应用数学和力学，第17卷 第4期（1996年4月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

KdV方程的时间谱离散方法

吴声昌[1]　刘小清[1]

（刘慈群推荐，1995年2月22日收到）

摘　要

本文提出了解KdV方程周期边值问题的安全谱离散方法：在时间方向上采用Chebyshev拟谱逼近，在空间方向上采用Fourier Galerkin逼近.谱展开的系数由目标泛函的极小值来确定.同时证明了该方法的收敛性.

关键词　KdV方程　谱方法　Galerkin逼近　拟谱逼近

一、引　言

一般地，KdV方程

$$U_t+\alpha UU_x+U_{xxx}=f$$

的谱方法，在处理时间方向上采用有限差分方法[1]，因而在时间方向上收敛的阶低于在空间x方向上谱离散方法的阶.为了得到整体的高阶收敛，自然希望在时间方向上也采用谱离散方法.文献[2]对时间谱离散方法进行了数值试验.在本文的第二节我们将看到，如果我们只是对方程和初始条件采用常规的谱离散方法，那么由此导出的展开式系数的代数方程组将是超定的.这就启发我们构造一个目标函数，并且通过目标函数的极小来确定展开式的系数.第三节我们将证明安全谱离散方法的收敛性.

二、时间谱离散方法

令

$$I=\{x:0<x<2\pi\},\ T=\{t:-1<t<1\},\ \Omega=I\times T$$

我们考虑下述问题

$$\left.\begin{aligned}&DU\equiv U_t+\alpha UU_x+U_{xxx}=f, && \Omega\text{中}\\ &U(x,\ -1)=\varphi(x), && I\text{中}\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

其中f，φ是x的周期函数，周期为2π，因此

$$U(x,\ t)=U(x+2\pi,\ t),\qquad \forall t\in[-1,\ 1]$$

因为Chebyshev多项式关于权函数

1 中国科学院应用数学研究所，管理，决策与信息系统开放研究实验室，北京 100080

$$\omega(t)=1/\sqrt{1-t^2},\qquad t\in(-1,\ 1)$$

是正交的，我们定义函数$\xi(t)$的加权范数为

$$\|\xi\|_T^2=\int_{-1}^{1}\omega(t)\xi^2(t)dt,\ \|\xi\|_{q,T}^2=\|\xi\|_T^2+\left\|\frac{d\xi}{dt}\right\|_T^2+\cdots+\left\|\frac{d^q\xi}{dt^q}\right\|_T^2$$

我们定义两个有限维空间

$$F_M=\mathrm{Span}\{e^{ikx}:|k|\leqslant M\},\ C_N=\mathrm{Span}\{T_j(t):0\leqslant j\leqslant N\}$$

其中，$T_j(t)$是j阶Chebyshev多项式，同时用P_M记由$L^2(I)$到F_M的正交投影，Π_N记由$C(T)$到C_N的插值算子，即对任意的$\eta(t)\in C(T)$，$\Pi_N\eta\in C_N$，满足

$$\Pi_N\eta(t_j^N)=\eta(t_j^N),\qquad (j=0,\ \cdots,\ N)$$

其中，t_j^N，$j=0,\ 1,\ \cdots,\ N$是Chebyshev多项式$T_N(t)$在区间$[-1,\ 1]$中的极值点，即

$$t_j^N=\cos(j\pi/N),\qquad (j=0,\ \cdots,\ N)$$

按照谱方法的思想，我们自然期望找到

$$u(x,\ t)=\sum_{\substack{0\leqslant j\leqslant N\\ |k|\leqslant M}}u_{jk}T_j(t)e^{ikx}\in C_N\otimes F_M$$

使得

$$(u_t(t_j^N)+\alpha u(t_j^N)u_x(t_j^N)+u_{xxx}(t_j^N),\ v)=(f(t_j^N),\ v)$$
$$\forall v\in F_M,\ 0\leqslant j\leqslant N$$

和

$$(u(-1),\ v)=(\varphi,\ v),\qquad \forall v\in F_M$$

然而，这样的结果将产生一个超定的方程组.

为了确定$\{u_{jk}\}$，我们将构造一个目标泛函$E_{M,N}:C_N\otimes F_M\to\mathbf{R}^+$. 对所有的

$$w\doteq\sum_{\substack{0\leqslant j\leqslant N\\ |k|\leqslant M}}w_{jk}T_j(t)e^{ikx}$$

我们令

$$E_{M,N}(w)=\|w(-1)-P_M\varphi\|_I^2+\frac{\pi}{2N}\sum_{j=0}^{2N}\frac{1}{d_j}\|\mathbf{D}w(t_j^{2N})-P_{2M}f(t_j^{2N})\|_I^2\qquad(2.2)$$

其中，$\{t_j^{2N}\}$是$T_{2N}(t)$的极值点，

$$d_j=\begin{cases}1, & 1\leqslant j\leqslant 2N-1\\ 2, & j=0,\ 2N\end{cases}$$

命题2.1　$E_{M,N}(w)$在$C_N\otimes F_M$中存在极小值.

证明　$E_{M,N}(w)$可看作是由$\{w_{jk}\}$到$E_{M,N}(w)$的一个非负多变量函数映射.

因为

$$E_{M,N}(w)\to+\infty,\qquad 当|w_{jk}|\to+\infty,\qquad \forall j,\ k$$

存在一个正数R，值得对所有的w满足

$$\sum_{\substack{0\leqslant j\leqslant N\\ |k|\leqslant M}}w_{jk}^2>R^2$$

下述不等式成立

$$E_{M,N}(w)>E_{M,N}(o)$$

另一方面，闭球$\bar{B}_R$在欧氏空间$\mathbf{R}^{(2M+1)\times(N+1)}$是紧的，那么$E_{M,N}(w)$将在$\bar{B}_R$中达到它的

极小值。命题证毕。

关于目标函数极小值的数值方法在很多文献中均可找到，例如见文献[4]。

三、收 敛 性

为了导出收敛性定理，我们列出近似理论中的两个结果。

引理3.1[5] 假设函数$\xi(t)$是充分光滑的，对于$0\leqslant q\leqslant s/2$，存在着不依赖于$N$和$\xi$的正常数$c$，使得

$$\|\Pi_N\xi-\xi\|_{q,T}<cN^{2q-s}\|\xi\|_{s,T}$$

引理3.2[6] 假设周期函数$\eta(x)$充分光滑，对于$0\leqslant q\leqslant p$，存在着不依赖于M和η的正常数c，使得

$$\|P_M\eta-\eta\|_{q,I}\leqslant cM^{q-p}|\eta|_{p,I}$$

由上述引理和Sobolev空间的嵌入定理，我们不难得到下面两个推论。

推论3.3 确定$v(x,t)$，且$v(x,t)$充分光滑，对于任意$r>0$和充分大的M，N，我们有

$$\int_{-1}^{1}\omega(t)\|D^{\alpha}(\Pi_N P_M v(t)-v(t))\|_I^2dt=O(M^{-2r}+N^{-2r})$$

其中$|\alpha|\leqslant 2$。

推论3.4 确定$v(x,t)$，且$v(x,t)$充分光滑，我们有下面的估计式

$$\sup_{(x,t)\in\Omega}|\Pi_N P_M v(x,t)-v(x,t)|\leqslant c$$

其中c为正常数。

下面的引理将表明泛函$E_{M,N}(w)$等价于

$$\|w(-1)-P_M\varphi\|_I^2+\int_{-1}^{1}\omega(t)\|\mathbf{D}w(t)-\Pi_{2N}P_{2M}f(t)\|_I^2dt$$

引理3.5[6] 假设$\xi(t)$是一个N阶多项式，那么我们有

$$\int_{-1}^{1}\omega(t)\xi^2(t)dt\leqslant\frac{\pi}{N}\times\sum_{j=0}^{N}\frac{1}{c_j}\xi^2(t_j^N)\leqslant 2\int_{-1}^{1}\omega(t)\xi^2(t)dt$$

其中

$$c_j=\begin{cases}1, & 1\leqslant j\leqslant N-1\\ 2, & j=0,\ N\end{cases}$$

引理3.6(Gronwall不等式)[7] 假设$v(t)\geqslant 0$在$[t_0,T]$上连续，如果存在着常数c和L，使得

$$v(t)\leqslant c+L\int_{t_0}^{t}v(s)ds,\qquad \forall t\in[t_0,T]$$

那么下面的Gronwall不等式成立

$$v(t)\leqslant c\exp[L(t-t_0)]$$

定理3.7 假设(2.1)的解$U(x,t)$充分光滑，且令$u\in C_N\otimes F_M$为$E_{M,N}(w)$在$C_N\otimes F_M$中的极小解。对于任意$r>0$和充分大的M，N，我们有下述估计式

$$\|u(t)-U(t)\|_I\doteq O(M^{-r}+N^{-r}),\qquad \forall t\in[-1,1]$$

证明 令$\Delta u=u-U$，由(2.1)我们有

$$\Delta u_t+\alpha(uu_x-UU_x)+\Delta u_{xxx}=\mathbf{D}u-f$$

$$\Delta u_t = \mathrm{D}u - f - \alpha(uu_x - UU_x) - \Delta u_{xxx}$$
$$= \mathrm{D}u - f - \alpha(U\Delta u_x + U_x\Delta u + \Delta u\Delta u_x) - \Delta u_{xxx}$$

在上式两边，同时用Δu作内积，我们得到

$$(\Delta u_t(t),\ \Delta u(t)) = (\mathrm{D}u(t) - f(t),\ \Delta u(t)) - \alpha[(U(t)\Delta u_x(t),\ \Delta u(t)) + (U_x(t)\Delta u(t),\ \Delta u(t)) + (\Delta u(t)\Delta u_x(t),\ \Delta u(t))] - (\Delta u_{xxx}(t),\ \Delta u(t)) \tag{3.1}$$

因为$U(t)$和$\Delta u(t)$以2π为周期，由分部积分容易得到

$$(\Delta u_{xx}(t),\ \Delta u(t)) = -|\Delta u(t)|^2_{1,I},\quad (\Delta u(t)\Delta u_x(t),\ \Delta u(t)) = 0$$

$$(\Delta u_{xxx}(t),\ \Delta u(t)) = 0,\quad (U(t)\Delta u_x(t),\ \Delta u(t)) = -\frac{1}{2}(U_x(t)\Delta u(t),\ \Delta u(t))$$

于是(3.1)可化简为

$$(\Delta u_t(t),\ \Delta u(t)) = (\mathrm{D}u(t) - f(t),\ \Delta u(t)) - \frac{\alpha}{2}(U_x(t)\Delta u(t),\ \Delta u(t))$$

假设$\sup\limits_{(x,t)\in\Omega}|U_x(x,\ t)| = K_2$。由上式可得

$$(\Delta u_t(t),\Delta u(t)) \leqslant \frac{1}{2}(\|\mathrm{D}u(t) - f(t)\|^2_I + \|\Delta u(t)\|^2_I) + \frac{\alpha K_2}{2}\|\Delta u(t)\|^2_I$$

$$\equiv \frac{1}{2}\|\mathrm{D}u(t) - f(t)\|^2_I + \frac{\beta}{2}\|\Delta u(t)\|^2_I \tag{3.2}$$

积分(3.2)，同时注意到$\omega(t) > 1$，$t\in(-1,\ 1)$，我们得到

$$\|\Delta u(t)\|^2_I \leqslant \|\Delta u(-1)\|^2_I + \int_{-1}^{1}\omega(t)\|\mathrm{D}u(t) - f(t)\|^2_I dt + \beta\int_{-1}^{t}\|\Delta u(t)\|^2_I dt$$

由引理3.6，我们有

$$\|\Delta u(t)\|^2_I \leqslant (\|\Delta u(-1)\|^2_I + \int_{-1}^{1}\omega(t)\|\mathrm{D}u(t) - f(t)\|^2_I dt)e^{2\beta} \tag{3.3}$$

因为

$$\|\Delta u(-1)\|^2_I = \|u(-1) - \varphi\|^2_I \leqslant 2(\|u(-1) - P_M\varphi\|^2_I + \|P_M\varphi - \varphi\|^2_I)$$

$$\int_{-1}^{1}\omega(t)\|\mathrm{D}u(t) - f(t)\|^2_I dt \leqslant 2\left(\int_{-1}^{1}(\omega)\|\mathrm{D}u(t) - \Pi_{2N}P_{2M}f(t)\|^2_I dt + \int_{-1}^{1}\omega(t)\|\Pi_{2N}P_{2M}f(t) - f(t)\|^2_I dt\right)$$

考虑到引理3.1和推论3.3，我们有下面的估计式

$$\|\Delta u(-1)\|^2_I + \int_{-1}^{1}\omega(t)\|\mathrm{D}u(t) - f(t)\|^2_I dt$$
$$\leqslant 2(\|u(-1) - P_M\varphi\|^2_I + \int_{-1}^{1}\omega(t)\|\mathrm{D}u(t) - \Pi_{2N}P_{2M}f(t)\|^2_I dt) + O(M^{-2r} + N^{-2r}) \tag{3.4}$$

令$u^* = \Pi_N P_M U$，我们得到下面一系列的估计式

$$\|u(-1) - P_M\varphi\|^2_I + \int_{-1}^{1}\omega(t)\|\mathrm{D}u(t) - \Pi_{2N}P_{2M}f(t)\|^2_I dt$$
$$\leqslant E_{M,N}(u)$$
$$\leqslant E_{M,N}(u^*)$$

$$= \|P_M U(-1) - P_M \varphi\|_I^2 - \frac{\pi}{2N} \times \sum_{j=0}^{2N} \frac{1}{d_j} \|\mathrm{D}u^*(t_j^{2N}) - P_{2M} f(t_j^{2N})\|_I^2$$

$$\leqslant 2\int_{-1}^{1} \omega(t) \|\mathrm{D}u^*(t) - \Pi_{2N} P_{2M} f(t)\|_I^2 dt$$

$$\leqslant 4\left(\int_{-1}^{1} \omega(t) \|\mathrm{D}u^*(t) - f(t)\|_I^2 dt + \int_{-1}^{1} \omega(t) \|\Pi_{2N} P_{2M} f(t) - f(t)\|_I^2 dt\right)$$

$$= 4\int_{-1}^{1} \omega(t) \|\mathrm{D}u^*(t) - f(t)\|_I^2 dt + O(M^{-2r} + N^{-2r}) \tag{3.5}$$

其中

$$\int_{-1}^{1} \omega(t) \|\mathrm{D}u^*(t) - f(t)\|_I^2 dt$$

$$= \int_{-1}^{1} \omega(t) \|\mathrm{D}u^*(t) - \mathrm{D}U(t)\|_I^2 dt$$

$$\leqslant 3\left(\int_{-1}^{1} \omega(t) \left\|\frac{\partial}{\partial t}(u^*(t) - U(t))\right\|_I^2 dt + \int_{-1}^{1} \omega(t) \left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^*(t) - U(t))\right\|_I^2 dt\right.$$

$$\left. + \alpha\int_{-1}^{1} \omega(t) \|u^*(t) u_x^*(t) - U(t) U_x(t)\|_I^2 dt\right)$$

$$= 3\int_{-1}^{1} \omega(t) \|u^*(t) u_x^*(t) - U(t) U_x(t)\|_I^2 dt + O(M^{-2r} + N^{-2r}) \tag{3.6}$$

(3.6)中的项

$$\int_{-1}^{1} \omega(t) \|u^*(t) u_x^*(t) - U(t) U_x(t)\|_I^2 dt$$

是由于KdV方程中的非线性项产生的.

$$\int_{-1}^{1} \omega(t) \|u^*(t) u_x^*(t) - U(t) U_x(t)\|_I^2 dt$$

$$\leqslant 3\left(\int_{-1}^{1} \omega(t) \|U(t)(u_x^*(t) - U_x(t))\|_I^2 dt + \int_{-1}^{1} \omega(t) \|U_x(t)(u^*(t) - U(t))\|_I^2 dt\right.$$

$$\left. + \int_{-1}^{1} \omega(t) \|(u^*(t) - U(t))(u_x^*(t) - U_x(t))\|_I^2 dt\right)$$

假设 $\sup\limits_{(x,t)\in\Omega} |U(x, t)| = K_1$, 同时由推论3.4, 我们假设 $\sup\limits_{(x,t)\in\Omega} |u^*(x, t) - U(x, t)| = K_3$, 最后我们得到

$$\int_{-1}^{1} \omega(t) \|u^*(t) u_x^*(t) - U(t) U_x(t)\|_I^2 dt$$

$$\leqslant 3\left(K_1^2 \int_{-1}^{1} \omega(t) \|u_x^*(t) - U_x(t)\|_I^2 dt + K_2^2 \int_{-1}^{1} \omega(t) \|u^*(t) - U(t)\|_I^2 dt\right.$$

$$\left. + K_3^2 \int_{-1}^{1} \omega(t) \|u_x^*(t) - U_x(t)\|_I^2 dt\right)$$

$$= O(M^{-2r} + N^{-2r}) \tag{3.7}$$

由(3.3)～(3.7), 定理3.7得证, 因而证明了KdV方程时间谱离散方法的收敛性.

参　考　文　献

[1] 蒋伯诚等，《计算物理中的谱方法》，湖南科技出版社 (1989).

[2] G. Ierley etc., Spectral methods in time for a class of parabolic partial differential equations, *J. Comp. Phys.*, 102 (1992), 88—97.

[3] R. K. Dodd, *Solitons and Nonlinear Wave Equations*, Academic Press, London (1982).

[4] 王德人，《非线性方程组解法与最优化方法》，人民教育出版社 (1979).

[5] R. G. Voigt, etc., *Spectral Method for PDE*. SIAM Philadelpia (1984).

[6] C. Canuto, etc., Analysis of the combinated finite element and Fourier interpolation, *Numer. Math.*, 39 (1982), 205—220.

[7] 李大潜等，《非线性发展方程》，科学出版社 (1989).

[8] P. Dutt, Spactral methods for initial boundary value problems——an alternative approach, *SIAM J. Numer. Anal.*, 27(4) (1990), 885—903.

[9] D. Gottlieb, Numerical analysis of spectral method, *CBMS-NSF, Regional Conference Series in Applied Math.*, 26 (1977).

[10] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academia Press (1975).

Spectral Method in Time for KdV Equations

Wu Shengchang　　Liu Xiaoqing

(Institute of Applied Mathematics, Academia Sinica, Laboratory of Management Decison and Information Systems, Academia Sinica, Beijing 100080, *P. R. China)*

Abstract

This paper presents a fully spectral discretization method for solving KdV equations with periodic boundary conditions: Chebyshev pseudospectral approximation in the time direction and Fourier Galerkin approximation in the spatial direction. The expansion coefficients are determined by minimizing an object functional. Rapid convergence of the method is proved.

Key words KdV equation, spectral method, Galerkin approximation, pseudospectral approximation