应用数学和力学，第17卷 第6期（1996年6月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

关于强迫耗散非线性系统的稳定性

陈达段[1] 刘晓明[1] 施惟慧[1]

（钱伟长推荐，1995年10月25日收到）

摘　　要

本文应用分层理论，对强迫耗散非线性系统的某些初边值问题的稳定性给出了简要的证明及例证。

关键词　解空间结构　分层　平凡层

强迫耗散非线性系统是大气动力学研究中的一个重要问题。国内外学者曾在不同的假设下，建立了其数学模型，并进行了各种简化求解与稳定性研究[1]。本文就其中一类由以下的二阶拟线性偏微分方程组D描述的对流过程进行讨论

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial P}{\partial x}-\nu\nabla^2u=0\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial P}{\partial y}-\nu\nabla^2v=0\\
&\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial P}{\partial z}-g\varepsilon T-\nu\nabla^2w=0\\
&\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}-\chi\nabla^2T=0\\
&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0
\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{I})$$

式中，(u,v,w)表示(x,y,z)方向的速度，T为温度，P为压力，ε为膨胀系数（假定它是常数）。ν为粘性系数，χ为热传导系数，g为重力加速度。我们将证明方程组（Ⅰ）是不稳定的。为此，先介绍有关的符号和定义。

一、符号和定义

设V,Z,Σ,Y都是实C^∞流形。$\dim V=n\geqslant 2$，$\dim Z=m$，$\dim\Sigma=n-1$。D是一个k_0阶的偏微分方程组。我们介绍以下一些有关符号：

* 国家自然科学基金资助课题的部分结果

1 上海大学，上海 200072

$J^k(V,Z)$——k阶Ehresmann空间。$\beta\in J^k(V,Z)$，其局部坐标为：

$$\beta=(x_1,x_2,\cdots,x_n,u_1,\cdots,u_m,p_1^1,\cdots,p_n^m,\cdots,\ p^i_{j\lambda,h},\cdots,\ p^m_{j\lambda,k})$$

$\alpha^k_{k-1}:J^k(V,Z)\to J^{k-1}(V,Z)$——典则对应；

$e:J^{k+1}(V,Z)\to J^1(V,J^k(V,Z))$——Ehresmann对应。其定义如下：

设$\eta_0\in J^{k+1}(V,\ Z)$，$f:V\to Z$是η_0 的一个代表，即$j^{k+1}f(x_0)=\eta_0$，$(x_0\in V)$，Ehresmann对应。定义为

$$e(\eta_0)=j^{-1}g(x_0)$$

其中，$g(x)=j^kf(x):V\to J^k(V,Z)$是$f$的$k$阶典则截口(section cononical associé ā f)

$V(f)$——对应$f:J^k(\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R}^m)\to\boldsymbol{R}$的零点所构成的$J^k(\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R}^m)$的子集合：

$$V(f)=f^{-1}(0)\subseteq J^k(\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R}^m)$$

并以

$$V(f_1,\cdots,f_h)=V(f_1)\cap V(f_2)\cap\cdots\cap V(f_h)\subseteq J^k(\boldsymbol{R}^n,\ \boldsymbol{R}^m)$$

代表对应 $f_1,\cdots,f_h:J^k(\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R}^m)\to\boldsymbol{R}$的零点构成的$J^k(\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R}^m)$的子集合；

$e_i(f)$——复合对应$(p_2\circ j^1f\circ e)$的第 i 个分量。其中，$f:J^k(\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R}^m)\to\boldsymbol{R}$，$f\in C$

$$J^{k+1}(\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R}^m)\xrightarrow{e}J^1(\boldsymbol{R}^n,J^k(\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R}^m))\xrightarrow{j^1f}J^1(\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R}^m)$$
$$=J^0(\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R}^m)\times\boldsymbol{R}^n\xrightarrow{p_2}\boldsymbol{R}^n$$

$P(\Sigma,Y)$——由流形Σ到流形Y的$\boldsymbol{C}^\infty$嵌入构成的拓扑空间($\boldsymbol{C}^\infty$细拓扑)

$I(\Sigma,D)$——$P(\Sigma,V)\times P(\Sigma,J^{k_0-1}(V,Z))$的子空间（具有诱导拓扑）；

$I_k(V,Z)$——$J^k(V,Z)$的Cartan-Ehresmann理想子代数，它（局部）由$J^k(V,Z)$的Pfaff形式生成：

$$\omega^i=du_i-\sum_j p^i_j dx_j$$

$$\omega^i_{j\lambda}=d\,p^i_{j\lambda}-(p^i_{j\lambda 1}\,dx_1+p^i_{j\lambda 2}dx_2+\cdots+p^i_{j\lambda}\ dx_n)$$

$\gamma^*\omega$—— ω的诱导形式，

其中 $\gamma\in P_1(\Sigma,J^{k_0-1}(V,Z))$，　$\omega\in I_{k_0-1}(V,Z)$

$D^\perp_*=\bigcup\limits_l D^\perp_l$——$D$的准本方程(pre-gradué associé ā D)，$D^\perp_l$ 为D 的 l 阶准本方程；

$D_*=(D^\perp_*)^\#=\bigcup\limits_l D_l$——$D$的本方程(gradué associé ā D)，D_l 为D的 l 阶本方程；

$E_{l,k}(V,Z)$，$W_{l,k}(V,Z)$——流形V到流形Z的W．S.系统；

$E_{l,k}(D)$,$W_{l,k}(D)$——D的 W.S.系统；

$S^0_{l,k}(D)$——D的(l,k)阶平凡层；

$S^i_{l,k}(D)$——D的(l,k)阶 i 层，其纤维的维数$=i$；

$T_{l,k}(D)$——D的(l,k)阶陷阱；

(σ_f,γ_f)——连带于f的对应α^1_{-1}的截口单形。

$$\begin{tikzcd} & J^{k_0-1}(V,Z) \arrow[d, "\alpha^{k_0-1}_{-1}"] \\ \Sigma \arrow[ur, "\gamma"] \arrow[r, "\sigma"'] & V \end{tikzcd}$$

定义1 关于Cauchy问题初始条件的定义

设$(\sigma,\gamma)\in P(\Sigma,V)\times P(\Sigma,J^{k_0-1}(V,Z))$满足以下条件

(1) $\alpha^{k_0-1}_{-1}\circ\gamma=\sigma$；

(2) $\gamma^*\omega=0$，$\forall\omega\in I_{k_0-1}(V,Z)$；

(3) $\mathrm{Im}\gamma\subseteq D_{k_0-1}$。

我们称这样的一对$\boldsymbol{C}^\infty$嵌入(σ,γ)为方程组D的Cauchy 问题定义了一组初始条件。将所

有满足以上条件的(σ,γ)记为$I(\Sigma,D)$，这是一个具有C^∞诱导拓扑的

$$P(\Sigma,V)\times P(\Sigma,J^{k_0-1}(V,Z))$$

的子空间。

设 $(\sigma,\gamma)\in I(\Sigma,D)$。$T$是$\mathrm{Im}\sigma(\Sigma)(\subseteq V)$的一个管状邻域。我们有以下的

定义2 关于Cauchy问题解的定义。

设对应$f:T\to Z$，$f\in C^\infty$。如果在Σ上f满足下列条件，我们就说f是方程组D对应于初始条件(σ,γ)的一个C^∞解：

(1) $\mathrm{Im}\,j^{k_0}f\subseteq D$;

(2) $j^{k_0-1}f\circ\sigma=\gamma$.

$$\begin{tikzcd}
& J^{k_0-1}(V,Z) \\
\Sigma \arrow[ur, "\gamma"] \arrow[r, hook, "\sigma"] & \mathrm{Im}\sigma(\Sigma)\subseteq V \arrow[u, "j^{k_0-1}f"']
\end{tikzcd}$$

定义3 关于Cauchy问题适定性的定义

设$(\sigma_0,\gamma_0)\in I(\Sigma,D)$。如果它满足以下条件，就说方程组$D$对应于$(\sigma_0,\gamma_0)$的Cauchy问题是适定的：

(1) 这个问题具有唯一的C^∞解；

(2) 在空间$I(\Sigma,D)$中，存在(σ_0,γ_0)的一个邻域O_0，使得对任何$(\sigma,\gamma)\in O_0$，对应于(σ,γ)的Cauchy问题，都存在着唯一的C^∞解。

注1 如果方程组D的重数$\geqslant 2$，在上述定义中，取消"唯一性"这一条件。

注2 流形Σ的维数q可以小于$(n-1)$，另外，对应$\gamma:\Sigma\to J^l(V,Z)$，$l$可以不等于$(n-1)$。

现在固定V上的一点P_0，$P_0\in V$，将Σ以q维单形Δ_q取代，于是就可得到局部Cauchy问题的初始条件及其适定性的定义。

根据以上定义可知"不适定"的情形有以下几种可能：

(1) 对于初始条件(σ_0,γ_0)，D不存在$C^k(k\geqslant k_0)$解；

(2) 对于同一个(σ_0,γ_0)，D的C^k解$(k>k_0)$不唯一；

(3) 不存在(σ_0,γ_0)的邻域$O_0\subseteq I(\Sigma,D)$，具有定义3中的性质。

定义4 关于不稳定性的定义

设$x^0\in V$，u^0是D的一个$C^k(k\geqslant k_0)$解。如果对任何C^k超曲面$X\subseteq \boldsymbol{R}^n(x^0\in X)$在点$x^0$的芽$\sigma$，$\sigma:X\to V$，初始条件$(\sigma,\gamma)$构成的Cauchy问题都是不适定的，就说$D$的这个解$u^0$在点$x^0$是不稳定的。(这里的$(\sigma,\gamma)$中的$\gamma=j^{k_0-1}u^0\circ\sigma$)。

如果对V上所有的点x，u^0都是不稳定的，就说u^0是D的一个不稳定解。

如果D的所有C^k解$(k\geqslant k_0)$都是不稳定的，就称D是一个不稳定方程。

定义5 关于D是l-简单的定义

设$D\subseteq J^{k_0}(V,Z)$。如果存在一个正整数，$l\in W_+$，使得D的准本方程与本方程之间成立以下关系式：

$$(D'_{k_0+l})_*=(D'_{k_0+l})'_*,\quad (D'_{k_0+l-1})_*\neq(D'_{k_0+l-1})'_*$$

就称D是l-简单的。如果$l=0$，就称D是简单的。

现在回到方程组(Ⅰ)。我们有以下定理：

定理 方程组(Ⅰ)是不稳定的。

其简要的证明在下一节给出。

二、定理的证明

为便于书写与计算，将自变量(x,y,z,t)改记成(x_1,x_2,x_3,x_4)；而未知数组(u,v,w,P,T)

记为(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5)。那末作为$J^2(\boldsymbol{R}^4,\boldsymbol{R}^5)$的一个子集合的(Ⅰ)，利用$J^2(\boldsymbol{R}^4,\boldsymbol{R}^5)$的局部坐标，就可写成下面的形式并记为$D$：

$$(D)\begin{cases} f_1:\nu(p^1_{11}+p^1_{22}+p^1_{33})-(p^1_4+u_1p^1_1+u_2p^1_2+u_3p^1_3+p^4_1)=0\\ f_2:\nu(p^2_{11}+p^2_{22}+p^2_{33})-(p^2_4+u_1p^2_1+u_2p^2_2+u_3p^2_3+p^4_2)=0\\ f_3:\nu(p^3_{11}+p^3_{22}+p^3_{33})-(p^3_4+u_1p^3_1+u_2p^3_2+u_3p^3_3+p^4_3-g\varepsilon u_5)=0\\ f_4:\ \chi(p^5_{11}+p^5_{22}+p^5_{33})-(p^5_4+u_1p^5_1+u_2p^5_2+u_3p^5_3)=0\\ f_5:p^1_1+p^2_2+p^3_3=0\end{cases}\qquad (Ⅱ)$$

若将上式左侧分别记为f_1,f_2,f_3,f_4,f_5，那末D又可表示成

$$\left.\begin{aligned}&D=V(f_1,f_2,f_3,f_4,f_5)\subseteq J^2(\boldsymbol{R}^4,\boldsymbol{R}^5)\\&f_i:J^2(\boldsymbol{R}^4,\boldsymbol{R}^5)\to\boldsymbol{R}\quad(i=1,2,3,4,5)\end{aligned}\right\}\qquad (Ⅱ)'$$

我们通过证明D的平凡层$S^0(D)$是一个空集$S^0(D)=\phi$，来证明定理的结论．简要证明过程如下：

(1) 决定D的本方程D_*

由(Ⅱ)立即可知D的1阶、0阶和-1阶准本方程为：

$$\left.\begin{aligned}&D'_1=\{p^1_1+p^2_2+p^3_3=0\}\subseteq J^1(\boldsymbol{R}^4,\boldsymbol{R}^5)\\&D'_0=J^0(\boldsymbol{R}^4,\boldsymbol{R}^5),\ \ D'_{-1}=\boldsymbol{R}^4\end{aligned}\right\}\qquad (2.1)$$

然后，根据Ehresmann对应及D'_2的定义，可得：

$$D'_2=(\alpha^2_1)^{-1}(D'_1)\cap V(f_1,f_2,\cdots,f_5,e_1(f_5),e_2(f_5),e_3(f_5),e_4(f_5))\qquad (2.2)$$

对于$k\geqslant3$，如果

$$D'_{k-1}=(\alpha^{k-1}_{k-2})^{-1}(D'_{k-2})\cap V(g_1,g_2,\cdots,g_{l_{k-2}})$$

那末

$$D'_k=(\alpha^k_{k-1})^{-1}(D'_{k-1})\cap V(g_1,\cdots,g_{l_{k-2}},e_i(g_j))\qquad (2.3)$$
$$(i=1,2,3,4;\ \ j=1,2,\cdots,l_{k-2})$$

如，当$k=3$时，有

$$D'_3=V(f_1,\cdots,f_5,e_i(f_j),e_{il}(f_5))\qquad (i,l=1\sim4;\ \ j=1\sim5)$$

但为了求得D'_*的饱和集$(D'_*)^\#$，发现有

$$\alpha^3_2(D'_3)=D'_2\cap V(f_6)\neq D'_2\qquad (2.4)$$

这里的f_6代表下式的左端：

$$f_6:(p^4_{11}+p^4_{22}+p^4_{33})+[(p^1_1)^2+(p^2_2)^2+(p^3_3)^2+2p^1_2\cdot p^2_1+2p^1_3\cdot p^3_1$$
$$+2p^2_3\cdot p^3_2-g\varepsilon p^5_3]=0\qquad (2.4)'$$

同时还有

$$\left.\begin{aligned}&\alpha^3_1(D'_3)=D'_1=\{p^1_1+p^2_2+p^3_3=0\}\subseteq J^1(\boldsymbol{R}^4,\boldsymbol{R}^5)\\&\alpha^3_0(D'_3)=D'_0=J^0(\boldsymbol{R}^4,\boldsymbol{R}^5),\ \ \alpha^3_{-1}(D'_3)=\boldsymbol{R}^4\end{aligned}\right\}\qquad (2.5)$$

如果将D'_3记为$\tilde{D}$，即

$$\tilde{D}=D'_3\subseteq J^3(\boldsymbol{R}^4,\boldsymbol{R}^5)$$

那末就可证明

$$\alpha^k_{k-1}(\tilde{D}'_k)=\tilde{D}'_{k-1}\qquad (2.6)$$

（这里略去了计算过程）

也就证明了由$\tilde{D}$出发所得的准本方程$(\tilde{D})^{1}_{*}$是一个饱和集，即

$$(\tilde{D})^{1}_{*}=((\tilde{D})^{1}_{*})^{\#}=\tilde{D}_{*} \tag{2.7}$$

由以上推导过程，立即可得到一个重要推论：

推论1 方程组(D)(Ⅱ)是1-简单的。

(2) 决定D的分层

直接从定义出发可以证明流形

$$W_{3,k-1}(\boldsymbol{R}^4,\boldsymbol{R}^5)\subseteq G_3^*(TJ^{k-1}(\boldsymbol{R}^4,\boldsymbol{R}^5))$$

分成三个部分[2]：

$$\begin{aligned}W_{3,k-1}(\boldsymbol{R}^4,\boldsymbol{R}^5)&=W_{3,k-1}(D)\cup T_{3,k-1}(D)\\&=A_{3,k-1}(D)\cup S^5_{3,k-1}(D)\cup T_{3,k-1}(D)\end{aligned} \tag{2.8}$$

为了表示各个部分，我们使用所谓的"f的截口单形"(σ_f,γ_f)来达到这一目的，这里的$f:\boldsymbol{R}^4\to\boldsymbol{R}$，$f\in\boldsymbol{C}^\infty$，

$$\sigma_f:\underset{(\xi)}{\Delta_3}\to\underset{(x)}{\boldsymbol{R}^4},\quad \sigma_f:x_1=\xi_1,\quad x_2=\xi_2,\quad x_3=\xi_3,\quad x_4=f(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$$

$$\gamma_f:\Delta_3\to J^1(\boldsymbol{R}^4,\boldsymbol{R}^5)$$

$$\gamma_f(\xi)=(\sigma_f(\xi),\ u_i(\xi),\ p^i_j(\xi))\qquad (i=1,2,3,4,5;\ j=1,2,3,4)$$

因而用$W_{3,k-1}(\boldsymbol{R}^4,\boldsymbol{R}^5)$的第四覆盖$U_4$来表示各个部分，即相应的末方程时，就有：

$$A_{3,k-1}(D):\ \begin{cases}\psi^4_{\lambda,k-2}=\lambda_1\psi^{(4)}_{1,k-2}+\lambda_2\psi^{(4)}_{2,k-2}+\lambda_3\psi^{(4)}_{3,k-2}-\nu\lambda^2\psi^{(4)}_{5,k-2}=0\\ \lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2\neq 0\end{cases} \tag{2.9}$$

$$S^5_{3,k-1}(D):\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=0,\quad \sum_{i=1}^{6}(\psi^{(4)}_{i,k-2})^2=0 \tag{2.10}$$

$$T_{3,k-1}(D):\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2\neq 0,\ \psi^{(4)}_{\lambda,k-2}\neq 0 \tag{2.11}$$

或
$$\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=0,\quad \sum_{i=1}^{6}(\psi^{(4)}_{i,k-2})^2\neq 0$$

式中 $\lambda_i=\partial f/\partial\xi_i\quad (i=1,2,3),\quad \lambda^2=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2$

如果换一个(σ_g,γ_g)，$g:\boldsymbol{R}^4\to\boldsymbol{R}$，即$x_3=g(x_1,x_2,x_4)$

$$\sigma_g:\underset{(\xi)}{\Delta_3}\to\underset{(x)}{\boldsymbol{R}^4},\quad \sigma_g(\xi):x_1=\xi_1,x_2=\xi_2.x_3=g(x_1,x_2,x_4),\quad x_4=\xi_4$$

$$\gamma_g(\xi)=(\sigma_g(\xi),\ u_i(\xi),\ p^i_j(\xi))\qquad (i=1,2,3,4,5;\ j=1,2,3,4)$$

那末用$W_{3,k-1}(\boldsymbol{R}^4,\boldsymbol{R}^5)$的第三覆盖$U_3$来表示各个部分时，就有：

$$A_{3,k-1}(D):\phi^{(3)}_{\delta,k-2}=\nu\theta\phi^{(3)}_{5,k-2}+\delta_1\phi^{(3)}_{1,k-2}+\delta_2\phi^{(3)}_{2,k-2}-\nu\theta\phi^{(3)}_{3,k-2}=0 \tag{2.12}$$

$$T_{3,k-1}(D):\phi^{(3)}_{\delta,k-2}\neq 0 \tag{2.13}$$

式中 $\delta_j=\partial g/\partial\xi_j\quad (j=1,2,4),\quad \theta=1+\delta_1^2+\delta_2^2$

由于在一般情形下，$\psi^{(4)}_{i,k-2}$与$\phi^{(3)}_{i,k-2}$的表达式很繁杂，因而在这里我们仅写出$k=2$时的情形。

$$
\left.\begin{aligned}
\psi_{i,0}^{(4)}&=(p_4^i+u_1p_1^i+u_2p_2^i+u_3p_3^i+p_i^4)+(\lambda_1p_4^i(1)+\lambda_2p_4^i(2)\\
&\quad+\lambda_3p_4^i(3)-p_1^i(1)-p_2^i(2)-p_3^i(3)) \qquad (i=1,2)\\
\psi_{3,0}^{(4)}&=(p_4^3+u_1p_1^3+u_2p_2^3+u_3p_3^3+p_3^4-g\varepsilon u_5)+(\lambda_1p_4^3(1)\\
&\quad+\lambda_2p_4^3(2)+\lambda_3p_4^3(3)-p_1^3(1)-p_2^3(2)-p_3^3(3))\\
\psi_{4,0}^{(4)}&=(p_4^5+u_1p_1^5+u_2p_2^5+u_3p_3^5)+(\lambda_1p_4^5(1)+\lambda_2p_4^5(2)\\
&\quad+\lambda_3p_4^5(3)-p_1^5(1)-p_2^5(2)-p_3^5(3))\\
\psi_{5,0}^{(4)}&=-(p_4^1(1)+p_4^2(2)+p_4^3(3))\\
\psi_{6,0}^{(4)}&=-[(p_1^1)^2+(p_2^2)^2+(p_3^3)^2+2p_2^1\cdot p_1^2+2p_3^1\cdot p_1^3+2p_3^2\cdot p_2^3\\
&\quad-g\varepsilon p_3^5]-[\lambda_1p_4^4(1)+\lambda_2p_4^4(2)+\lambda_3p_4^4(3)-p_1^4(1)-p_2^4(2)-p_3^4(3)]
\end{aligned}\right\} \quad (2.14)
$$

式中，u_i, p_j^i均为(ξ_1,ξ_2,ξ_3)的函数，$p_j^i(l)=\partial p_j^i/\partial\xi_l(l=1,2,3)$．而$\phi_{i,k-2}^{(3)}$则为$(k=2)$：

$$
\left.\begin{aligned}
\phi_{i,0}^{(3)}&=(p_4^i+u_1p_1^i+u_2p_2^i+u_3p_3^i+p_i^4)+(\delta_1p_3^i(1)+\delta_2p_3^i(2)\\
&\quad-p_1^i(1)-p_2^i(2)) \qquad (i=1,2)\\
\phi_{3,0}^{(3)}&=(p_4^3+u_1p_1^3+u_2p_2^3+u_3p_3^3+p_3^4-g\varepsilon u_5)+(\delta_1p_3^3(1)+\delta_2p_3^3(2)\\
&\quad-p_1^3(1)-p_2^3(2))\\
\phi_{4,0}^{(3)}&=-(p_4^5+u_1p_1^5+u_2p_2^5+u_3p_3^5)+(\delta_1p_3^5(1)+\delta_2p_3^5(2)-p_1^5(1)-p_2^5(2))\\
\phi_{5,0}^{(3)}&=-(p_3^1(1)+p_3^2(2))\\
\phi_{6,0}^{(3)}&=-[(p_1^1)^2+(p_2^2)^2+(p_3^3)^2+2p_2^1\cdot p_1^2+2p_3^1\cdot p_1^3+2p_3^2\cdot p_2^3-g\varepsilon p_3^5]\\
&\quad+[\delta_1p_3^4(1)+\delta_2p_3^4(2)-p_1^4(1)-p_2^4(2)]
\end{aligned}\right\} \quad (2.15)
$$

式中，u_i, p_j^i是(ξ_1,ξ_2,ξ_4)的函数，$p_j^i(k)=\partial p_j^i/\partial\xi_k(k=1,2,4)$．

因而根据平凡层$S_{3,l-1}^0(D)$的定义和以上的计算结果，立即可得以下重要推论：

推论2 方程组(D)(Ⅱ)的平凡层$S^0(D)$是一个空集：

$$S_{3,k-1}^0(D)=\phi \qquad (k\geqslant 1)$$

这也最终证明了我们的定理：方程组(Ⅰ)是不稳定的．

三、两类初值问题

考虑方程组(D)(Ⅰ)带有如下两类初始值的初值问题

$$
\left.\begin{aligned}
&(D)(\mathrm{I})\\
&u|\Sigma_4=u^{(0)},\ v|\Sigma_4=v^{(0)},\ w|\Sigma_4=w^{(0)},\ P|\Sigma_4=P^{(0)},\ T|\Sigma_4=T^{(0)}
\end{aligned}\right\} \qquad (*)_4
$$

和

$$
\left.\begin{aligned}
&(D)(\mathrm{I})\\
&u|\Sigma_3=u_{(0)},v|\Sigma_3=v_{(0)},w|\Sigma_3=w_{(0)},P|\Sigma_3=P_{(0)},T|\Sigma_3=T_{(0)}
\end{aligned}\right\} \qquad (*)_3
$$

这里的(Σ_4)与(Σ_3)代表$\boldsymbol{R}^4$中的如下的超曲面：

$$(\Sigma_4):\ \ x_4=f(x_1,x_2,x_3), \qquad (f\in\boldsymbol{C}^\infty)$$

$$(\Sigma_3):\ \ x_3=g(x_1,x_2,x_4), \qquad (g\in\boldsymbol{C}^\infty)$$

那么根据我们所求得的$W_{3,k-1}(\boldsymbol{R}^4,\boldsymbol{R}^5)$的各个层的表达式（即方程组$(D)$(Ⅱ)的末方程），立即可得以下推论：

推论3 为使问题$(*)_4$存在C^2解的一个必要条件是(2.9)或(2.10)成立（$k=2$时的表达式）．而为使问题$(*)_3$存在C^2解的必要条件是(2.12)式成立($k=2$时的表达式)．

四、一 个 例 子

考虑如下的初值问题：

$$
(*)\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial P}{\partial x}-\nu\nabla^2 u=0\\[2mm]
\dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+w\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial P}{\partial y}-\nu\nabla^2 v=0\\[2mm]
\dfrac{\partial w}{\partial t}+u\dfrac{\partial w}{\partial x}+v\dfrac{\partial w}{\partial y}+u\dfrac{\partial w}{\partial z}+\dfrac{\partial P}{\partial z}-g\varepsilon T-\nu\nabla^2 w=0\\[2mm]
\dfrac{\partial T}{\partial t}+u\dfrac{\partial T}{\partial x}+v\dfrac{\partial T}{\partial y}+w\dfrac{\partial T}{\partial z}-\chi\nabla^2 T=0\\[2mm]
\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial z}\\[2mm]
u|_{t=0}=v|_{t=0}=w|_{t=0}=0,\quad P|_{t=0}=P_0,\quad T|_{t=0}=T_0
\end{cases}
$$

$(P_0,T_0)\in\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$，常数．

那么，可以立即验证以下两组实函数都是这个初值问题的非平凡解，并且它们的差不恒等于0．

$$
U^{(1)}:\ \begin{cases}
u^{(1)}=-t^2x_2/2,\quad v^{(1)}=-t^2x_1/2,\quad w^{(1)}=(g\varepsilon T_0)t\\
P^{(1)}=P_0+tx_1x_2-t^4(x_1^2+x_2^2)/8,\quad T^{(1)}=T_0
\end{cases}
$$

$$
U^{(2)}:\ \begin{cases}
u^{(2)}=-t^2x_2/2,\quad v^{(2)}=-t^2x_1/2,\quad w^{(2)}=(g\varepsilon T_0)t-t^4/24\\
P^{(2)}=P_0+tx_1x_2+t^3x_3/6-t^4(x_1^2+x_2^2)/8,\quad T^{(2)}=T_0
\end{cases}
$$

$$
U^{(1)}-U^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\0\\t^4/24\\-t^3x_3/6\\0\end{pmatrix}\neq 0
$$

这是从(2.10)出发，并巧妙地选择某些微分初值计算出来的．我们还可用相似的方法求得任意多个满足同一初始值的解来．

同样，如果将上述的初值问题中的超平面$\{t=0\}\subseteq\boldsymbol{R}^4$改成另一超平面$\{x_3=0\}\subseteq\boldsymbol{R}^4$，我们也可以从(2.14)出发，适当地给出某些微分初值，也一样可以算出这同一问题的不同的非平凡解来．

五、结 束 语

(1) 如上述例中的初值问题，是力学系统中经常遇到的，这里只能称其为“初值”问题而不是Cauchy问题．如果将超曲面取为只依赖坐标(x,y,z)时，就是力学中常见的“边值”问

题. 从以上的讨论可看到，在很多情形下，这种初（边）值问题"不适定"的可能性很大，因而要很小心地选择初始值或边界值.

(2) 方程组(Ⅰ)具有一个很特别的形式，它的一部分（前1,2,3和第5方程）与Navier-Stokes方程很相似.而实际上我们所得到的必要条件(2.9),(2.10)和(2.12)也都与Navier-Stokes 方程存在 C^2解的必要条件相似[3]. 我们称这一类方程组为"Navier-Stokes 类型方程组". 在另外的文章中，我们将证明在附加上某些条件后，这一类方程组永远是不稳定的.

(3) 如果一个力学系统是由一个k_0阶的偏微分方程组来描述，那末所论方程组（初、边值问题）的适定性的讨论，就没有充足的理由在C^k而 $k<k_0$函数类中进行. 正确地说，适定性的讨论及其求解，在可微函数类中最起码要在C^k, $k\geqslant k_0$ 中进行，而不管是否再附加上另外的条件（比如有界或无穷远处的限制，等等）.

(4) 对方程组(Ⅰ)求得存在C^2解的必要条件，对无论是局部解或整体解都是有效的.

参 考 文 献

[1] 丑纪范，《大气动力学的新进展》，兰州大学出版社 (1990).

[2] Shie Weihui, Solution analytiques de quelques équations aux dérivées partielles en mécanique des fluid, *Travaux en Cours*, 42, Hermann, Paris (1992).

[3] 施惟慧, Navier-Stokes方程稳定性研究, (Ⅰ)、(Ⅱ)、(Ⅲ), 应用数学和力学, 15(9,10,12) (1994), 821—822, 879—883, 1067—1073.

On the Stability of Forced Dissipative Nonlinear System

Chen Daduan Liu Xiaoming Shi Weihüi

(*Shanghai University*, *Shanghai* 200072, *P.R. China*)

Abstract

This paper, applying the stratification theory, proves the instability of certain initial (boundary) value problem of forced dissipative nonlinear system in atmospheric dynamics. An example is given.

Key words construction of solution space, stratification, trivial layer