应用数学和力学，第17卷 第6期（1996年6月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

# 具有自由边界的二维渗流问题

余颖禾[1]　　孙　鹰[1]　　郭小明[1]

（钱伟长推荐，1994年5月30日收到，1995年12月4日收到修改稿）

**摘　要**

渗流的自由边界问题是工程上很受关注的问题。现有的数值分析方法需事先估计边界形态，逐次逼近。本文采用"变分不等式"的模式，结合有限元方法研究有自由边界的渗流问题，在整个结构区域内作有限元剖分，避免了传统的有限元分析中估计自由边界、反复修正计算区域的迭代过程。本文方法为简单而快速地分析渗流自由边界问题提供了一条有效的途径。

**关键词**　渗流　变分不等式　有限元法

## 一、二维稳态水坝渗流的变分不等式模式

设图1中$\Omega$是水坝的断面，数学上是$R^2$上的一个具有Lipschitz边界的有界连通区域，其边界为$S$；$S_1$表示水坝的底部，它是$S$的一个闭子集，此处假设为分段连续的曲线；$S_3$表示坝与库中水体相接触的部分，是$S$的一个开子集（不失一般性，此处仅考虑两个水库的情况，分别用$S_{3,1}$，$S_{3,2}$表示，多个水库类似，$S_3=S_{3,1}\cup S_{3,2}$）；$S_2$是水坝与空气接触的部分，$S_2=S\backslash(S_1\cup S_3)$。

$A$表示$\Omega$的沾湿部分，其边界$\partial A$分成4个部分：$\Gamma_1=\partial A\cap S_1$，$\Gamma_2=\partial A\cap\Omega$，$\Gamma_3=S_3$，$\Gamma_4=\partial A\cap S_2$。

$p(x, y)$表示水的压力水头，$k(x, y)$是水坝的渗透系数，$k\in L^\infty(\Omega)$，$k\geqslant 0$，$h_i(i=1, 2)$表示两个水库的水位。

定义下面的函数：

$$\phi(x, y)=\begin{cases}0, & \text{在}S_2\text{上}\\ h_i-y, & \text{在}S_{3,i}\text{上}(i=1,\ 2)\end{cases}$$

由Darcy定律可知，稳态流动的连续方程及其边界条件为：

$$\nabla\cdot[k\nabla(p+y)]=0,\qquad \text{在}A\text{内} \tag{1.1}$$

$$p=\phi,\qquad \text{在}\Gamma_3\cup\Gamma_4\text{上} \tag{1.2}$$

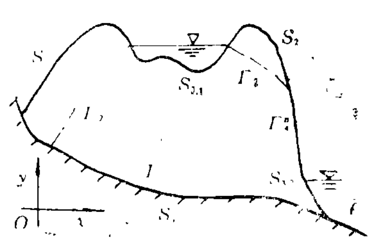



**图1　水坝边界划分**

1 东南大学数学力学系，南京 210096

$$p=0,\ k\frac{\partial}{\partial n}(p+y)=0, \qquad 在\Gamma_2上 \tag{1.3}$$

$$k\frac{\partial}{\partial n}(p+y)=0, \qquad 在\Gamma_1上 \tag{1.4}$$

其中 $n$ 是$\partial A$的单位外法向，因水只能从$A$流出$\Gamma_4$，故又有附加边界条件：

$$k\frac{\partial}{\partial n}(p+y)\leqslant 0, \qquad 在\Gamma_4上 \tag{1.5}$$

因为$\Gamma_2$的位形是未知的，所以问题(1.1)～(1.5)是一个自由边界问题.

将$p(x, y)$在$\Omega\backslash A$上延拓为0，仍记为$p$. 则有：

$$A=[p>0],\ \Gamma_1=\{(x, y)\in S_1 \mid p(x, y)>0\} \tag{1.6}$$

问题(1.1)～(1.5)可以用以下两种严格的提法来描述：

**问题B** 寻找$p(x, y)\in H^1(\Omega)$，满足

$$\int_\Omega k(\nabla p\cdot\nabla\xi+H(p)\xi_y)d\Omega\leqslant 0, \qquad \forall\xi\in V \tag{1.7}$$

$$\left.\begin{array}{ll} p\geqslant 0, & 在\Omega内 \\ p=\phi, & 在S_2\cup S_3上 \end{array}\right\} \tag{1.8}$$

其中

$H$为Heaviside函数，$V$的定义是：

$V=\{\xi\in H^1(\Omega) \mid \xi=0在S_2上，\xi\geqslant 0在S上\}$

问题B的弱型具有如下形式：

**问题D** 找$(p, g)\in H^1(\Omega)\times L^\infty(\Omega)$，满足：

$$\int_\Omega k(\nabla p\cdot\nabla\xi+g\xi_y)d\Omega\leqslant 0, \qquad \forall\xi\in V \tag{1.9}$$

$$\left.\begin{array}{ll} p\geqslant 0, & 在\Omega内 \\ p=\phi, & 在S_2\cup S_3上 \end{array}\right\} \tag{1.10}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 0\leqslant g\leqslant 1, & 在\Omega内 \\ g=1, & 在[p>0]上 \end{array}\right\} \tag{1.11}$$

这里$[p>0]$表示$\{(x, y)\in\Omega \mid p(x, y)>0\}$.

这就是二维稳态水坝渗流问题的变分不等式模式.

下面引入一个"$S_3$-连通解"的概念：设$(p, g)$是问题D的一个解，$\Pi_x$是$R^2$到 $x$ 轴的投影算子，若$[p>0]$在每一连通部分$C$上成立，$\overline{\Pi_x(C)}\cap\overline{\Pi}_x(S_3)\neq\phi$，则$(p, g)$就称为问题D的一个"$S_3$-连通解".

令$\Phi(x)$是定义在$\Pi_x(\bar{\Omega})$上的一个函数：

$$\Phi(x)=\begin{cases}\sup\{y \mid (x, y)\in[p>0]\} & 若集合非空 \\ \sup\{y \mid (x, y)\in S_1\} & 其它\end{cases}$$

显然，$[p>0]=\{(x, y)\in\Omega \mid y<\Phi(x)\}\equiv[y<\Phi(x)]$.

对自由边界的形态问题，文[3]中给出了以下的研究结果：

**假设**

$$\left.\begin{array}{l} S_1\cap(-\infty, x_1)\times(-\infty, h_1)是个空的或非减的图象 \\ S_2\cap(x_2, +\infty)\times(-\infty, h_1)是个空的或不增的图象 \end{array}\right\} \tag{1.12}$$

若$(p,\ g)$是问题D的$S_3$-连通解，则有下面的性质：

(1) 在$(-\infty,\ x_1)\cap\Pi_x([p>0])$上$\Phi$是一个非减函数；

(2) 如果$[p>0]$连通，且若对所有的$x\in(x_2,\ x_3)$均有$\Phi(x)\geqslant h_2$，那么$\Phi$在$(x_2,\ x_3)$上不增；

(3) 若存在$x\in(x_2,\ x_3)$，$\Phi(x)<h_2$，则存在$x_m\in(x_2,\ x_3)$使得$\Phi(x_m)<h_2$，且$\Phi$在$(x_2,\ x_m)$上是不增的，在$(x_m,\ x_3)$是非减的。

数学上可以证明：问题B与问题D是等价的[2]；B(或D)的解是存在的；$S_3$-连通解是唯一的；自由边界是连续的[3],[2]；其有限元离散解$(p_n,\ g_n)$能收敛到问题D的解$(p,\ g)$[4]。

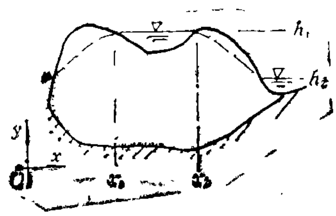


**图2 水面位置**

## 二、有限元离散格式

在做数值解时，一般是处理泛函的弱型，即问题D的形式。这里引入下面的记号：

$M=\{v\in H^1(\Omega)\,|\,v\geqslant 0$在$\Omega$内；$v=\Phi$在$S_2\cup S_3$上$\}$

$K=\{u\in L^\infty(\Omega)\,|\,0\leqslant u\leqslant 1$在$\Omega$内；$u=M$在$[p>0]$上$\}$

在问题D中，若令$\xi=p-v(v\in M)$，并把$g$视为参变量，则可写成下面的形式：

**问题D′**

求$p\in M$，使得

$$\int_\Omega[k\nabla p\cdot\nabla(v-p)+kg\nabla(v-p)e]d\Omega\geqslant 0,\qquad \forall v\in M$$

其中$e=(0,\ 1)$，$g\in K$。为简化书写，以下均考虑均匀介质中的渗流。

按变分不等式理论，与D′等价的泛函极值问题为：

**问题P**

求$p\in M$，满足$J(p)=\inf\limits_{v\in M}\{J(v)\}$，其中

$$J(v)=\frac{1}{2}\int_\Omega\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]dxdy+\int_\Omega g\frac{\partial v}{\partial y}dxdy \tag{2.1}$$

对于本问题中所构造的函数$p(x,\ y)$在用有限元方法求解时，可对整个结构断面$\Omega$作单元剖分，其计算格式与常见的二维标量场的计算格式相似，只是这里的右端项的形成方式不同。

引入形函数$N$，设$P$是$p(x,\ y)$的节点值向量值，则$p(x,\ y)=NP$，由泛函$J(v)$的驻值条件可导出有限元求解的基本方程

$$KP=gf \tag{2.2}$$

其中

$$K=\sum_e K^e,\ \ f=\sum_e f^e,\ \ g=\sum_e g^e$$

$$K^e=\int_{\Omega^e}(N^T_{,x}N_{,x}+N^T_{,y}N_{,y})dxdy$$

$$f^e=\int_{\Omega^e}N^T_{,x}dxdy$$

$$g^e = gI \qquad (I\text{是}q\times q\text{的单位阵，}q\text{是单元节点数})$$

这里的参数$g$有如下的性质：

$$0\leqslant g\leqslant 1, \qquad \text{在}\Omega\text{内}$$
$$g=1, \qquad \text{在}[p>0]\text{上}$$

为便于描述待求的自由边界的形态，构造另一个函数$u(x, y)$，

$$u_i=\begin{cases} p_i/g, & 0<g<1(i=1, 2, \cdots, q) \\ 0, & g=0 \end{cases}$$

其节点值向量记为$U=[u_1, u_2, \cdots, u_q]$，单元内任一点的$u$值仍可表示为$u(x, y)=NU$，自由边界$\partial[p>0]\cap\Omega$也可写为$\partial[u>0]\cap\Omega$，即$[u>0]=[p>0]=[y<\Phi(x)]$. 这样，描述自由边界形态的函数$\Phi(x)$就写成：

$$\Phi(x)=\sup\{y\in\Omega \mid u>0\} \tag{2.3}$$

有限元的基本方程(2.2)也可随之改写成求解$U$的方程

$$KU=f \tag{2.4}$$

解方程(2.4)，在算出各节点的$u_i$值后，可根据(2.3)式，对不同的$x_i$，找出相应的$y_i=\Phi(x_i)=\sup\{y \mid u(x_i, y)>0\}$，逐个连接各个$(x_i, y_i)$点，就得到自由边界的曲线。其中，渗出点本身是奇异点，它的位置本文采用外推法来确定。

又因在$[p>0]$的区域，$g=1$，所以在沾湿部分$A$的范围内$u=p$，即上面算出的流场内各点的$u$值就是压力水头值。

## 三、算　例

本文对图3所示的坝渗流实例作有限元计算，给出了该坝体截面梯形区域的渗流自由表面计算结果。坝体渗透系数$k$是常数，上游水位10m，坡度为1:1，下游水位3m，坡度为1:2，底宽为20m。整个梯形区域共划分50个单元，其自由界面的计算结果列于表1中。图3中的1-线为本文一次计算直接得到的浸润线，2-线是文[1]作者采用差分法作超松驰迭代30次所得的结果。

由以上数值计算结果可以看出，本文所建议的自由边界问题的有限元分析方法是简单而又有效的。

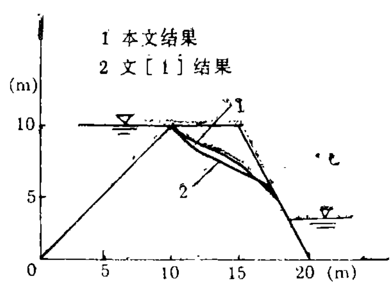


**图3　梯形坝自由表面**

**表1　自由边界面的计算值**

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | 10.00 | 11.23 | 12.78 | 14.38 | 15.81 | 17.19 | 17.50 | 17.63 | 18.06 | 18.50 |
| $y$ | 文[1] | 10.00 | 9.13 | 8.25 | 7.34 | 6.50 | 5.63 | — | 4.75 | 3.83 | 3.00 |
| | 本文 | 10.00 | 9.25 | 8.67 | 7.75 | 6.65 | — | 5.00 | 4.75 | 3.88 | 3.00 |

## 四、结　论

以上研究表明，从数学上建立关于自由边界的渗流问题的变分不等式模式是合理的，它

明显地优于现有的其它变分模型，为工程中各种渗流问题的分析提供了一种新的数学模型，同时也为上述问题的数值分析，特别是自由边界的直接确定给出了可靠的理论依据。

在作二维渗流问题有限元分析时，采用对结构的整个有关截面作单元剖分的办法，简便易行。它避免了传统作法中事先估计计算区域、不断迭代修正的过程，可大大加速计算过程。

## 参 考 文 献


[1] 战同胜、罗远铨，坝体渗流自由变值问题的一个解法，数学研究与评论，(4) (1991), 595—599.

[2] 黄少云，关于非均质水坝问题，数学学报，31(1) (1988), 137—144.

[3] J. Carrillo and M. Chipot, On the dam problem, *J. Differential Equations*, 45 (1982), 234—271.

[4] H. W. Alt, Numerical solution of steady-state porous flow free boundary problems, *Numer. Math.*, 361 (1981), 73—98.


# Free Boundary Problem of the 2D Seepage Flow


She Yinghe  Sun Ying  Guo Xiaoming

(*Department of Mathematics and Mechanics, Southeast University, Nanjing* 210096, *P. R. China*)



**Abstract**

The free boundary of the seepage flow is a problem of close consideration in engineering. So far, an estimation of the wet set region usually needs a priori before the numerical analysis, and the configuration of the free boundary is then obtained by successive approximation. The authors of this paper benefit from a new mathematical expression——The Variational Inequality——to formulate the free boundary problem, which is then solved by the finite element method. Instead of the conventional way of discretization, here the finite element mesh is generated in the entire domain of the studied media and the free boundary of the seepage region can be defined directly without any process of iteration. The investigation gives a new effective scheme for the seepage flow analysis.



**Key words** seepage flow, variational inequality, finite element method