应用数学和力学，第17卷 第6期（1996年6月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

三个不动中心问题的一个三维解

覃一平[1]　聂昭明[1]

（汪家訸推荐，1994年11月15日收到，1995年3月26日收到修改稿）

摘　要

本文对三个不动中心问题的平面解作进一步发展，通过对三个不动中心在四维空间中的定义得到三个不动中心问题的三维解。

关键词　天体力学　不动中心　三维解

一、引　言

不动中心问题是天体力学的古老问题。1961年以来，Djomin和Aksjonor 等人对这一问题作了进一步的发展和应用[1,2]。1977年，Arazov和Habibov 给出一个三个不动中心问题的平面解[3]。本文将Arazov和Habibov的工作作进一步发展，将三个不动中心定义于四维空间中，得到一个三个不动中心问题的三维解。

二、三　维　解

考虑一个四维欧氏空间。根据不动中心问题的一般方法，我们假定牛顿力学在该空间中成立。在上述空间中建立四维直角坐标系$O\text{-}xyzq$。设质量为m_1的不动中心P_1处于坐标原点处，而质量同为m_2的不动中心P_2与P_3则分别处于坐标$(0,0,0,-a)$和$(0,0,0,a)$处。其中，m_1，m_2与a为实常量。

考虑一个单位质量粒子P，其坐标设为(x,y,z,q)。假定粒子P在初始时刻的运动面在超曲面$O\text{-}xyz$上，则由于P_2，P_3的对称性，此后P的运动必始终限于同一超曲面上。因此在这一情形中有

$$q=0 \tag{2.1}$$

作变量变换

$$x=a\operatorname{sh}w\sin u\sin v,\quad y=a\operatorname{sh}w\sin u\cos v,\quad z=a\operatorname{sh}w\cos u \tag{2.2}$$

由(2.1)与(2.2)有

$$r_1^2=a^2\operatorname{sh}^2w,\quad r_2^2=a^2\operatorname{ch}^2w,\quad r_3^2=a^2\operatorname{ch}^2w \tag{2.3}$$

1 中国科学院云南天文台，昆明 650011

其中，

$$r_i=[(x-x_{P_i})^2+(y-y_{P_i})^2+(z-z_{P_i})^2+(q-q_{P_i})^2]^{1/2}$$

为粒子P到不动中心$P_i(i=1,2,3)$的距离．因此，粒子P受到三个不动中心的引力势为

$$V=\frac{m_1}{r_1}+\frac{m_2}{r_2}+\frac{m_2}{r_3}=\frac{1}{a}\left(\frac{m_1}{\mathrm{sh}w}+\frac{2m_2}{\mathrm{ch}w}\right) \tag{2.4}$$

式中我们取引力常数为1．

利用(2.1)与(2.2)，我们还可以得到粒子P的动能

$$T=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2+\left(\frac{dq}{dt}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{2a^2}\left(\frac{P_w^2}{\mathrm{ch}^2w}+\frac{P_u^2}{\mathrm{sh}^2w}+\frac{P_v^2}{\mathrm{sh}^2w\sin^2u}\right) \tag{2.5}$$

其中广义动量

$$P_w=\frac{\partial T}{\partial \dot{w}},\ P_u=\frac{\partial T}{\partial \dot{u}},\ P_v=\frac{\partial T}{\partial \dot{v}}$$

因此，粒子P在该三个不动中心场中的哈密顿函数为

$$H=T-V$$

$$=\frac{1}{2a^2}\left(\frac{P_w^2}{\mathrm{ch}^2w}+\frac{P_u^2}{\mathrm{ch}^2w}+\frac{P_v^2}{\mathrm{sh}^2w\sin^2u}\right)-\frac{1}{a}\left(\frac{m_1}{\mathrm{sh}w}+\frac{2m_2}{\mathrm{ch}w}\right) \tag{2.6}$$

(2.6)式表明，哈密顿函数并未显含时间t，并且在哈密顿—雅可比方程中变量w，u和v可以分离．由此我们取生成函数为

$$S=-h_1t+S_1(w)+S_2(u)+S_3(v) \tag{2.7}$$

其中h_1为常量．

利用方程(2.6)与(2.7)，我们得到如下形式的哈密顿—雅可比方程：

$$0=-2h_1a^2\mathrm{sh}^2w\sin^2u+\frac{\mathrm{sh}^2w\sin^2u}{\mathrm{ch}^2w}\left(\frac{dS_1}{dw}\right)^2$$

$$+\sin^2u\left(\frac{dS_2}{du}\right)^2+\left(\frac{dS_3}{dv}\right)^2-2m_1a\,\mathrm{sh}w\sin^2u$$

$$-4m_2a\,\mathrm{sh}^2w\sin^2u/\mathrm{ch}w \tag{2.8}$$

对方程(2.8)分离变量w，u和v，得到

$$\left(\frac{dS_1}{dw}\right)^2=-h_2\frac{\mathrm{ch}^2w}{\mathrm{sh}^2w}+2h_1a^2\mathrm{ch}^2w+2m_1a\frac{\mathrm{ch}^2w}{\mathrm{sh}w}+4m_2a\,\mathrm{ch}w \tag{2.9}$$

$$\left(\frac{dS_2}{du}\right)^2=h_2-\frac{h_3}{\sin^2u} \tag{2.10}$$

$$\left(\frac{dS_3}{dv}\right)^2=h_3 \tag{2.11}$$

其中h_2与h_3为常量．

由方程(2.7)、(2.9)、(2.10)与(2.11)可知，上述系统是个可积系统．Arazov 和 Habibov得到的解限于粒子P在二维面上的运动[3]，而上述解中粒子P的运动区域为三维空间O-xyz，是个三维解．

三、简 单 应 用

对于上述系统，取a/r为小量，其中

$$r^2=x^2+y^2+z^2 \tag{3.1}$$

方程(2.3)与(2.4)给出

$$V=\frac{m_1+2m_2}{r}-\frac{m_2a^2}{r^3}+\frac{1}{r}O\left(\frac{a^4}{r^4}\right) \tag{3.2}$$

(3.2)表明，若一个引力势在较远距离处有如下形式

$$V_0=\frac{k_1}{r}+\frac{k_2}{r^3}+O\left(\frac{1}{r^4}\right) \tag{3.3}$$

其中k_1和k_2为常量，当

$$m_1+2m_2=k_1 \tag{3.4}$$

$$-m_2a^2=k_2 \tag{3.5}$$

时，粒子在上述三个不动中心问题中的三维空间运动可作为该粒子在引力场 V_0 中的运动的中间轨道。

当卫星在一个旋转且对于赤道面对称的天体的赤道面上运动时，其牛顿势形式与（3.3）同。在这种情况下，上述三个不动中心问题可得到简单应用。

四、讨 论

值得提出的是，三个不动中心本身不一定具有物理意义。例如文献[3]中三个不动中心的质量及位置可取复数，而本文的三个不动中心则定义于四维空间中。讨论三个不动中心问题的意义在于它本身是个数学方法。由于它可以给出可积系统，如果该可积系统的场可以作某个真实的不可积的物理场的近似，就会给问题的讨论或计算带来一定程度的便利。如前面所举简单例子所示。

除了中间轨道，不动中心问题还可以有别的应用。如用多个不动中心去近似地球或其它天体的引力场等。对于三个不动中心问题应用方面的研究，Arazov做了不少工作[4,5]。我们期待三个不动中心问题解的发展能拓宽该问题的应用。

本文得到的三个不动中心问题的三维解在中间轨道问题上的优越性在于：当小天体除了受中心力场作用外还受其它力作用（例如火箭推力、光压力等）时，其运动轨道可以不再限制在一个平面内，这时用平面解作中间轨道已明显不适用，应改用三维解解决问题。

本文作者对钱伟长教授和汪家詠教授的关心和帮助表示衷心感谢。

参 考 文 献

[1] V. G. Djomin, New classes of periodic solutions in restricted problems of three bodies, *Astron. Zh.*, **38** (1961), 1.

[2] Eu. P. Aksjonov, Eu. A. Crebenikov and V. G. Djomin, General solutions of the problem on the motion of artificial satellites in the normal gravitational field of the earth, *Iskustbenye Sputniki Zemli*, **8** (1961), 64.

[3] G.T. Arazov and S.A. Habibov, On the solution of the problem of three fixed centres, *Celest. Mech.*, 15 (1977), 265—276.

[4] G. T. Arazov, On some applications of the problem of many fixed centres to geophysics, *Celest. Mech.*, 25 (1981), 345—352.

[5] G. T. Arazov, Differential equations for the osculating elements of the intermediate orbit of the problem of three fixed centers, *Sov. Astron.*, 27(4) (1983), 446—447.

A Three-Dimensional Solution of the Problem of Three Fixed Centres

Qin Yiping Nie Zhaoming

(*Yunnan Observatory, Academia Sinica, Kunming* 650011, *P. R. China*)

Abstract

Based on the definitions of three fixed centres in a four-dimensional space, a three-dimensional solution of the problem of three fixed centres is presented, which develops the plane solution of the problem.

Key words celestial mechanics, fixed centres, three-dimensional solution