应用数学和力学，第17卷 第4期（1996年4月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

修正Taylor-Galerkin有限元法的构造及其在可压缩流场计算中的应用

朱 刚[1] 沈孟育[1] 刘秋生[1] 王保国[1]

（钱伟长、周哲玮推荐，1994年12月15日收到，1995年3月24日收到修改稿）

摘 要

本文从Taylor-Galerkin有限元法出法，对它作了根本性的改进，构造了修正Taylor-Galerkin算法，并用新、旧两种算法分别对亚、超音速的流场情况作了计算。计算结果表明，在达到同样计算精度的前提下，新方法较之老方法在收敛速度上有明显改进，结果是令人满意的。

关键词 有限元法 亚音速流动 超音速流动

一、引 言

在计算流体力学的发展中，广义有限元法越来越受到人们的重视[1,4,9]。它结合了有限元法与差分法的优点，因而适用于更广泛的流动情况。从T. J. Chung[2]的文章发表以来，广义有限元法已发展成为一个系列，包括Taylor-Galerkin Finite Elements(TGFE)[3], Stream Upwind Petrov-Galerkin Finite Elements (SUPG)[6], Stream Diffusion Method(SDM)[5]。所有这些算法为有限元增加了新的内涵。开辟了更广阔的前景。遗憾的是，国内在这方面工作不多[7,8]。本文对TGFE算法作了一定的改进，并用它研究亚、超音速流场流动情况。

二、修正Taylor-Galerkin法的基本思想

设方程的全量形式为：

$$\varepsilon_i=0 \tag{2.1}$$

按照广义有限元法，得到如下形式的内积：

$$(\hat{w}(\xi),\ E_i)=(\hat{w}(\xi),\ (w_a(x),\ \varepsilon_i))$$
$$=\int_\xi \hat{w}(\xi)\left(\int_\Omega w_a(x)\varepsilon_i d\Omega\right)d\xi=0 \tag{2.2}$$

其中，$w_a(x)$和$\hat{w}(\xi)$分别表示空间和时间的试探函数。又设

1 清华大学工程力学系，北京 100084

$$v_i=\phi_\alpha(x)v_{\alpha i},\quad v_{\alpha i}=\hat{\phi}_m(\xi)v^m_{\alpha i} \tag{2.3}$$

其中$\phi_\alpha(x)$，$\hat{\phi}_m(\xi)$分别表示空间和时间的迹函数。$\xi=t/\Delta t$，α为总体空间编码，m为局部瞬时状态。按Galerkin近似，$w_\alpha(x)=\phi_\alpha(x)$.关于瞬时状态的迹函数，Taylor-Galerkin法中有如下两假设

$$v_{\alpha i}=(1-\xi)v^n_{\alpha i}+\xi v^{n+1}_{\alpha i} \tag{2.4}$$

$$v_{\gamma j}v_{\beta i}=(1-\xi)v^n_{\gamma j}v^n_{\beta i}+\xi v^{n+1}_{\gamma j}v^{n+1}_{\beta i} \tag{2.5}$$

这两个假设同时成立有些牵强。本文舍弃(2.5)假设，而仅以(2.4)假设为基本出发点．这样，相应于(2.5)的表达式即为

$$v_{\gamma j}v_{\beta i}=[\xi v^{n+1}_{\gamma j}+(1-\xi)v^n_{\gamma j}][\xi v^{n+1}_{\beta i}+(1-\xi)v^n_{\beta i}] \tag{2.6}$$

为了与原文献[3]的 Taylor-Galerkin 法的形式作一比较，以对流扩散方程为例，说明其中的差别。方程形式为：

$$\varepsilon_i=\partial v_i/\partial t+v_jv_{i,j}-\nu v_{i,jj}-f_i=0 \tag{2.7}$$

其中，i，j表示1，2，3，$v_{i,j}=\partial v_i/\partial x_j$，$v_{i,jj}=\partial^2 v_i/\partial x_j^2$。

由广义有限元法，有：

$$(\hat{w}(\xi),\ E_i)=(\hat{w}(\xi),\ (w_\alpha(x),\ \varepsilon_i))=0$$

若采用修正Taylor-Galerkin法，对空间区域积分得

$$\int_\xi \hat{w}(\xi)\left[A_{\alpha\beta}\frac{\partial v_{\beta i}}{\partial t}+B_{\alpha\beta\gamma j}v_{\gamma j}v_{\beta i}+K_{\alpha\beta}v_{\beta i}-F_{\alpha i}-G_{\alpha i}\right]d\xi=0 \tag{2.8}$$

其中，取$w_\alpha(x)=\phi_\alpha(x)$时，

$$A_{\alpha\beta}=\int_\Omega\phi_\alpha\phi_\beta d\Omega,\quad B_{\alpha\beta\gamma j}=\int_\Omega\phi_\alpha\phi_{\beta,j}\phi_\gamma d\Omega$$

$$K_{\alpha\beta}=\int_\Omega\nu\phi_{\alpha,j}\phi_{\beta,j}d\Omega,\quad F_{\alpha i}=\int_\Omega\phi_\alpha\phi_\beta d\Omega f_{\beta i},\quad G_{\alpha i}=\int_\Gamma\overset{*}{\phi}_\alpha\overset{*}{\phi}_\beta d\Gamma g_{\beta i}$$

其中$\overset{*}{\phi}_\alpha$，$\overset{*}{\phi}_\beta$依赖于边界，它表示沿边界的 Neumann 边界条件的插值函数。对(2.8)式再积分，并记η，ζ为

$$\eta=\int_\xi\hat{w}(\xi)\xi d\xi\Big/\int_\xi\hat{w}(\xi)d\xi,\quad \zeta=\int_\xi\hat{w}(\xi)\xi^2 d\xi\Big/\int_\xi\hat{w}(\xi)d\xi$$

取$\partial v_{\beta i}/\partial t=(v^{n+1}_{\beta i}-v^n_{\beta i})/\Delta t$，得

$$\begin{aligned}&B_{\alpha\beta\gamma j}\zeta v^{n+1}_{\gamma j}v^{n+1}_{\beta i}+[A_{\alpha\beta}+B_{\alpha\beta\gamma j}\Delta t(\eta-\zeta)v^n_{\gamma j}]v^{n+1}_{\beta i}\\&\quad+\Delta tB_{\alpha\beta\gamma j}(\eta-\zeta)v^{n+1}_{\gamma j}v^n_{\beta i}\\&=\Delta t(F_{\alpha i}+G_{\alpha i})+A_{\alpha\beta}v^n_{\beta i}-K_{\alpha\beta}v^n_{\beta i}(1-\eta)\Delta t\end{aligned} \tag{2.9}$$

而若采用原TGFE法，则为：

$$\begin{aligned}&A_{\alpha\beta}v^{n+1}_{\beta i}+\eta\Delta t(B_{\alpha\beta\gamma j}v^{n+1}_{\gamma j}v^{n+1}_{\beta i}+K_{\alpha\beta}v^{n+1}_{\beta i})-A_{\alpha\beta}v^n_{\beta i}\\&\quad+(1-\eta)\Delta t(B_{\alpha\beta\gamma j}v^n_{\gamma j}+K_{\alpha\beta}v^n_{\beta i})-\Delta t(F_{\alpha i}+G_{\alpha i})=0\end{aligned} \tag{2.10}$$

比较(2.9)、(2.10)两式，可见修正 Taylor-Galerkin 法比原方法在对流扩散方程离散时多出了两项，且系数也有所不同。修正方法能更准确地反映两个时间步之间的关系。在空间精度上，修正方法与原方法相同，仍具有原方法高空间精度的特点，

三、修正TGFE法在可压缩流动上的应用

可压缩流动的Navier-Stokes方程可写为如下形式

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}+\frac{\partial F_j^a}{\partial x_j}=\frac{\partial F_j^v}{\partial x_j} \tag{3.1}$$

其中，$\bar{u}$，F_j^a，F_j^v均为矢量，其形式为

$$\bar{u}=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u_i\\ \rho e\end{bmatrix},\quad F_j^a=\begin{bmatrix}\rho u_j\\ \rho u_i u_j+p\delta_{ij}\\ u_j(\rho e+p)\end{bmatrix},\quad F_j^v=\begin{bmatrix}0\\ \sigma_{ij}\\ u_l\sigma_{lj}+K\partial T/\partial x_j\end{bmatrix} \tag{3.2}$$

这里ρ，p，e，T，K分别表示密度、压力、总能量、温度和传导系数．u_i为速度$\boldsymbol{u}$在x_i方向上的分量．再加上状态方程

$$p=(\nu-1)\rho(e-u_ju_j/2) \tag{3.3a}$$

$$T=p/c_v(\nu-1)\rho=(e-u_ju_j/2)/c_v \tag{3.3b}$$

使(3.1)成为一个封闭系统．此处ν为绝热指数．

$$\nu=c_p/c_v$$

(3.2)中的粘性应力为：

$$\sigma_{ij}=\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\lambda\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}$$

其中，μ为粘性系数，$\lambda=-2\mu/3$。

对应于(3.1)式，两步Taylor-Galerkin法为

$$\left.\begin{aligned}&\bar{u}^{n+1/2}=\bar{u}^n+\frac{\Delta t}{2}\left(-\frac{\partial F_j^a}{\partial x_j}\Big|^n\right)\\ &\bar{u}^{n+1}=\bar{u}^n+\Delta t\left(-\frac{\partial F_j^a}{\partial x_j}\Big|^{n+1/2}+\frac{\partial F_j^v}{\partial x_j}\Big|^n\right)\end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

离散形式为：

$$\left.\begin{aligned}&\int_\Omega P_e\bar{u}_e^{n+1/2}\,d\Omega=\int_\Omega P_e\bar{u}_e^n d\Omega-\frac{\Delta t}{2}\int_\Omega P_e\frac{\partial F_j^a}{\partial x_j}\Big|^n d\Omega\\ &\int_\Omega\phi_a\Delta\bar{u}_n^n d\Omega=\Delta t\int_\Gamma\{F_j^a|^n-F_j^a|^n-F_j^a|^{n+1/2}\}\hat{\phi}_a d\Gamma\\ &\qquad+\Delta t\int_\Omega\frac{\partial\phi_a}{\partial x_j}F_i^a\Big|^{n+1/2}d\Omega-\Delta t\int_\Omega\frac{\partial\phi_a}{\partial x_j}F_i^v\Big|^n d\Omega\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

其中P_e为常单元插值函数，ϕ_a为节点插值函数．而文献[9]中，对应于 Taylor-Galerkin法，(3.1)式离散为

$$\begin{aligned}&A_{\alpha\beta}v_{\beta i}^{n+1}+\eta\Delta t(B_{\alpha\beta\gamma j}v_{\gamma j}^{n+1}v_{\beta i}^{n+1}+K_{\alpha\beta}v_{\beta i}^{n+1})-A_{\alpha\beta}v_{\beta i}^n\\ &\quad+(1-\eta)\Delta t(B_{\alpha\beta\gamma j}v_{\gamma j}^n v_{\beta i}^n+K_{\alpha\beta}v_{\beta i}^n)-\Delta t(F_{\alpha i}+G_{\alpha i})=0\end{aligned} \tag{3.6}$$

而(3.6)式相应于(3.4)式的两步形式为：

$$\left.\begin{aligned}&\bar{u}^{n+1/2}=\bar{u}^n+\frac{\Delta t}{2}\left(-\frac{\partial F_j^a}{\partial x_j}\Big|^n+\frac{\partial F_j^v}{\partial x_j}\Big|^n\right)\\ &\bar{u}^{n+1}=\bar{u}^n+\Delta t\left(-\frac{\partial F_j^a}{\partial x_j}\Big|^{n+1/2}+\frac{\partial F_j^v}{\partial x_j}\Big|^{n+1/2}\right)\end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

可见，(3.4)与(3.7)式有所不同．(3.7)式可看成考虑了减少计算量之后的(3.4)式的变形．

由于(3.6)的出发点为假设(2.5)，而修正TGFE的出发点为(2.6)，即假设

$$v_{\gamma j}v_{\beta i}=[(1-\xi)v^n_{\gamma j}+\xi v^{n+1}_{\gamma j}][(1-\xi)v^n_{\beta i}+\xi v^{n+1}_{\beta i}]$$

$$=(1-\xi)^2v^n_{\gamma j}v^n_{\beta i}+\xi^2v^{n+1}_{\gamma j}v^{n+1}_{\beta i}+(1-\xi)\xi(v^n_{\gamma j}v^{n+1}_{\beta i}+v^{n+1}_{\gamma j}v^n_{\beta i}) \tag{3.8}$$

于是从(3.8)式出发，考虑如下积分

$$\int_\xi\left[A_{\alpha\beta}\frac{\partial v_{\beta i}}{\partial t}+B_{\alpha\beta\gamma j}v_{\gamma j}v_{\beta i}+K_{\alpha\beta}v_{\beta i}-F_{\alpha i}-G_{\alpha i}\right]\hat{w}(\xi)d\xi=0$$

取$\partial v_{\beta i}/\partial t=(v^{n+1}_{\beta i}-v^n_{\beta i})/\Delta t$，将(3.8)代入上式，变换后有

$$A_{\alpha\beta}\frac{v^{n+1}_{\beta i}-v^n_{\beta i}}{\Delta t}\int_\xi\hat{w}(\xi)d\xi+\int_\xi\hat{w}(\xi)(1-2\xi+\xi^2)d\xi B_{\alpha\beta\gamma j}v^n_{\gamma j}v^n_{\beta i}$$

$$+\int_\xi\hat{w}(\xi)\xi^2d\xi B_{\alpha\beta\gamma j}v^{n+1}_{\gamma j}v^{n+1}_{\beta i}+K_{\alpha\beta}\int_\xi\hat{w}(\xi)(1-\xi)d\xi v^n_{\beta i}$$

$$+K_{\alpha\beta}\int_\xi\hat{w}(\xi)\xi d\xi v^{n+1}_{\beta i}+\int_\xi\hat{w}(\xi)(\xi-\xi^2)B_{\alpha\beta\gamma j}v^n_{\gamma j}v^{n+1}_{\beta i}$$

$$+\int_\xi\hat{w}(\xi)(\xi-\xi^2)B_{\alpha\beta\gamma j}v^{n+1}_{\gamma j}v^n_{\beta i}d\xi=0 \tag{3.9}$$

令　$\eta=\int_\xi\hat{w}(\xi)\xi d\xi\Big/\int_\xi\hat{w}(\xi)d\xi$，$\zeta=\int_\xi\hat{w}(\xi)\xi^2d\xi\Big/\int_\xi\hat{w}(\xi)d\xi$

则(3.9)式可写为

$$A_{\alpha\beta}\frac{v^{n+1}_{\beta i}-v^n_{\beta i}}{\Delta t}+(1-2\eta+\zeta)B_{\alpha\beta\gamma j}v^n_{\gamma j}v^n_{\beta i}+\zeta B_{\alpha\beta\gamma j}v^{n+1}_{\gamma j}v^n_{\beta i}$$

$$+K_{\alpha\beta}(1-\eta)v^n_{\beta i}+K_{\alpha\beta}\eta v^{n+1}_{\beta i}+(\eta-\zeta)B_{\alpha\beta\gamma j}(v^n_{\gamma j}v^{n+1}_{\beta i}+v^{n+1}_{\gamma j}v^n_{\beta i})=0$$

进一步，我们有

$$A_{\alpha\beta}v^{n+1}_{\beta i}-A_{\alpha\beta}v^n_{\beta i}+\Delta t(1-2\eta+\zeta)B_{\alpha\beta\gamma j}v^n_{\gamma j}v^n_{\beta i}$$

$$+\Delta t\zeta B_{\alpha\beta\gamma j}v^{n+1}_{\gamma j}v^{n+1}_{\beta i}+\Delta tK_{\alpha\beta}(1-\eta)v^n_{\beta i}$$

$$+\Delta tK_{\alpha\beta}\eta v^{n+1}_{\beta i}+(\eta-\zeta)B_{\alpha\beta\gamma j}(v^{n+1}_{\gamma j}v^n_{\beta i}+v^n_{\gamma j}v^{n+1}_{\beta i})\Delta t=0 \tag{3.10}$$

当取$\hat{w}(\xi)=1$时

$$\eta=1/2,\quad \zeta=1/3 \tag{3.11}$$

(3.10)相应的两步法为：

$$\bar{u}^{n+1/2}=\bar{u}^n+\frac{\Delta t}{2}\zeta\left(-\frac{\partial F^a_j}{\partial x_j}\Big|^n+\frac{\partial F^v_j}{\partial x_j}\Big|^n\right) \tag{3.12a}$$

$$\bar{u}^{n+1}=\bar{u}^n+\Delta t\zeta\left(-\frac{\partial F^a_j}{\partial x_j}\Big|^{n+1/2}+\frac{\partial F^v_j}{\partial x_j}\Big|^{n+\frac{1}{2}}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial F^a_j}{\partial x_j}\Big|^{n+1/4}+\frac{\partial F^a_j}{\partial x_j}\Big|^{n+3/4}\right) \tag{3.12b}$$

其中

$$\frac{\partial F^a_j}{\partial x_j}\Big|^{n+1/4}=\Delta t(\eta-\zeta)B_{\alpha\beta\gamma j}v^n_{\gamma j}v^{n+1}_{\beta i}$$

$$\frac{\partial F^a_j}{\partial x_j}\Big|^{n+3/4}=\Delta t(\eta-\zeta)B_{\alpha\beta\gamma j}v^{n+1}_{\gamma j}v^n_{\beta j}$$

对(3.12)式作Galerkin有限元离散，并将(3.11)式代入，有

$$\int_{\Omega} P_e \bar{u}_e^{n+1/2} d\Omega = \int_{\Omega} P_e \bar{u}_e^n d\Omega - \frac{\Delta t}{3}\int_{\Omega} P_e \frac{\partial F_j^a}{\partial x_j}\Big|^n d\Omega - \frac{\Delta t}{3}\int_{\Omega} P_e \frac{\partial F_j^v}{\partial x_j}\Big|^n d\Omega \tag{3.13a}$$

$$\int_{\Omega} \phi_a \Delta \bar{u}^n d\Omega = \Delta t \int_{\Gamma} \{(F_j^a|^{n} - F_j^a|^n) - F_j^a|^{n+1/2}\}\hat{\phi}_a d\Gamma$$

$$+\Delta t \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_a}{\partial x_j} F_j^a|^{n1/2+} d\Omega - \Delta t \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_a}{\partial x_j} F_j^v|^{n+1/2} d\Omega$$

$$+\Delta t \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_a}{\partial x_j} F_j^a|^{n+1/4} d\Omega + \Delta t \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_a}{\partial x_j} F_j^a|^{n+3/4} d\Omega \tag{3.13b}$$

(3.13)式即为可压缩粘性流动控制方程组(3,1)的两步修正 Taylor-Galerkin 有限元离散式。

实际计算中采用的形式如下：

$$\int_{\Omega} P_e \bar{u}_e^{n+1/2} d\Omega = \int_{\Omega} P_e \bar{u}_e^n d\Omega - \frac{\Delta t}{3}\int_{\Omega} P_e \frac{\partial F_j^a}{\partial x_j}\Big|^n d\Omega \tag{3.14a}$$

$$\int_{\Omega} \phi_a \Delta \bar{u}^n d\Omega = \Delta t \int_{\Gamma} \{(F_j^a|^{n_*} - F_j^a|^n) - F_j^a|^{n+1/2}\}\hat{\phi}_a d\Gamma$$

$$+\Delta t \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_a}{\partial x_j} F_j^a|^{n+1/2} d\Omega - \Delta t \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_a}{\partial x_j} F_j^v|^{n} d\Omega$$

$$+\Delta t \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_a}{\partial x_j} F_j^a|^{n+1/4} d\Omega + \Delta t \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_a}{\partial x_j} F_j^a|^{n+3/4} d\Omega \tag{3.14b}$$

对(3.14)式再加入Lapidus人工粘性[10]

$$\int_{\Omega} \phi_a \bar{u}_{ic}^{n+1} d\Omega = \int_{\Omega} \phi_a \bar{u}_i^{n+1} d\Omega - \Delta t \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(V^{n+1}\frac{\partial u_j^{n+1}}{\partial x_j}\right) d\Omega$$

其中

$$V^{n+1} = c h_e^2 |\partial u_l^{n+1}/\partial x_l|$$

h_e为网格特征长度。由此即可进行一系列计算。

四、算 例 及 结 果

采用修正Taylor-Galerkin法，我们分别计算了亚、超音速流场。

1. 超音速流场

首先计算了[4]中的楔形体绕流，计算所得结果见图1、图2。激波角40°，激波前后压比1:2.32，与[4]的结果完全吻合，采用修正 TGFE，在保证同样精度的情况下，只需用原方法的2/3时间(CPU计算时间)。计算均是在486 $D\times 50$微机上进行的。且网格相同。

2. 亚音速流场

采用本方法，我们又计算了一种在高压电气开关中很典型的结构内部的流动，计算结果见图3、图4。采用修正算法，较之原方法节省了近一半的计算时间。

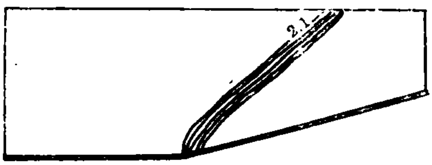

图1　楔形体马赫线分布

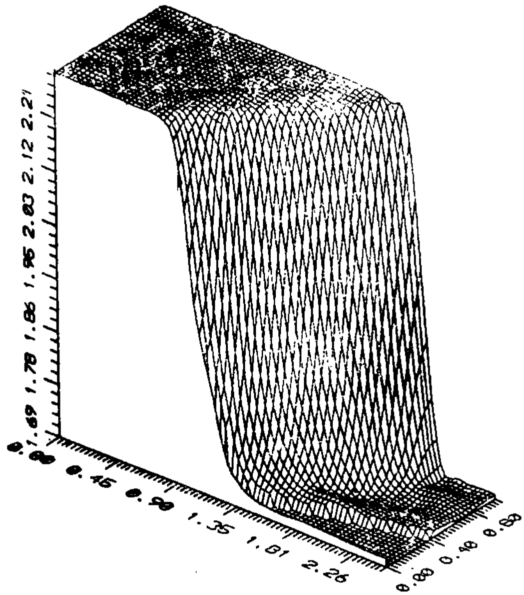

图2　楔形体马赫数数值分布

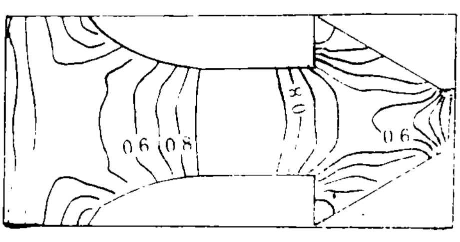

图3　喷管马赫线分布

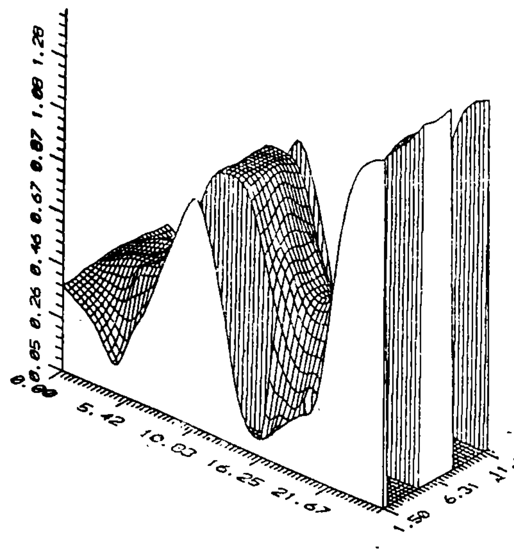

图4　喷管马赫数数值分布

以上两算例，其边界条件的处理，根据[4].由以上算例，我们可以得到以下结论：

（1） 本文对Taylor-Galerkin有限元法的基本假设作了修正，并构造了修正TGFE算法及其相应离散公式．

（2） 利用修正 TGFE 算法，我们计算了两个算例，在保证相同精度的前提下，修正算法较原算法节省约1/3的计算时间，且计算稳定性提高．

（3） 算例结果还证明了，修正 TGFE 对亚、超音速流动均可得到较满意的结果．另外，作者近期完成的其它工作还说明了，将此方法与其它方法结合计算跨音速流场，同样会得到满意的结果[11]．

参 考 文 献

[1] T. J. Oden, *Adaptive Methods for Problems in Solid and Fluid Mechanics*, John Wiley and Sons Ltd., London (1986).

[2] T. J. Chung, *Finite Element Analysis in Fluid Dynamics*, McGraw-Hill Book Co. (1978).

[3] J. Donea and S. Giuliani, Time accurate solution of advection-diffusion problems by finite elements, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **45** (1984).

[4] T. J. Chung, *Finite Elements in Fluid and Heat Transfer*, Krieger Publishing Company, Inc. (1991).

[5] C. Johnson, *Numerical Solutions of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*, Sweden, Studentlitteratur (1987).

[6] T. J. R. Hughes and M. Mallet, A new finite element formulation for computational fluid dynamics: Ⅳ, A discontinuity-capturing operator for multidimensional advective-diffusive systems, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **58** (1986), 329—336.

[7] 朱刚、谷传纲、胡庆康，对Taylor-Galerkin有限元法的一点改进和它的应用，应用数学和力学，**14**(12) (1993), 1115—1120.

[8] 徐国群、张国富，不可压N-S方程组的SUPG有限元数值解，空气动力学学报，**9** (1991).

[9] T. J. Chung, *Numerical Modeling in Combustion*, Taylor & Francis Inc. (1993).

[10] A. Lapidus, A detached shock calculation by second-order finite differences, *Journal of Computational Physics*, **2** (1967), 154—177.

[11] Zhu Gang, Shen Mengyu, Liu Qiusheng and Wang Baoguo, Anisotropic multistage finite elements method for two dimensional viscous transonic flow in turbomachinery, *Acta Mechanica Sinica*, **11** (1) (1995).

Construction of Modified Taylor-Galerkin Finite Elements and Its Application in Compressible Flow Computation

Zhu Gang Shen Mengyu Liu Qiusheng Wang Baoguo

(*Department of Engineering Mechanics, Qinghua University, Beijing* 100084, *P. R. China*)

Abstract

In this paper we begin with Taylor-Galerkin Finite Elements, then improve it completely and finally construct Modified Taylor-Galerkin Finite Elements. Computation is done by two methods to study two kinds of subsonic and supersonic flow field. The results show that the newone is much better than the old one.

Key words finite elements, subsonic flow, supersonic flow