应用数学和力学，第17卷 第6期（1996年6月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

受外冲击的多刚体拉氏动力学方程

章 定 国[1]

（邬瑞锋推荐，1995年1月16日收到，1995年4月7日收到修改稿）

摘　要

本文讨论了多刚体系统受外冲击的动力学响应问题，给出了其拉氏动力学方程，所得的方程便于计算机程式化计算。

关键词　冲击　多刚体　Lagrange法　动力学

一、引　言

多刚体系统的冲击动力学是工程技术中一个重要的研究课题．跳伞运动员的落地，拳击运动中的受击，武器发射系统所受脉冲等动力学响应均可归纳为多刚体的碰撞动力学问题．多刚体系统的撞击动力学问题一般可分为两大类：一类是系统与系统外物体碰撞，称为外碰撞；另一类是系统内部刚体之间的碰撞，称为内碰撞．文献[1]从 Newton-Euler 方程出发，讨论了多刚体系统碰撞问题的一般情况，建立起了冲量和速度增量相互耦合的多刚体碰撞动力学模型；文献[2]则把重点放在方程的解耦上，得到了适合于由柱铰连接而成的多刚体系统的内碰动力学方程，易于编程计算．对于复杂机械系统的碰撞动力学方程，一般是无法用手工推导获得，因此，建立适合于计算机统一求解的数力模型，才是人们真正需要的．文献[2]的方法优于[1]的方法，但[2]只讨论了内碰撞．

本文从分析力学观点出发，通过引进冲量势概念，建立起了多刚体系统受外冲击时的拉氏碰撞动力学方程，所得方程形式优美，适宜于计算机程式求解．该数力模型适合于用柱铰和移动铰连接而成的单链或树形多刚体系统，通过引进"轻质体"即可方便地推广到其它任意铰连成的多刚体系统．

二、冲量势和分析形式的碰撞方程

按处理碰撞问题的一贯方法，对系统作如下假设：碰撞时间视为无限小；碰撞中所有物体的位置和方位不变；碰撞是点接触；碰撞过程中物体形状和惯量不变．基于上述假设，可以认为在碰撞过程中的冲力F是一个大小和方向一定的量，因此，在这一过程中冲力可按有势力处理，在形式上可建立其相对某基点的势函数．

1 南京理工大学应用力学系，南京 210094

在碰撞过程中拉氏方程仍然成立：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=Q_i \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{2.1}$$

式中L是拉格朗日函数=动能K－势能P．q_i是广义坐标，Q_i是非保守主动力所对应的广义力，势能P中包括了冲力势P_1和其它力势P_2，$P=P_1+P_2$．把方程(2.1)两边乘以dt，并在冲击时间间隔$\Delta\tau$内积分，考虑到

$$\partial P/\partial \dot{q}_i=0 \tag{2.2}$$

$\Delta\tau\to 0$时

$$\lim_{\Delta\tau\to 0}\int_{t_1}^{t_1+\Delta\tau}\frac{\partial K}{\partial q_i}dt=0 \tag{2.3}$$

$$\lim_{\Delta\tau\to 0}\int_{t_1}^{t_1+\Delta\tau}P_2 dt=0 \tag{2.4}$$

$$\lim_{\Delta\tau\to 0}\int_{t_1}^{t_1+\Delta\tau}Q_i dt=0 \tag{2.5}$$

有如下分析形式的碰撞方程

$$\Delta\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}\right)+\frac{\partial \hat{P}_1}{\partial q_i}=0 \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n) \tag{2.6}$$

其中$\hat{P}_1$是冲量势，其计算方法和冲力势的计算方法相同，只是用冲量$\hat{F}$代替冲力F而已．

三、受冲击的多刚体显式动力学方程

方程(2.6)原则上解决受冲击的刚体系统的动力学问题，但由于其分析形式，不便于计算机程式求解，需进一步推导其显式形式．

设所研究的多刚体系统由作为参考体的零刚体B_0和n个刚体$B_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$用五类运动副（即柱铰和移动铰）连成，其上受有任意多个方向和大小已知的外冲量，如图1．

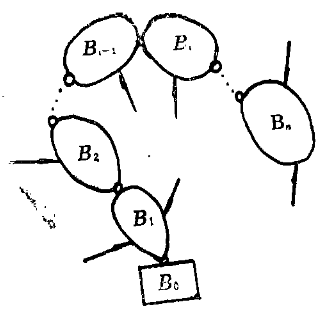

图1 受冲击的多刚体系统

用S表示系统所受的全部外冲量的数目，用l_i表示第i刚体B_i所受的外冲量的数目，用$\boldsymbol{I}_i$表示第i刚体B_i所受的全部外冲量，$\hat{F}_i^{(j)}$表示作用在第i刚体B_i上的第j个外冲量$(j=1,\ 2,\ \cdots,\ l_i)$，显然有：

$$S=\sum_{i=1}^{n}l_i, \qquad \text{其中}n\text{是刚体数目} \tag{3.1}$$

及形式上的：

$$\boldsymbol{I}_i=\sum_{j=1}^{l_i}\hat{F}_i^{(j)} \tag{3.2}$$

对系统建立D-H形式的连体坐标架，并采用4×4的齐次变换矩阵A表示相邻刚体的运动学信

息。联系第 i 和$i-1$刚体坐标系的齐次坐标变换矩阵${}^{i-1}A_i$为

$$
{}^{i-1}A_i \equiv A_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i\sin\theta_i & \sin\alpha_i\sin\theta_i & a_i\cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\alpha_i\cos\theta_i & -\sin\alpha_i\cos\theta_i & a_i\sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.3}
$$

对于转动关节，式中α_i，a_i，d_i是常数，而θ_i是关节变量；对于移动关节，α_i，a_i，θ_i是常数，而d_i是关节变量，并且a_i可以取为0。

联系第 i 系$e^{(i)}$和参考系$\boldsymbol{e}^{(0)}$的齐次坐标变换矩阵

$$
{}^0A_i = {}^0A_1\,{}^1A_2\cdots{}^{i-1}A_i = A_1A_2\cdots A_i \tag{3.4}
$$

令${}^i\boldsymbol{r}_i$为固定在刚体B_i上的一个点，其在第 i 刚体连体系中的齐次坐标为

$$
{}^ir_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} = (x_i,\ y_i,\ z_i,\ 1)^T \tag{3.5}
$$

令${}^0r_i$为同一点${}^i\boldsymbol{r}_i$在参考坐标系$\boldsymbol{e}^{(0)}$中的齐次坐标，则

$$
{}^0\boldsymbol{r}_i = {}^0A_i\,{}^i\boldsymbol{r}_i \tag{3.6}
$$

用q_i代表关节 i 的广义坐标，它既可以是θ_i（转动关节），也可以是d_i（移动关节）。点${}^i\boldsymbol{r}_i$的速度为

$$
{}^0\boldsymbol{V}_i \equiv \boldsymbol{V}_i = \frac{d}{dt}({}^0\boldsymbol{r}_i) = \frac{d}{dt}({}^0A_i\,{}^ir_i) = \left[\sum_{j=1}^{i}\frac{\partial\,{}^0A_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\right]{}^ir_i \tag{3.7}
$$

引入$\boldsymbol{\Phi}_i$矩阵：

$$
\boldsymbol{\Phi}_i = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{当第 } i \text{ 关节为转动时} \tag{3.8}
$$

$$
\boldsymbol{\Phi}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{当第 } i \text{ 关节为移动时} \tag{3.9}
$$

显然有如下式子成立：

$$
\partial\,{}^{i-1}A_i/\partial q_i = \Phi_i\,{}^{i-1}A_i \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{3.10}
$$

所以：

$$
\frac{\partial\,{}^0A_i}{\partial q_j} = \begin{cases} {}^0A_2\,{}^1A_2\cdots{}^{j-2}A_{j-1}\Phi_j\,{}^{j-1}A_j\cdots{}^{i-1}A_i, & j\leqslant i \\ 0, & j>i \end{cases} \tag{3.11}
$$

定义 $U_{ij} \triangleq \partial\,{}^0A_i/\partial q_j \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ (3.12)

则(3.11)式又可表达为：

$$
U_{ij} = \begin{cases} {}^0A_{j-1}\Phi_j\,{}^{j-1}A_i, & j\leqslant i \\ 0, & j>i \end{cases} \tag{3.13}
$$

因此

$$V_i=\left[\sum_{j=1}^{i}U_{ij}\dot{q}_j\right]{}^i r_i \tag{3.14}$$

求得刚体B_i上的某点的速度后，就能求出刚体$B_i(i=1,2,\cdots,n)$的动能K_i(以零刚体B_0为参考体)，设dK_i是刚体i上微元质量dm的动能dK_i，则

$$dK_i=\mathrm{Tr}(V_iV_i^T)dm/2 \tag{3.15}$$

式中Tr表示对矩阵求迹。

把式(3.14)的V_i代入上式，得

$$dK_i=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}U_{ij}({}^i r_i dm\,{}^i r_i^T)U_{ik}^T\dot{q}_j\dot{q}_k\right] \tag{3.16}$$

因为矩阵U_{ij}是当q_j变化时刚体B_i上的各点${}^i\boldsymbol{r}_i$相对于参考系$\boldsymbol{e}^{(0)}$的变化率，对于刚体B_i上的各点来讲U_{ij}是常量，且与刚体B_i的质量分布无关。

$$K_j=\int dK_i=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}U_{ij}J_iU_{ik}^T\dot{q}_j\dot{q}_k\right] \tag{3.17}$$

其中

$$J_i=\int {}^i r_i\,{}^i r_i^T dm \tag{3.18}$$

J_i只取决于刚体B_i的质量分布，与其位置和运动速度无关。

整个多刚体系统的总动能

$$K=\sum_{i=1}^{n}K_i=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}[\mathrm{Tr}(U_{ij}J_iU_{ik}^T)\dot{q}_j\dot{q}_k] \tag{3.19}$$

设$\hat{\boldsymbol{P}}_i$为作用在刚体B_i上的冲量势，则

$$\hat{P}_i=-\sum_{j=1}^{l_i}(\hat{F}_i^{(j)}\cdot{}^0 r_i^{(j)})=-\sum_{j=1}^{l_i}(\hat{F}_i^{(j)}\,{}^0A_i\,{}^i r_i^{(j)}) \tag{3.20}$$

式中${}^0\boldsymbol{r}_i^{(j)}$和${}^i r_i^{(j)}$表示冲量$\hat{F}_i^{(j)}$作用点在$\boldsymbol{e}^{(0)}$和$\boldsymbol{e}^{(i)}$中的位置，

$$\hat{F}_i^{(j)}=(\hat{F}_{ix}^{(j)},\ \hat{F}_{iy}^{(j)},\ \hat{F}_{iz}^{(j)},\ 0) \tag{3.21}$$

是在$\boldsymbol{e}^{(0)}$中表示的冲量行矢量。

式(3.20)在形式上可写成：

$$\hat{P}_i=-I_i\,{}^0A_i\,{}^i\bar{r}_i \tag{3.22}$$

最后，多刚体系统的总冲量势为

$$\hat{P}=\sum_{i=1}^{n}\hat{P}_i=\sum_{i=1}^{n}-I_i\,{}^0A_i\,{}^i\bar{r}_i \tag{3.23}$$

由公式(3.19)和(3.23)分别求得多刚体系统的动能和冲量势，把它们应用于分析形式的碰撞方程即能求出显式方程。

$$\frac{\partial K}{\partial\dot{q}_p}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\mathrm{Tr}(U_{ip}J_iU_{ik}^T)\dot{q}_k+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\mathrm{Tr}(U_{ij}J_iU_{ip}^T)\dot{q}_j \tag{3.24}$$

将上式略作变化，即得

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_p}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\mathrm{Tr}(U_{ik}J_iU_{ip}^T)\dot{q}_k \tag{3.25}$$

又因为

$U_{ip}=0$　　当$p>i$时

所以有：

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_p}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\mathrm{Tr}(U_{ik}J_iU_{ip}^T)\dot{q}_k \tag{3.26}$$

将上式中的i换成j，p换成i，则得方程

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}=\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{j}\mathrm{Tr}(U_{jk}J_jU_{ji}^T)\dot{q}_k \tag{3.27}$$

所以

$$\Delta\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}\right)=\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{j}\mathrm{Tr}(U_{jk}J_jU_{ji}^T)\Delta\dot{q}_k \tag{3.28}$$

其中　　$\Delta\dot{q}_k=\dot{q}_k-\dot{q}_k^0$　　(3.29)

$\dot{q}_k^0$和$\dot{q}_k$分别为碰撞前后的广义速度。

容易求得：

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial q_i}=-\sum_{j=1}^{n}I_jU_{ji}\,{}^j\bar{r}_j \tag{3.30}$$

把(3.28)和(3.30)代入公式(2.6)，得

$$\sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{j}\mathrm{Tr}(U_{jk}J_jU_{ji}^T)\Delta\dot{q}_k-\sum_{j=i}^{n}I_jU_{ji}\,{}^j\bar{r}_j=0\qquad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{3.31}$$

公式(3.31)又可写成矩阵形式

$$[M]\Delta\dot{\mathbf{q}}-\mathbf{B}=\mathbf{0} \tag{3.32}$$

式中

$$\Delta\dot{\mathbf{q}}=\begin{pmatrix}\Delta\dot{q}_1\\ \Delta\dot{q}_2\\ \vdots\\ \Delta\dot{q}_n\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}B_1\\ B_2\\ \vdots\\ B_n\end{pmatrix},\quad B_i=\sum_{j=i}^{n}I_jU_{ji}\,{}^j\bar{r}_j \tag{3.33}$$

$[M]$是$n\times n$阶方阵

$$M_{ik}=\sum_{j=\max(i,k)}^{n}\mathrm{Tr}(U_{jk}J_jU_{ji}^T)\qquad(i,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{3.34}$$

公式(3.31)～(3.34)即为所求的受外冲击的多刚体拉氏显式动力学方程。

几点说明

i）式(3.33)中的B_i是形式上表示，实际应当为

$$B_i=\sum_{j=i}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l_i}\hat{F}_j^{(k)}U_{ji}\,{}^jr_j^{(k)}\right) \tag{3.35}$$

ii）由式(3.32)得

$$\Delta\dot{\mathbf{q}}=[M]^{-1}\mathbf{B} \tag{3.36}$$

$$\dot{\mathbf{q}}=[M]^{-1}\mathbf{B}+\dot{\mathbf{q}}^{0} \tag{3.37}$$

$[M]$，$\mathbf{B}$ 只跟几何、惯量参数、碰前的 $\mathbf{q}^0$ 值有关，并容易由计算机程式形成，代入冲量的位置和方位，即可求出受冲击后的响应。

iii）本文所得结论可容易推广到多刚体系统的树形拓扑形式[3]和任意铰连接而成的多刚体系统（把其它形式的铰分解为柱铰和移动铰）。因此，文章所得的结论具有普遍性。

参 考 文 献

[1] J. Wittenburg, *Dynamics of System of Rigidbodies*, Teubner (1977).

[2] 梁敏、洪嘉振、刘延柱，多刚体系统碰撞动力学方程及可解性判别准则，应用力学学报，8(1)(1991).

[3] 章定国，"分路"方法在树系统动力学分析中的应用，力学学报，26(3)(1994).

The Lagrange Dynamic Equations of Multi-Rigidbody Systems with External Shocks

Zhang Dingguo

(*Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, P. R. China*)

Abstract

This paper discusses the problems of dynamic response of multi-rigidbody systems with external impulsive forces, and presents a set of equations with the form of Lagrange method. These equations are easy to be calculated by computer.

Key words shock, multi-rigidbody system, Lagrange method, dynamics