应用数学和力学，第17卷 第5期（1996年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

一类奇异二阶非线性方程两点边值问题正解存在性*

杨作东[1]

（林宗池推荐，1993年4月15日收到，1995年4月5日收到修改稿）

摘　要

在本文中，我们证明了方程：$(|y'|^{p-2}y')'+f(t,y)=0$ $(p>1)$两点边值问题解的存在性。这里f允许在$y=0$处奇异。

关键词　奇异边值问题　非线性　正解　存在性

一、引　言

奇异的二阶非线性常微分方程：

$$(|y'|^{p-2}y')'+f(t,y)=0 \qquad (p>1) \tag{1.1}$$

$$y(0)=y(1)=0 \text{ 或 } y(0)=0,\ y'(1)=c\geqslant 0 \tag{1.2}$$

是以反应扩散及非牛顿流体理论等许多物理问题为背景提出的数学模型[1~3]。当$p=2$时已经取得了丰硕的成果，例如参见[4～9]。当$p>1$时，M. N. Pino[10]等证明了方程（1.1），(1.2)非奇异弱解的存在性。作者在[11]中研究了当$f(t,y)$关于y非增且$\lim\limits_{y\to 0^+} f(t,y)=\infty$奇异的条件下得到了正解存在性。本文进一步研究当$f(t,y)$关于$y$既不非增又不非减且$f(t,y)$在$y=0$处奇异的条件下得到了正解的存在性。从而推广了[4～9,11]中的结果，补充了[10]中的结果。

二、非奇异情形

本节中，首先建立边值问题：

$$\begin{cases} \phi_p(y'))'+f(t,y)=0 & (2.1)\\ y(0)=a,\ y'(1)=b & (2.2)\end{cases}$$

解的存在性定理，这里：$\phi_p(y)=|y|^{p-2}y$ $(p>1)$

定理2.1　设$f(t,y)$：$[0,1]\times R\to R$连续，且对边值问题：

---

* 河南省教委资助项目。

1　河南师范大学，新乡市　453002.

$$\left.\begin{array}{l}(\phi_p(y'))'+\lambda f(t,y)=0\\ y(0)=a,\ y'(1)=b\end{array}\right\} \tag{2.3}$$

的任一解y，存在与$\lambda\in(0,1)$无关的常数K使得：$|y|_0=\sup\limits_{[0,1]}|y|\leqslant K$。则问题（2.1），（2.2）至少存在一个解$y\in C^1[0,1]$。

证明 求问题(2.3)的解等价于求$y\in C[0,1]$满足

$$y(t)=a+\int_0^t\phi_p^{-1}\left(\phi_p(b)+\lambda\int_s^1 f(z,y)dz\right)ds$$

定义N_λ：$C_B[0,1]\to C_B[0,1]$。$C_B[0,1]=\{y\in C[0,1],\ y(0)=a,\ y'(1)=b\}$

$$(N_\lambda y)(t)=a+\int_0^t\phi_p^{-1}\,(\phi_p(b)+\lambda\int_s^1 f(z,y)dz)ds$$

(2.3)等价于$N_\lambda y=y$存在不动点。下证N_λ：$C_B[0,1]\to C_B[0,1]$是全连续。令$\Omega\subseteq C_B[0,1]$是有界的。即对$\forall y\in\Omega$有：$|y|_0\leqslant M_0$。于是有：$|N_\lambda y|\leqslant|b|+\int_0^1 G(s)ds$。

这里：$G(s)=\max\{|\phi_p^{-1}(|\phi_p(b)|+M_1s)|,|\phi_p^{-1}(-|\phi_p(b)|-M_1s)|\}$。$M_1=\sup|f(t,w)|$表示$f$在$[0,1]\times[-M_0,M_0]$上的上确界。故$N_\lambda(\Omega)$是有界的。再证$N_\lambda(\Omega)$在$[0.1]$上等度连续，对$\forall y\in\Omega$，$s,t\in[0,1]$有

$$|N_\lambda y(t)-N_\lambda y(s)|\leqslant\int_s^t G(v)dv. \tag{2.4}$$

于是推出$N_\lambda(\Omega)$在$[0,1]$上等度连续，令

$$U=\{y\in C_B[0,1]:\ |y|_0<2K+M_2+2\}.$$

故$u\in\partial U$时：$(I-N_\lambda)(y)\neq 0$。因而由 Leray-Schauder 度理论知：

$$\deg(I-N_1,\ U,\ 0)=\deg(I-N_0,\ U,0)$$

因$N_0y=a+bt=\theta(t)$（这里取$|a|$，$|b|<K+1$）

$$|N_0y|<2K+2。从而N_0u=\theta(t)\in U.$$

故 $$\deg(I-N_1,\ U,\ 0)=\deg(I,U,\theta(t))=1\neq 0$$

这就证明了方程$N_1\,y=y$在U内至少存在一个解且$y\in C[0,1]$和$y'(1)=b$。

下面证明：

$$\left.\begin{array}{l}(\phi_p(y'))'+f(t,y)=0\\ y(0)=a,\ y(1)=b\end{array}\right\} \tag{2.5}$$

解的存在性定理。

定理2.2 设f：$[0,1]\times R\to R$连续，且对边值问题：

$$\left.\begin{array}{l}(\phi_p(y'))'+\lambda f(t,y)=0\\ y(0)=a,\ y(1)=b\end{array}\right\} \tag{2.6}$$

的任一解y，存在与$\lambda\in(0,1)$无关的常数$K^*>0$使得：$|y|_0\leqslant K^*$。则问题(2.5)至少存在一个解$y\in C[0,1]$

证明 求问题(2.6)的解等价于求$y\in C[0,1]$使得：

$$y(t)=a+\int_0^t\phi_p^{-1}\left(A-\int_s^1\lambda f(z,y)dz\right)ds \tag{2.7}$$

其中A满足：

$$b-a=\int_0^1\phi_p^{-1}\left(A-\int_s^1\lambda f(z,y)dz\right)ds \tag{2.8}$$

首先证明A存在且唯一。设 $H(x)=\int_0^1\phi_p^{-1}(x-\theta(s))ds$

其中：$\theta(s)=\int_s^1\lambda f(z,y)dz$。因 $\theta(s)$在$[0,1]$上连续，存在s_0，$s_1\in[0,1]$使得：$\theta(s_0)\leqslant\theta(s)\leqslant\theta(s_1)$，则有：

$$\phi_p^{-1}(x-\theta(s_1))\leqslant H(x)\leqslant\phi_p^{-1}(x-\theta(s_0))$$

由连续函数介值定理，存在$A\in(-\infty,+\infty)$使得：
$H(A)=b-a$。由ϕ_p^{-1}为严格单调增得A是唯一的。

定义 N_λ：$C_B[0,1]\to C_B[0,1]$，这里：$C_B[0,1]=\{y\in C[0,1],\ y(0)=a,\ y(1)=b\}$。$N_\lambda y=a+\int_0^t\phi_p^{-1}\left(A-\int_s^1\lambda f(z,y)dz\right)ds$，这里$A$满足(2.8)。我们证$N_\lambda$是连续的。设在$[0,1]$上一致有：$y_n\to y$。我们需证在$[0,1]$上一致有：$N_\lambda y_n\to N_\lambda y$。由于：

$$N_\lambda y_n-N_\lambda y=\int_0^t\left[\phi_p^{-1}\left(A_n-\lambda\int_s^1 f(z,y_n)dz\right)-\phi_p^{-1}\left(A-\lambda\int_s^1 f(z,y)dz\right)\right]ds \tag{2.9}$$

注意到：

$$\int_0^1\left[\phi_p^{-1}\left(A_n-\lambda\int_s^1 f(z,y_n)dz\right)-\phi_p^{-1}\left(A-\lambda\int_s^1 f(z,y)dz\right)\right]ds=0 \tag{2.10}$$

我们能证明：$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$。注意到(2.9)以及$\phi_p^{-1}$和$f$的连续性可保证$N_\lambda$是连续的。为证$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$。由(2.10)及中值定理得：

$$\phi_p^{-1}\left(A_n-\lambda\int_{\eta_n}^1 f(z,y_n)dz\right)=\phi_p^{-1}\left(A-\lambda\int_{\eta_n}^1 f(z,y)dz\right)$$

这里$\eta_n\in[0,1]$。因此有：

$$A_n-\lambda\int_{\eta_n}^1 f(z,y_n)dz=A-\lambda\int_{\eta_n}^1 f(z,y)dz$$

由$y_n\to y$，故有：$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$。

下证N_λ全连续，设$\Omega\subseteq C_B[0,1]$的有界集，即对$\forall y\in\Omega$，存在$M>0$有：$|y|_0\leqslant M$。首先证对任意$y\in\Omega$存在$N^*>0$有：$|A_y|\leqslant N^*$。因为：

$$b-a=\int_0^1\phi_p^{-1}\left(A_y-\lambda\int_s^1 f(z,y)dz\right)ds.$$

利用积分中值公式得：

$$A_y=\int_{\eta_y}^1\lambda f(z,y)dz+\phi_p(b-a).$$

从而：$|A_y|\leqslant M_1+\phi_p(b-a)=N^*$。其次证明$N_\lambda(\Omega)$是有界的。由$|N_\lambda u|\leqslant|a|+\int_0^1 I(s)ds$

其中 $I(s)=\max\{|\phi_p^{-1}(-N^*-1-M_1(1-s))|,\ |\phi_p^{-1}(N^*+1+M_1(1-s))|\}$
$M_1=\sup|f(t,w)|$是在$[0,1]\times[-M,M]$上的上确界。由此知$N_\lambda(\Omega)$是有界的。再证$N_\lambda(\Omega)$是$[0,1]$上等度连续，对$\forall y\in\Omega$和$s,t\in[0,1]$有：

$$|N_\lambda y(t)-N_\lambda y(s)|\leqslant\int_s^t I(v)dv$$

因此有 Arzela-Ascoli 定理推出N_λ是全连续的。其余证明与定理2.1类似。在此略。

三、奇 异 情 形 I

这节考察边值问题：

$$\left.\begin{aligned}&(\phi_p(y'))'+f(t,y)=0\\&y(0)=y'(1)=0\end{aligned}\right\}\tag{3.1}$$

正解的存在性。

这里f满足：

$$\left.\begin{aligned}&f\text{在}[0,1]\times(0,\infty)\text{上连续，且对}\\&\text{任意}t\in(0,1),\ \lim_{y\to0^+}f(t,y)=\infty\end{aligned}\right\}\tag{3.2}$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{在}(0,1)\times(0,\infty)\text{上有：}0<f(t,y)\leqslant g(y)h(y)r(t).\text{这里}g>0\\&\text{和}h>0\text{在}(0,\infty)\text{上连续且非增以及}r(t)\text{连续}\end{aligned}\right\}\tag{3.3}$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{对任一常数}M>0,\text{存在}[0,1]\text{上连续函数}\psi(t)\\&\text{在}(0,1)\text{上}\psi(t)>0,\text{使得在}(0,1)\times(0,M]\text{上有：}f(t,y)\geqslant\psi(t)\end{aligned}\right\}\tag{3.4}$$

定理3.1 设f满足条件(3.2)、(3.3)、(3.4)以及条件：对任意$K>0$有：

$$\int_0^1 g(Kt)h(Kt)r(t)dt<\infty\tag{3.5}$$

则方程(3.1)至少存在一个正解。

证明 为了避开$f(t,y)$在$y=0$处奇性，考虑方程：

$$\left.\begin{aligned}&(\phi_p(y'))'+\lambda f_n(t,y)=0\\&y(0)=\frac{1}{n},\ y'(1)=0\qquad(0<\lambda<1)\end{aligned}\right\}\tag*{(3.6)$_\lambda^n$}$$

$n\in N=\{1,2,\cdots\}$。其中：

$$f_n(t,y)=\begin{cases}f(t,y) & \left(|y|\leqslant\frac{1}{n}\right)\\ f\left(t,\frac{1}{n}\right) & \left(|y|>\frac{1}{n}\right)\end{cases}$$

对(3.6)$_\lambda^n$任一解有：$(\phi_p(y'))'<0$，推出：$y'>0$，$y\geqslant\frac{1}{n}$于是可得：

$$-(\phi_p(y'))'\leqslant g\left(\frac{1}{n}\right)h\left(\frac{1}{n}\right)r(t)\leqslant g\left(\frac{1}{n}\right)h\left(\frac{1}{n}\right)\sup_{[0,1]}r(t)=M_2$$

故有：

$$|\phi_p(y')|\leqslant\left|-\int_t^1(\phi_p(y'))'ds\right|\leqslant M_2\qquad(\text{与}\lambda\text{无关})$$

$|y'|\leqslant M_2^{\frac{1}{p-1}}=M_1$(与$\lambda$无关)。$|y|\leqslant M_1+1=M_0$(与$\lambda$无关)，由定理2.1 可得对$\forall n\in N$方程：

$$\left.\begin{aligned}&(\phi_p(y'))'+f_n(t,y)=0\\&y(0)=\frac{1}{n},\ y'(1)=0\end{aligned}\right\}\tag{3.7}$$

至少存在一个正解$y_n>0$。为了证明方程(3.1)有正解，需证对(3.7)的任一解y_n，存在与n无关的常数$K_1>0$，$K_2>0$使得：$|y_n|\leqslant K_1$，$|y_n'|\leqslant K_2$。设y为(3.7)的解由条件(3.3)得：

$$-\int_t^1(\phi_p(y'))'ds\leqslant\int_t^1 g(y(s))h(y(s))r(s)ds$$

则有： $\phi_p(y')\leqslant g(y(t)h(y(t))\int_0^1 r(s)ds\leqslant g\left(y-\frac{1}{n}\right)h\left(y-\frac{1}{n}\right)\cdot K$，$K=\int_0^1 r(s)ds$

从而得：
$$\frac{y'}{\left[g\left(y-\frac{1}{n}\right)h\left(y-\frac{1}{n}\right)\right]^{\frac{1}{p-1}}}\leqslant K$$

即：
$$\int_0^{y(1)-\frac{1}{n}}\frac{du}{[g(u)h(u)]^{\frac{1}{p-1}}}\leqslant K.$$

令 $G(z)=\int_0^z\frac{du}{[g(u)h(u)]^{\frac{1}{p-1}}}$，$G(z)$：$[0,\infty)\to[0,\infty)$上正递增连续函数。

则：$G\left(y(1)-\frac{1}{n}\right)\leqslant K\Rightarrow y(1)\leqslant 1+G^{-1}(K)$

从而有：

$$y(t)\leqslant 1+G^{-1}(K)=K_1 \quad (与n无关)$$

由条件(3.4)得：

$-(\phi_p(y'))'\geqslant\psi(t)$. 推出：$y'\geqslant\phi_p^{-1}\left(\int_t^1\psi(s)ds\right)$.

即有：

$$y(t)\geqslant\left(\int_s^1\psi(z)dz\right)^{\frac{1}{p-1}}ds$$

令$Q(t)=\int_0^t\left(\int_s^1\psi(z)dz\right)^{\frac{1}{p-1}}ds$. $Q'(t)=\left(\int_t^1\psi(z)dz\right)^{\frac{1}{p-1}}$

$Q'(0)=\left(\int_0^1\psi(z)dz\right)^{\frac{1}{p-1}}=K_0>0$。则存在$\varepsilon>0$使得对$t\in[0,\varepsilon]$有：$Q(t)\geqslant\frac{K_0}{2}t$。而$\frac{Q(t)}{t}$在$[\varepsilon,1]$上有正下界，从而存在$K_3>0$使得：$Q(t)\geqslant K_3t$。取$\bar{K}=\min\left(\frac{K_0}{2},K_3\right)>0$，则对$\forall t\in[0,1]$有：$Q(t)\geqslant\bar{K}t$。即对$\forall t\in[0,1]$有：$y(t)\geqslant\bar{K}t$。于是从条件(3.3)可得：

$-(\phi_p(y'))'\leqslant g(\bar{K}t)h(\bar{K}t)r(t)\Rightarrow\phi_p(y')\leqslant\int_0^1 g(\bar{K}t)h(\bar{K}t)r(t)dt=M_2$. $\Rightarrow|y'|\leqslant M_2^{\frac{1}{p-1}}$ $=K_2$(与n无关)。综上所述对(3.7)的解y_n有：

$|y_n|\leqslant K_1$，$|y_n'|\leqslant K_2$，故$\{y_n\}$一致有界，等度连续，由Arzela-Ascoli定理可得y_n在$[0,1]$上存在子列$y_{n'}$一致收敛于$y\in C[0,1]$且$y\geqslant0$。又$y_{n'}$满足：

$$y_{n'}=\int_0^t\phi_p^{-1}\left(\int_s^1 f(z,y_{n'})dz\right)ds+\frac{1}{n} \tag{3.8}$$

由于f在$[0,1]\times(0,M_0]$的紧子身上一致连续，故对$s\in[0,1]$有：$f(s,y_{n'})\rightrightarrows f(s,y)$
因此对(3.8)两边令$n'\to\infty$得：

$$y(t)=\int_0^t\phi_s^{-1}\left(\int f(z,y)dz\right)ds$$

则有： $(\phi_p(y'))'+f(t,y)=0,\ y(0)=y'(1)=0$ 证毕

定理3.2 设f满足条件(3.2)、(3.3)、(3.4)以及条件：

$$\left.\begin{array}{l}\text{对}\forall a\in(0,\infty)\text{有：}\int_0^a h(u)du<\infty \\ \text{对}\ \forall K>0\ \text{有：}\int_0^1 g(Kt)dt<\infty\end{array}\right\} \tag{3.9}$$

则方程(3.1)至少存在一个正解.

证明 与定理3.1证明完全类似可证对$\forall n\in IN$方程(3.7)至少存在一个正解y_n且$|y_n|\leqslant K_1$(与n无关)。而由(3.7)可得：

$$-(\phi_p(y_n'))'\leqslant g(y_n)h(y_n)r(t)$$

两边同乘y_n'且在从t到1积分得：

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)(y_n')^p\leqslant g(y_n)h(y_n)y_n'\sup_{[0,1]}r(t)=g(y_n)h(y_n)y_n'M_0,$$

其中$M_0=\sup\limits_{[0,1]}r(t)$.与定理2.1类似可证：存在$K>0$使得：$y_n(t)\geqslant Kt$. 从而得：

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)\int_0^1(y_n')^p dt\leqslant M_0\int_0^1 g(Kt)dt\int_0^{K_1}h(u)du$$

故存在$M_1>0$有：$\|y_n'\|_{L^p}\leqslant M_1$(与$n$无关)。以下证明与定理3.1类似.

定理3.3 设f满足条件(3.2)、(3.3)、(3.4)以及条件：对任意$K>0$有：

$$\int_0^1 h(Kt)r(t)dt<\infty \tag{3.10}$$

$$yg(y)\text{在}(0,\infty)\text{上非减} \tag{3.11}$$

则方程(3.1)至少存在一个正解.

证明 与定理2.1类似可证对$\forall n\in N$方程(3.7)至少存在一个正解y_n且$y_n\leqslant K_1$(与n无关)以及存在$K_2>0$使得：$y_n(t)\geqslant K_2t$。于是由(3.7)得：

$$-(\phi_p(y'))'\leqslant g(y_n)h(y_n)r(t).$$

两边同乘y_n且0到1积分得：

$$-\int_0^1(\phi_p(y_n'))'y_n ds\leqslant K_1g(K_1)\int_0^1 h(K_2t)r(t)dt$$

即：
$$\int_0^1(y_n')^p ds\leqslant K_1g(K_1)\int_0^1 h(K_2t)r(t)dt=M_1$$

亦即：$\|y_n'\|_{L^p}\leqslant M_1$(与$n$无关)。以下证明与定理3.1类似。在此略.

四、奇 异 情 形 Ⅱ

这节设f满足条件：

$$\text{在}(0,1)\times(0,\infty)\text{上有：}0<f(t,y)\leqslant g(y)h(y)r(t) \tag{4.1}$$

这里：(a) $g>0$在$(0,\infty)$上连续且非增.

(b) $h>0$在$(0,\infty)$上连续，且$\int_0^1 h(u)du<\infty$. 以及$r(t)$在$[0,1]$上连续.

$$\left.\begin{array}{l}\text{对非负常数}K_1\text{和}K_2\text{存在}N>0\text{使得对}z>0 \\ \displaystyle\int_0^z\frac{du}{(g(u))^{1/p}}\leqslant\left(K_1\int_0^z h(u)du\right)^{1/p}+K_2\text{推出}z\leqslant N\end{array}\right\} \tag{4.2}$$

定理4.1 设f满足条件(3.2)、(4.1)、(4.2)以及(3.4)，则方程(3.1)至少存在一个正解.

证明　与定理3.1完全类似可证对$\forall n\in N$方程(3.7)至少存在一个正解y_n。下证对(3.7)的任一解存在与n无关的常数$M_0>0$，$M_1>0$使得：$|y_n|\leqslant M_0$，$|y'|\leqslant M_1$对(3.7)的任一解有：

$$-(\phi_p(y_n'))'\leqslant g(y_n)h(y_n)r(t)\leqslant Mg(y_n)h(y_n)$$

其中：$M=\sup\limits_{[0,1]} r(t)$。两边同乘$y'$且从$t$到1积分，得：

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)(y_n')^p\leqslant Mg(y_n)\int_0^{y_n(1)}h(u)du$$

则有：
$$\frac{y_n'}{(g(y_n))^{1/p}}\leqslant\left(K_1\int_0^{y_n(1)}h(u)du\right)^{1/p}$$

从0到1积分得：
$$\int_{1/n}^{y_n(1)}\frac{du}{(g(u))^{1/p}}\leqslant\left(K_1\int_0^{y_n(1)}h(u)du\right)^{1/p}$$

即：
$$\int_0^{y_n(1)}\frac{du}{(g(u))^{1/p}}\leqslant\left(K_1\int_0^{y_n(1)}h(u)du\right)^{1/p}+\int_0^1\frac{du}{(g(u))^{1/p}}$$

由条件(4.2)得：$y_n(t)\leqslant y_n(1)\leqslant N=M_0$(与$n$无关)

以下证明与定理3.1完全类似。

注　条件(4.2)可用下面条件代替：

对正数$K_1\geqslant0$和$K_2\geqslant0$，存在$N>0$使得对$z>0$

$z\leqslant\left(K_1\int_0^z h(u)du\right)^{1/p}+K_2$。推出：$z\leqslant N$

定理4.2　设f满足条件(3.2)、(3.4)、(3.9)以及条件(4.1)、(4.2)，则方程(3.1)至少存在一个正解。

定理4.3　设f满足条件(3.2)、(3.4)、(3.10)、(3.11)以及条件(4.1)、(4.2)，则方程(3.1)至少存在一正解。

最后我们考虑问题：

$$\left.\begin{aligned}&(\phi_p(y'))'+f(t,y)=0\\&y(0)=y(1)=0\end{aligned}\right\}\tag{4.3}$$

定理4.4　设f满足条件(3.2)、(3.3)、(3.4)以及条件：对$\forall K>0$有：

$$\int_0^1 g(Kt(1-t))h(Kt(1-t))r(t)dt<\infty\tag{4.4}$$

则方程(4.3)至少存在一个正解。

证明　考察方程：

$$\begin{aligned}&(\phi_p(y'))'+\lambda f_n(t,y)=0\\&y(0)=y(1)=\frac{1}{n}\end{aligned}\qquad(4.5)_\lambda^n$$

其中　$n\in N=\{1,2,\cdots\}$，$f_n(t,y)$与定理 3.1 证明中的$f_n(t,y)$一致。对$(4.5)_\lambda^n$ 的任一解y有：$(\phi_p(y'))'<0$。由$y(0)=y(1)$推出存在$t_0\in(0,1)$有：$y'(t_0)=0$。从而$t\geqslant t_0$时$y'(t)\leqslant0$；$t<t_0$时$y'(t)\geqslant0$。从而有$t\in[0,1]$有：$y(t)\geqslant1/n$。于是从$(3.16)_\lambda^n$得：

$$-(\phi_p(y'))'\leqslant g\left(\frac{1}{n}\right)h\left(\frac{1}{n}\right)\sup_{[0,1]}r(t)=M_2\ (\text{与}\lambda\in(0,1)\text{无关})。$$

从而可推出存在$M_0>0$使得：$y\leqslant M_0$(与$\lambda\in(0,1)$无关)。由定理2.2可得对$(4.5)_1^n$ $\forall n\in N$

至少存在一个正解。即对方程：

$$\left.\begin{aligned}&(\phi_p(y'))'+f_n(t,y)=0\\&y(0)=y(1)=\frac{1}{n}\end{aligned}\right\}\qquad(4.5)_1^n$$

$\forall n\in N$至少存在一个正解。下证对$(4.5)_1^n$的任一解y_n存在与n无关的常数$M_0>0$、$M_1>0$使得：$|y_n|\leqslant M_0$，$|y_n'|\leqslant M_1$。从$(4.5)_1^n$得：

$$-(\phi_p(y'))'\leqslant g\left(y-\frac{1}{n}\right)h\left(y-\frac{1}{n}\right)r(t)$$

当$t\in(0,t_0]$时，$y'(t)\geqslant 0$。对上式两边从t到t_0积分得：$(y')^{p-1}\leqslant g\left(y-\frac{1}{n}\right)h\left(y-\frac{1}{n}\right)\int_0^1 r(t)\,dt$

$\Rightarrow\int_0^{t_0}y'\Big/\left[g\left(y-\frac{1}{n}\right)h\left(y-\frac{1}{n}\right)\right]^{\frac{1}{p-1}}\leqslant\int_0^1 r(t)dt=K$ 即有：$\int_0^{y(t_0)-\frac{1}{n}}du/[g(u)h(u)]^{\frac{1}{p-1}}\leqslant K$。

令$G(z)=\int_0^z du/[g(u)h(u)]^{\frac{1}{p-1}}$从而推得：

$$y(t)\leqslant y(t_0)\leqslant 1+G^{-1}(K)=M_0(\text{与}n\text{无关})$$

则$G:(0,\infty)\to(0,\infty)$是增函数可得$y(t_0)\leqslant G^{-1}(K)+\frac{1}{n}$。

由条件(3.4)得：$-(\phi_p(y'))'\geqslant\psi(t)$

当$t\leqslant t_0$时，$y(t)\geqslant\int_0^t\left(\int_s^{t_0}\psi(z)dz\right)^{\frac{1}{p-1}}ds$

令$Q(t)=\int_0^t\left(\int_s^{t_0}\psi(z)dz\right)^{\frac{1}{p-1}}ds$，$Q'(t)=\left(\int_t^{t_0}\psi(z)dz\right)^{\frac{1}{p-1}}$

$Q'(0)=\left(\int_0^{t_0}\psi(z)dz\right)^{\frac{1}{p-1}}=K_0>0$，这里注意到$t_0\in(0,1)$我们断言必有$n_0\geqslant 0$使得：$t_0\geqslant\beta_{n_0}=\frac{1}{2^{n_0+1}}$。事实上取$\beta_0=\frac{1}{2}$，若$t_0\geqslant\frac{1}{2}$结论成立。若$t_0<\frac{1}{2}$取$\beta_1=\frac{1}{2^2}$ 则 $t_0\geqslant\frac{1}{2^2}$或$t_0<\frac{1}{2^2}$。若$t_0\geqslant\frac{1}{2^2}$结论成立。若$t_0<\frac{1}{2^2}$再取$\beta_2=\frac{1}{2^3}$。则$t_0\geqslant\frac{1}{2^3}$或$t_0<\frac{1}{2^3}$。若$t_0\geqslant\frac{1}{2^3}$结论成立；若$t_0<\frac{1}{2^3}$再取$\beta_3=\frac{1}{2^4}$。若一直有$t_0<\frac{1}{2}$，$t_0<\frac{1}{2^2}$，$t_0<\frac{1}{2^3}$，$\cdots t_0<\frac{1}{2^{n+1}}=\beta_n\cdots$则得序列$\beta_n=\frac{1}{2^{n+1}}$且$\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0\geqslant t_0$矛盾。故必存在$n_0\geqslant 0$使得：$t_0\geqslant\frac{1}{2^{n_0}+1}$。从而$Q'(0)\geqslant\left(\int_0^{\beta n^0}\psi(z)dz\right)^{\frac{1}{p-1}}=K_0>0$。

则存在$\varepsilon>0$，使得对任意$t\in[0,\varepsilon]$有：$Q(t)\geqslant\frac{K_0}{2}t\geqslant\frac{t_0}{2}t(1-t)$ 而又 $\frac{Q(t)}{t}\geqslant$ $\left[\int_0^{\varepsilon}\int_s^{\beta_{n_0}}\psi(z)dz\right)^{\frac{1}{p-1}}ds\Big]\Big/t$在$[\varepsilon,t_0]$上有正下界，则存在$K_1>0$使得：$Q(t)\geqslant K_1t\geqslant K_1t(1-t)$。

取：$K=\min\left(\frac{K_0}{2},\ K_1\right)>0$，则对任意$t\in[0,t_0]$有：$y(t)\geqslant Kt(1-t)$类似可证当$t>t_0$时：存在$\bar{K}>$使得$\forall t\in[t_0,1]$有：$y(t)\geqslant\bar{K}t(1-t)$。从而取$K^*=\min(K,\bar{K})>0$。则对$\forall t\in[0,1]$有：$y(t)\geqslant K^*t(1-t)$，于是从方程$(4.5)_1^n$和条件(3.3)和(4.4)得：

$$-(\phi_p(y'))'\leqslant g(K^*t(1-t))h(K^*t(1-t))r(t)$$

对$t\geqslant t_0$有：$-(\phi_p(y'))<\int_0^1 g(K^*t(1-t))h(K^*t(1-t))r(t)dt=M_1<\infty$

即有：$|y'|\leqslant M_1^{\frac{1}{p-1}}=M_2$（与$n$无关）

对$t<t_0$有类似结果．以下证明与定理3.1类似．

定理4.5 设f满足(3.2)、(3.3)、(3.4)以及条件：

$$\text{对}\forall K>0\text{有：}\int_0^1 h(Kt(1-t))r(t)dt<\infty\text{且}yg(y)\text{在}(0,\infty)\text{非减} \tag{4.6}$$

则方程(4.3)至少存在一个正解．

证明 仿定理4.4和定理3.3可证．

定理4.6 设f满足(3.2)、(3.3)、(3.4)以及条件：

$$\begin{cases}\text{对任意 } a\in(0,\infty)\ \text{有：}\int_0^a h(u)du<\infty \\ \text{对任意}K>0\ \text{有：}\int_0^1 g(Kt(1-t)r(t)dt<\infty\end{cases} \tag{4.7}$$

则方程(4.3)至少存在一个正解．

证明 仿定理4.4和定理3.2可证

对方程(3.14)对应定理4.1～定理4.3相应定理：

定理4.7 设f满足条件(3.2)、(4.1)、(4.2)以及条件(4.3)、(4.4)，则方程(4.3)至少存在一个正解．

定理4.8 设f满足(3.2)、(3.4)、(4.1)、(4.2)和(4.6)，则方程(4.3)至少存在一个正解

定理4.9 设f满足(3.2)、(3.4)、(4.1)、(4.2)和(4.7)，则方程(4.3)至少存在一个正解．

例1 边值问题：

$$\begin{cases}(\phi_p(y'))'+y^{-\beta}+y^{\alpha}=0 \\ y(0)=y'(1)=0\end{cases}$$

至少存在一个正解$y\in C[0,1]\cap C^1(0,1)$．这里$0<\beta<2$，$0\leqslant\alpha<1$

这里可由定理4.3可得，其中$r(t)=1$，$g(y)=y^{-1}$ 以及 $h(y)=y^{-\beta+1}+y^{\alpha+1}$．显然满足(3.2)、(4.1)、(4.2)．取$\psi(t)=M^{-\beta}$即可满足(3.4)．由$\alpha<1$，(3.10)、(3.11)满足．

例2 边值问题：$\begin{cases}(\phi_p(y'))'+t^{\rho}y^{-\alpha}+t^{\tau}y^{-\beta}=0 & (0<t<1) \\ y(0)=y'(1)=0\end{cases}$

至少存在一个正解．这里$1\leqslant\alpha<2$，$1\leqslant\beta<2$，ρ，$\tau\geqslant0$

这里由定理3.3可得，其中$r(t)=1$，$g(y)=y^{-1}$以及$h(y)=y^{-\alpha+1}+y^{-\beta+1}$．显然满足(3.2)、(3.3)、(3.10)、(3.11)．取$\psi(t)=t^{\rho}M^{-\alpha}+t^{\tau}M^{-\beta}$即可满足(3.4)．

例3 边值问题：

$$\begin{cases}(\phi_p(y'))'+t^{\rho}(1-t)^{\tau}y^{-\beta}+t^{n}(1-t)^{m}y^{-\alpha}=0 & (0<t<1) \\ y(0)=y(1)=0\end{cases}$$

至少存在一个正解．这里$\beta\geqslant2$，$\alpha\geqslant2$．$p=\min(\rho,n)>\beta-2$和$q=\min(\tau,m)>\beta-2$

这里可由定理4.5可得．其中$r(t)=t^{p}(1-t)^{q}$．$g(y)=y^{-1}$ 以及 $h(y)=y^{-\beta+1}+y^{-\alpha+1}$．显然满足(3.2)、(3.3)、(4.6)．取$\psi(t)=t^{\rho}(1-t)^{\tau}M^{-\beta}+t^{n}(1-t)^{m}M^{-\alpha}$满足(3.4)，

参 考 文 献

[1] M. A. Herrero and J. L. Yazquez, On the propagation properties of a nonlinear degenerate parabolic equation, *Comm P. D. E.*, 7 (1982), 1381—1402.

[2] J. R. Esteban and J. L. Vazquez, On the equation of turbulent filtration in one-dimensional porous media, *Nonlinear Anal.*, 10 (1986), 1303—1325.

[3] S. Fucik, J. Necas and V. Soucek, Spectral analysis of nonlinear operators, *Lectures Notes in Math*, 346, Springer, Berlin (1973).

[4] Z. M. Guo, Solvability of some singular nonlinear boundary value problems and existence of positive radial solutions of some nonlinear elliptic problems, *Nonlinear Anal.*, 16(9) (1991), 781—790.

[5] 姜杰，一类奇异的二阶非线性常微分方程边值问题的正解，吉林大学学报，(1) (1992), 47—50.

[6] L. E. Bobisud, DO'regan and W.D. Royaly, Solvability of some nonlinear boundary value problems, *Nonlinear Anal.*, 12(9) (1988), 855—869.

[7] D. O'Regan, Positive solutions to singular and non-singular second order boundary value problems, *J. Math. Anal. Appl.*, 142 (1989), 40—52.

[8] J. A. Gatica, Singular nonlinear boundary value problems for second-order ordinary differential equations, *J. Diff. Eqs.*, 79 (1989), 62—78.

[9] D. O'Regan, Existence of positive solutions to some singular and nonsingular second order boundary value problems, *J. Diff. Eqs.*, 84 (1990), 228—251.

[10] M. Delpino, Melgueta and R. Manasevich, A homotopic deformation along p of a Leary-Schauder degree result and existence for $(|u'|^{p-2}u')'+f(t,u)=0, u(O)=u(T)=0$, $p>1$, *J. Diff. Eqs*, 80 (1989), 1—13.

[11] 杨作东、柴新宽、郭宗明、王元，一类奇异二阶非线性方程两点边值问题解的存在性和唯一性，《中国力学会第五届现代数学和力学学术会议论文集（MMM-V）》，中国矿业大学出版社 (1993), 101—105.

Existence of Positive Solutions for a Class of Singular Two Point Boundary Value Problems of Second Order Nonliear Equation

Yang Zuodong

(Department of Mathematics, Henan Normal University, Xinxiang Henan 453002, R. P. China)

Abstract

In this paper, we establish the existence of pasitive solutions of $(|y'|^{p-2}y')'+f(t,y)=0$ $(p>1)$, $y(0)=y(1)=0$. The function f is allowed to be singular when $y=0$.

Key words singular boundary value problems, nonlinear positive solution, existence