\lambda$与$\bar{B}_\lambda$分别是当(A$_1$)与(C$_1$)中算子B_λ连续时的最小连续扩张，而$\overline{B_\lambda K}^{\|\cdot\|_{L^2}}$是$B_\lambda K$的$\|\cdot\|_{L^2}$范数闭包。

本文主要定理的先验估计需要用到下述引理：

引理1.1[5] 设$y\in C^2[0,1]$，则

(1) $\|y'\|_{L^2}^2\leqslant C\ [\varepsilon\|y''\|_{L^2}^2+\varepsilon^{-1}\|y\|_{L^2}^2]$

其中$C=36^2$，$\varepsilon\in(0,1]$均与$y\in C^2[0,1]$无关；

(2) $\|y'\|_{L^2}^2\leqslant 10\|y''\|_{L^2}^2+90\|y\|_{L^2}^2$。

二、主要定理及其证明

设B_λ与K定义如上节，在叙述定理之前，先作如下方便的约定并给出定理要用到的条件与记号：

(i)"实（或复）的情形"总是指$C^4[0,1]$是实值（或复值）函数空间，且算子A：$C^4[0,1]\to C[0,1]$是实值（或复值线性）算子。

(ii) 定理所需条件如下（为定理叙述简洁起见，先列举出来）：

(1) $N(x)\in C^2[0,1]$，并与K一起满足：

$$(N_\lambda y,\ z^{(4)})=((N_\lambda y)'',\ z''),\qquad \forall y,z\in K \tag{*}$$

其中$N_\lambda \triangleq N_\lambda(x)$，且以下$N(x)$简记为$N$。

(2) $|(Ay-Az,\ u^{(4)}+u)|\leqslant M_0\|y-z\|_{H^4}\|u\|_{H^4}$ (R_0)

(3) $$\begin{cases}\mathrm{Re}(Ay-Az,\ y^{(4)}-z^{(4)}+y-z) \\ \qquad \geqslant \varepsilon_0\|y^{(4)}-z^{(4)}\|^2_{L^2}-M\|y-z\|_{H^3}\|y-z\|_{H^4} & (\mathrm{R_1a}) \\ \mathrm{Re}(Ay,\ y^{(4)}+y)\geqslant\varepsilon_0\|y^{(4)}\|^2_{L^2}-M\|y\|_{H^3}\|y\|_{H^4} & (\mathrm{R_1b})\end{cases}$$

(4) $\|Ay-Az\|_{L^2}\leqslant M_1\|y-z\|_{H^4}$ (R_2)

(5) $$\begin{cases}(K,\ \|\cdot\|_{C^4})\text{是}(C^4[0,1],\ \|\cdot\|_{C^4})\text{的闭子空间，且} \\ \|Ay-a_0y^{(4)}\|_C\leqslant M_2\|y\|_{C^3}, \qquad a_0\neq 0 & (\mathrm{R}_3)\end{cases}$$

以上(2)～(5)中诸不等式对$\forall y,z,u\in K$成立，且$\varepsilon_0>0$，M_0，M，M_1，$M_2\geqslant 0$及$a_0\neq 0$均为常数。

(6) 令 $$C_K^{(1)}\triangleq\left\{\lambda\in C\ \middle|\ \min_{x\in[0,1]}\left(\mathrm{Re}N_\lambda-90\|N'_\lambda\|_C-\frac{1}{2}\|N''_\lambda\|_C\right)\right.$$

$$\left.\geqslant\left(\frac{3\varepsilon_0}{4}+\frac{M^2}{\varepsilon_0}\right)\left(11+C+C^2\left(\frac{3\varepsilon_0}{4}+\frac{M^2}{\varepsilon_0}\right)\frac{4}{\varepsilon_0}\right)\right\}$$

其中$C=36^2$是引理1.1中的常数，而ε_0与M是条件(R_1)中的常数。

定理 设算子A，子空间K及函数N满足(*)与$(\mathrm{R_1a})$，则

(Ⅰ)"实的情形"。对$\forall\lambda\in R\cap C_K^{(1)}$：

(i) 当(R_0)，$(\mathrm{R_1b})$成立时，(A_1)与(B_1)中算子B_λ与$\tilde{B}_\lambda$均为同胚，且成立

$$(\overline{K}^{\|\cdot\|_{H^4}})^*=\overline{B_\lambda K}^{\|\cdot\|_{H^{-4}}} \tag{*$_1$}$$

(ii) 当(R_2)成立时，(C_1)与(D_1)中算子B_λ与$\tilde{B}_\lambda$均为同胚；

(Ⅱ)"复的情形"。对$\forall\lambda\in C_K^{(1)}$：

(i) 当(R_0)成立时，(A_1)与(B_1)中二算子均为线性同构，且$(*)_1$也成立；

(ii) 当(R_2)成立时，(C_1)与(D_1)中二算子均为线性同构；

(iii) 当(R_3)成立时，(E_1)中算子B_λ为线性同构。

以上(Ⅰ)中(i)，(ii)二陈述互相独立，对(Ⅱ)中(i)，(ii)，(iii)亦然。

注1 集合$C_K^{(1)}$是复平面上某双曲线的内部，并包含实轴上除了一个有限区间外所有实数。

注2 如摘要所述，定理实际上给出了在实非线性情形B_λ与$C^4[0,1]$的子空间K的二个同胚类，与复线性情形的三个线性同构类。

定理的证明包含于如下5个引理之中（仅给出证明概要）。

引理2.1 设(R_0)成立，则(B_1)中算子$\tilde{B}_\lambda$在"实的情形"对$\forall\lambda\in R$为连续算子，而在"复的情形"对$\forall\lambda\in C$为线性连续算子。

证 对$\forall f(x)\in C[0,1]$，定义$\overline{K}^{\|\cdot\|_{H^4}}$上线性泛函如下："实的情形"($f(x)$为实函数)：

$$\langle f,z\rangle=(f,z^{(4)}+z) \qquad \forall z\in\overline{K}^{\|\cdot\|_{H^4}} \tag{2.1}$$

"复的情形"：$$\langle f,z\rangle=(f,\bar{z}^{(4)}+\bar{z}) \tag{2.2}$$

则由(R_0)与Schwarz不等式易知本引理成立。

引理2.2 设(*)，$(\mathrm{R_1a})$与$(\mathrm{R_1b})$成立，则

(i) 在"实的情形"：对$\forall\lambda\in R\cap C_K^{(1)}$，$\forall y,z\in K$，成立：

$$\left.\begin{array}{l}\text{a) } \langle B_\lambda y-B_\lambda z,\ y-z\rangle\geqslant\frac{\varepsilon_0}{4}\|y-z\|^2_{H^4}\\[2ex] \text{b) } \langle B_\lambda y,\ y\rangle\geqslant\frac{\varepsilon_0}{4}\|y\|^2_{H^4}\end{array}\right\}\tag{2.3a,b}$$

(ii) 在"复的情形"：对$\forall\lambda\in C_K^{(1)}$，$\forall y\in K$，成立：

$$\operatorname{Re}\langle B_\lambda y,y\rangle\geqslant\frac{\varepsilon_0}{4}\|y\|^2_{H^4}\tag{2.4}$$

证 由(*)，(R_1a)与(2.1)可推出(2.3a)；由(*)，(R_1b)与(2.1)可推出(2.3b)；由(*)，(R_1b)(在"复的情形"，(R_1a)⇔(R_1b))与(2.2)可推出(2.4)。此处仅证(2.3b)，其余的证明完全类似。

由(*)与(R_1b)，可得

$$\begin{aligned}\langle B_\lambda y,y\rangle&=(Ay,y^{(4)}+y)+(N_\lambda y''+2N'_\lambda y'+N''_\lambda y,y'')+(N_\lambda y,y)\\&\geqslant\frac{\varepsilon_0}{4}(\|y\|^2_{H^4}+\|y^{(4)}\|^2_{L^2})-\left(\frac{3\varepsilon_0}{4}+\frac{M^2}{\varepsilon_0}\right)\|y^{(3)}\|^2_{L^2}\\&\quad-\left(\|N'_\lambda\|_C+\left(\frac{3\varepsilon_0}{4}+\frac{M^2}{\varepsilon_0}\right)\right)\|y'\|^2_{L^2}+\int_0^1\Big[N_\lambda-\|N'_\lambda\|_C\\&\quad-\frac{1}{2}\|N''_\lambda\|_C-\left(\frac{3\varepsilon_0}{4}+\frac{M^2}{\varepsilon_0}\right)\Big]|y''|^2dx\\&\quad+\int_0^1\Big[N_\lambda-\frac{1}{2}\|N''_\lambda\|_C-\left(\frac{3\varepsilon_0}{4}+\frac{M^2}{\varepsilon_0}\right)\Big]|y|^2dx\end{aligned}\tag{2.5}$$

(其中用到不等式

$$2(N'_\lambda y',\ y'')\geqslant-\|N'_\lambda\|_C\,(\|y''\|^2_{L^2}+\|y'\|^2_{L^2})$$

$$(N''_\lambda y,y'')\geqslant-\frac{1}{2}\|N''_\lambda\|_C(\|y''\|^2_{L^2}+\|y\|^2_{L^2})$$

及 $$M\|y\|_{H^3}\|y\|_{H^4}\leqslant\frac{\varepsilon_0}{2}\|y^{(4)}\|^2_{L^2}+\left(\frac{\varepsilon_0}{2}+\frac{M^2}{\varepsilon_0}\right)\|y\|^2_{H^3}\ )$$

对于 $\|y^{(3)}\|^2_{L^2}$及$\|y'\|^2_{L^2}$利用引理1.1，可得

$$\left.\begin{aligned}\|y^{(3)}\|^2_{L^2}&\leqslant C\Big[\left(C\left(\frac{3\varepsilon_0}{4}+\frac{M^2}{\varepsilon_0}\right)\frac{4}{\varepsilon_0}+1\right)^{-1}\|y^{(4)}\|^2_{L^2}\\&\qquad+\left(C\left(\frac{3\varepsilon_0}{4}+\frac{M^2}{\varepsilon_0}\right)\frac{4}{\varepsilon_0}+1\right)\|y''\|^2_{L^2}\Big]\\\|y'\|^2_{L^2}&\leqslant10\|y''\|^2_{L^2}+90\|y\|^2_{L^2}\end{aligned}\right\}\tag{2.6}$$

于是对 $\forall\lambda\in R\cap C_K^{(1)}$，$\forall y\in K$，由(2.5)与(2.6)可得

$$\begin{aligned}\langle B_\lambda y,\ y\rangle&\geqslant\frac{\varepsilon_0}{4}\|y\|^2_{H^4}+\int_0^1\Big[N_\lambda-11\|N'_\lambda\|_C-\frac{1}{2}\|N''_\lambda\|_C\\&\quad-\left(\frac{3\varepsilon_0}{4}+\frac{M^2}{\varepsilon_0}\right)\left(11+C+C^2\left(\frac{3\varepsilon_0}{4}+\frac{M^2}{\varepsilon_0}\right)\frac{4}{\varepsilon_0}\right)\Big]|y''|^2dx\end{aligned}$$

$$+\int_0^1\left[N_\lambda-90\|N_\lambda'\|_C-\frac{1}{2}\|N_\lambda''\|_C-91\left(\frac{3\varepsilon_0}{4}+\frac{M^2}{\varepsilon_0}\right)\right]|y|^2dx$$

$$\geqslant\frac{\varepsilon_0}{4}\|y\|_{H^4}^2$$

引理2.3 设(*)，(R_0)成立，则

(i)“实的情形”。若 (R_1a,b) 成立，则定理(I)中(i)的结论成立；

(ii)“复的情形”。若 (R_1b) 成立，则定理(II)中(i)的结论成立。

证 仅证(i)。而(ii)可由引理2.1，2.2，Lax-Milgram 定理[6]与相同方法证明之。由引理2.1，2.2并通过极限，可得对 $\forall\lambda\in R\cap C_K^{(1)}$，$\forall y$，$z\in \bar{K}^{\|\cdot\|H^4}$，有

$$\left.\begin{aligned}
&\text{a) } \tilde{B}_\lambda\text{是连续算子}\\
&\text{b) } \langle\tilde{B}_\lambda y-\tilde{B}_\lambda z,\ y-z\rangle\geqslant\frac{\varepsilon_0}{4}\|y-z\|_{H^4}^2\\
&\text{c) } \langle\tilde{B}_\lambda y,\ y\rangle\geqslant\frac{\varepsilon_0}{4}\|y\|_{H^4}^2\\
&\text{d) } \|\tilde{B}_\lambda y-\tilde{B}_\lambda z\|_{H^{-4}}\geqslant\frac{\varepsilon_0}{4}\|y-z\|_{H^4}
\end{aligned}\right\}\qquad(2.7\text{a}\sim\text{d})$$

结合单调算子的满射性定理[7]知$\tilde{B}_\lambda$是同胚（对于$\forall\lambda\in R\cap C_K^{(1)}$）。此外显然有

$$\tilde{B}_\lambda\bar{K}^{\|\cdot\|H^4}\subseteq\overline{B_\lambda K}^{\|\cdot\|H^{-4}},\qquad\forall\lambda\in R\qquad(2.8)$$

又由(2.7d)可证

$$\overline{B_\lambda K}^{\|\cdot\|H^{-4}}\subset\tilde{B}_\lambda\bar{K}^{\|\cdot\|H^4},\qquad\forall\lambda\in R\cap C_K^{(1)}\qquad(2.9)$$

于是由(2.8)，(2.9)及$\tilde{B}_\lambda$对 $\forall\lambda\in R\cap C_K^{(1)}$是同胚，知$(*)_1$的等式成立。

引理2.4 设(*)，(R_1a)及(R_2)成立，则

(i)“实的情形”。定理(I)中(ii)的结论成立；

(ii)“复的情形”。定理(II)中(ii)的结论成立。

证 仅以(i)为例。由引理2.2与(R_2)可知，

$$\left\{\begin{aligned}
&\text{a) } \bar{B}_\lambda\text{是连续算子且}\bar{B}_\lambda\bar{K}^{\|\cdot\|H^4}\subset\overline{B_\lambda K}^{\|\cdot\|L^2},\ \forall\lambda\in R;\\
&\text{b) } \|\bar{B}_\lambda y-\bar{B}_\lambda z\|_{L^2}\geqslant\frac{\varepsilon_0}{8}\|y-z\|_{H^4},\ \forall y,z\in\bar{K}^{\|\cdot\|H^4},\ \forall\lambda\in R\cap C_K^{(1)};\\
&\text{c) } \overline{B_\lambda K}^{\|\cdot\|L^2}\subset\bar{B}_\lambda\bar{K}^{\|\cdot\|H^4},\ \forall\lambda\in R\cap C_K^{(1)}.
\end{aligned}\right.$$

于是(i)的结论成立。

引理2.5 “复的情形”。设(*)，(R_1b)与(R_3)成立，则对$\forall\lambda\in C_K^{(1)}$，定理(II)中(iii)的结论成立。

证 由条件与引理2.2可知

$$\left.\begin{aligned}
&\text{a) } B_\lambda:\ (K,\ \|\cdot\|_{C^4})\to(B_\lambda K,\ \|\cdot\|_C)\text{为线性连续算子，对}\forall\lambda\in C;\\
&\text{b) } (K,\ \|\cdot\|_{C^4})\text{是一 Banach 空间；}\\
&\text{c) } \|B_\lambda y\|_C\geqslant\|B_\lambda y\|_{L^2}\geqslant\frac{\varepsilon_0}{8}\|y\|_{H^4},\ \text{对}\forall\lambda\in C_K^{(1)},\ y\in K.
\end{aligned}\right\}\qquad(2.10\text{a,b,c})$$

于是由 Banach 逆算子定理，仅需证对 $\forall\lambda\in C_K^{(1)}$，$B_\lambda K$是 Banach 空间，特别只须证，

对$\forall\{y_n\}\subset K$，若$B_\lambda y_n\xrightarrow{\|\cdot\|_C}0$ $(n\to\infty)$，则$y_n\xrightarrow{\|\cdot\|_{C^4}}0$ $(n\to\infty)$.
而由条件(R_3)，

$|a_0|\,\|y_n^{(4)}\|_C\leqslant\|B_\lambda y_n\|_C+(M_2+\|N_\lambda\|_C)\|y_n\|_{C^3}$与$a_0\neq 0$，又只须证$\|y_n\|_{C^3}\to 0$ $(n\to\infty)$.
固定$i\in\{0,1,2,3\}$，由(2.10c)与 Schwarz 不等式，有

$$\left.\begin{array}{l}\text{a)}\ |y_n^{(i)}(x)-y_n^{(i)}(0)|\leqslant\int_0^1|y_n^{(i+1)}(x)|dx\leqslant\|y_n\|_{H^4}\to 0\quad(n\to\infty),\\ \quad\text{对}x\in[0,1]\text{一致成立；}\\ \text{b)}\ \|y_n^{(i)}\|_C\leqslant|y_n^{(i)}(0)|+\|y_n\|_{H^4},\ n=1,2,\cdots.\end{array}\right\}\tag{2.11a,b}$$

故只须证$|y_n^{(i)}(0)|\to 0$ $(n\to\infty)$. 用反证法，设存在$\delta>0$，使

$$|y_n^{(i)}(0)|>\delta>0,\qquad(n=1,2,\cdots)$$

则由(2.11a)知存在$N>0$，使当$n\geqslant N$时，

$$\|y_n^{(i)}\|_{L^2}\geqslant\frac{\delta}{2}>0$$

这与$\|y_n\|_{H^4}\to 0$ $(n\to\infty)$不合，证毕.

注 如果引入B_λ:$(K,\ \|\cdot\|_{C^4})\to(B_\lambda K,\ \|\cdot\|_C)$的唯一保范扩张，则易见条件$(\mathrm{R}_3)$中$(K,\ \|\cdot\|_{C^4})$为一 Banach 空间这一假设还可以除去.

三、定 理 的 应 用

设$K_1=K_{(0,1)}$，$K_2=K_{(2,3)}$，及算子B_i: $C^4[0,1]\to C[0,1]$ $(i=0,1,2,3)$定义如下：对$\forall y\in C^4[0,1]$，

$$\begin{cases}B_0y=a_0y^{(4)}+\sum\limits_{i=1}^{3}P_i(x)y^{(4-i)}\\[2ex] B_1y=\sum\limits_{i=0}^{3}[b_i\sin(y^{(4-i)})+c_i(y^{(4-i)})^2(1+(y^{(4-i)})^2)^{-1}]\\[2ex] B_2y=\sum\limits_{i=1}^{3}Q_i(x)y^{(i)}(1+(y^{(i)})^2)^{-1}\\[2ex] B_3y=\sin\left(\sum\limits_{i=1}^{3}R_i(x)y^{(i)}\right)\end{cases}$$

其中a_0，b_i，$c_i(0\leqslant i\leqslant 3)$ 均为实常数且$a_0>|b_0|+|c_0|$，P_i，Q_i，$R_i\in C[0,1]$ $(1\leqslant i\leqslant 3)$ 均为实函数.

例 设$B_\lambda=A+N_\lambda I$，$K=K_1$或K_2，及$N\in C^2[0,1]$为实函数.

(A) "实的情形". 设$A=\sum\limits_{i=0}^{3}B_i$. 取$\varepsilon_0=a_0-|b_0|-|c_0|$，

$$M=a_0+|b_0|+|c_0|+2\sum_{i=1}^{3}(|b_i|+|c_i|)+2\sum_{i=1}^{3}(\|P_i\|_C+2\|Q_i\|_C+\|R_i\|_C)$$

则定理(I)中的结论成立；

(B) "复的情形". 设$A=B_0$, $a_0>0$, 取$\varepsilon_0=a_0, M=a_0+2\sum_{i=1}^{3}\|P_i\|_C$. 则对 $\forall\lambda\in C_K^{(1)}$, 定理(Ⅱ)中的结论成立. 证仅证(A). 显然$K=K_1$与K_2及N满足定理的(*)条件. 又对$\forall y$, $z\in C^4[0,1]$, 易见, 如下的不等式成立

$$(Ay-Az,\ y^{(4)}-z^{(4)}+y-z)\geqslant(a_0-|b_0|-|c_0|)\|y^{(4)}-z^{(4)}\|_{L^2}^2$$

$$-[a_0+|b_0|+|c_0|+2\sum_{i=1}^{3}(|b_i|+|c_i|)$$

$$+2\sum_{i=1}^{3}(\|P_i\|_C+2\|Q_i\|_C+\|R_i\|_C)]\|y-z\|_{H^3}\|y-z\|_{H^4}$$

且由$A0=0$, 知定理中(R_1a)与(R_1b)均成立.
类似易证(R_0)与(R_2)均成立. 证毕.

注 该例表明, 对序言中算子$\hat{A}_\lambda+B$, 当$\lambda\in R\cap C_K^{(1)}$, 存在关于该算子与子空间$K_1$与$K_2$的二个不同的同胚类(实的情形); 而对于$\hat{A}_\lambda$, 当$\lambda\in C_K^{(1)}$时, 有关于$\hat{A}_\lambda$与$K_1$, K_2的三个不同的线性同构类, 它们分别表明在有"非线性扰动"与"无非线性扰动"的前提下, 某类飞行器在给定的范围内其飞行是双向稳性的.

参 考 文 献

[1] A. L. Greensite, *Analysis and Design of Space Vehicle Flight, Control Systems*, Spartan, New York (1970).

[2] W. T. Raid, A comparison theorem for selfadjoint differential equations of second order, *Ann. Math.*, 65 (1957), 197—202.

[3] T. Kusano and B. Singh, Positive solution of functional differential equations with singular nonlinear terms, *Nonlinear Analysis*, 8 (1984), 1081—1090.

[4] E. C. Titchmarch, *Eigenfunction Expensions Associated with Second-Order Differential Equations*, Oxford University Press, London (1955).

[5] R. A. Admas, *Sobolev Space*, Springer-Verlag, New York (1975).

[6] J. Wloka, *Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, London (1987).

[7] V. Barbu, *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Space*, Noordhoff, Leyden (1976).

A Regularity Theorem for a Certain Fourth-Order Differential Operator

Liu Yingfan

(Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, P. R. China)

Abstract

This paper provides a regularity theorem for a certain fourth-order differential operator B_λ with λ, from which we have obtained two homeomorphism classes in "nonlinear case" or three linear isomorphism classes in "linear case" about this operator respectively. It is useful and convenient to explain certain types of stability properties in both directions of some flying vehicle in its moving process.

Key words homeomorphism, linear isomorphism, interpolating inequality