

基于形变晶粒增殖过程的 弹塑性本构模型*

何宗彦¹

(钱伟长推荐, 1994年11月10日收到)

摘 要

本文根据多晶金属变形的细观过程特征, 将形变晶粒分为三类, 提出塑性形变晶粒增殖的概念, 并由此导出较为简洁的弹塑性本构关系, 能对若干实验结果给出合理的解释, 表明材料的宏观屈服、率相关和加工硬化等现象与形变晶粒演化的动力学过程密切相关。

关键词 多晶体 弹塑性变形 本构关系 屈服 加工硬化 位错

一、前 言

近几十年来, 多晶金属的本构关系一直是固体力学和材料科学中十分活跃的研究课题。许多学者力图从材料变形的细观物理机制出发, 将单晶的变形推广到多晶, 导出相应的弹塑性本构关系。尤其是Lin的工作^[1]将晶体简化为若干立方晶粒组成的立方体, 用等效体力方法和单向拉伸的应力应变关系确定复杂加载下多晶体的本构关系, 避开了对后继屈服面变化规律的复杂描述, 开创了物理塑性理论研究中的新方向。但这一方法所需的大量数值计算不便于在实际中应用。

最近梁乃刚等以三维空间随机分布的组件模拟多晶金属的贮能和耗能机制, 以所有方向组件的内力总效应构成宏观应力, 导出了显式的弹塑性本构方程^[2,3], 为本构关系研究提供了新的思路和方法。徐桢等还考虑了材料的率相关性, 用加上弹性项的Bingham体作为一维组件(纤维构元), 得到反映复杂加载条件下的三维率相关本构方程^[4]。这些模型中, 组件的力学响应特性不能由模型导出, 具体函数需用简单变形状态下的实验数据拟合, 并假定函数可分为弹性变形, 过渡变形与饱和变形等线性段, 再利用随动强化模型给出卸载和反向加载时的力响应函数。

本文根据多晶金属变形的细观特征, 认为金属的宏观力学响应不仅与晶粒自身的变形特点而且与整个试件中晶粒的动态演化过程密切相关。为此将晶粒分为三类, 提出形变晶粒增殖的思想并由此导出较为简洁的多晶金属弹塑性本构方程, 能对若干实验结果给出定性或定量的解释。

*国家自然科学基金重大项目资助。

1 清华大学工程力学系, 北京 100084。

二、模型描述

考察试件中某一晶粒的变形过程：初始时刻变形为零，随外加载荷增加，出现弹性变形，一定程度后，滑移系开动，立即产生较大的塑性变形。随后由于位错之间和位错与缺陷之间的交互作用导致位错可动性降低，继续变形需要更大的应力，晶粒于是进入加工硬化阶段。

根据晶粒所处的不同变形状态，将其分为三类，并用机械元件模型描述：Ⅰ型晶粒处于弹性变形阶段，相当于一支弹簧（图1a）。Ⅱ型晶粒的滑移系已经开动处于弹塑性变形阶段，用串联上弹簧的 Bingham 体描述（图1(b)）。Ⅲ型晶粒处于加工硬化阶段，滑移系开动且有晶格的弹性变形，用前述 Bingham 体串上一塑性元件描述，如图1(c)所示。

推导本构关系之前，需讨论下列问题：

1. 各型晶粒的动力学演化方程

对多晶金属微应变过程的实验观察表明^[5]：塑性变形总是从应力集中部位上取向最有利的触发晶粒(trigger grains)^[6]开始的。初始时滑移带只有1~2条并局限于单个触发晶粒内部，随应力增大，更多的晶粒能够克服邻域晶粒的约束而变形，晶内滑移带数渐增，如相邻晶粒的滑移系交角较小，则滑移将穿过晶界传播。微应变后期，滑移带继续增加并明显向多个邻域晶粒传播，形成塑性变形晶粒相联结的“屈服”区，该区在试件中扩展，其前沿即为宏观可见的Luders带结构^[6]。

据此，可认为Ⅱ型晶粒是通过增殖机制而逐渐增多的。这种机制的实质是：中心晶粒发生塑性变形必须邻域晶粒的协调。换言之，中心晶粒滑移系的开动将促使邻域晶粒随之变形，它或者表现为滑移系直接穿过晶界^[5]或者是压迫晶界上的凸缘向邻域晶粒内发出位错^[6]来实现。

由大量个体组成的系统通过个体增殖(multi-plication)的方式不可逆地长大，其速度有较强非线性的过程，有许多不同于一般不可逆过程的特点，可考虑用于多晶金属的细观变形过程之中，为此先假定：

- 1) 增殖率定义为单位时间内平均一个个体的增殖数，其下限为1，上限为平均邻域个体数即平均一个晶粒所具有的表面数。
- 2) 增殖空间（试件体积或总晶粒数）有限，试件细观结构各向同性，三向尺寸相差不太大。
- 3) 增殖能力保持期（个体具有增殖能力的时期）可持续到全部晶粒都产生塑性变形为止。
- 4) 增殖时滞（从个体滑移系开动到促使邻域个体开始变形的时间）近似为零。
- 5) 增殖阻尼（如晶格摩擦力）和增殖驱动力（使位错突破晶界或促使晶界放出位错的

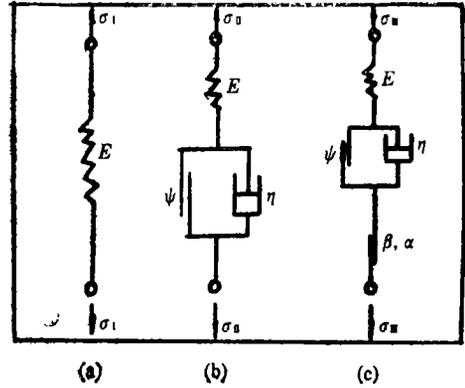


图1 三类晶粒模型

作用力)保持常数。

6) 单相单系统增殖, 即试件中只有一种晶粒形成的单个增殖系统。

上述条件下如果先不考虑Ⅲ型晶粒的存在, 则Ⅰ型晶粒的增殖速度 $\frac{dN'_I}{dt}$ 是Ⅰ型晶粒数 N'_I 的函数, 考虑到增殖空间的有限, 我们假定

$$\frac{dN'_I}{dt} = b(N'_I) \left(1 - \frac{N'_I}{n}\right) \quad (2.1)$$

积分后得到不考虑Ⅲ型晶粒存在时的Ⅰ型晶粒动力学演化方程:

$$N'_I = \frac{n}{1 + \exp[a - bt]} \quad (2.2)$$

因 $n = N'_I$ 时, $\frac{dN'_I}{dt} = 0$, 所以 n 为原Ⅰ型晶粒总数, 或试件晶粒总数, t 为形变时间。

精确的实验表明: 从弹性到塑性变形的应力-应变曲线光滑而无斜率间断, 只要加载就会有塑性变形。所以假定初始时刻已有Ⅰ型晶粒(触发晶粒)存在, 其数目为:

$$N'_I = N'_I|_{t=0} = \frac{n}{1 + \exp[a]} \quad (2.3)$$

故 $a = \ln\left(\frac{1}{C} - 1\right)$ (2.4)

它是与初始Ⅰ型晶粒数相关的参数, 其中 $C = \frac{N'_I}{n}$ 称为初始Ⅰ型晶粒比。由(2.1)式知:

$$b\left(1 - \frac{N'_I}{n}\right) = \frac{1}{N'_I} \frac{dN'_I}{dt} \quad (2.5)$$

所以 $b\left(1 - \frac{N'_I}{n}\right)$ 是Ⅰ型晶粒的实际增殖率, 它随 N'_I 的增大而减小, 体现了增殖空间有限的影响, 如果空间无限, 则 $b\left(1 - \frac{N'_I}{n}\right)\Big|_{n \rightarrow \infty} = b$, 可见 b 是不考虑空间影响时的增殖率。

假定 b 在增殖过程中保持常数且只与金属的类型相关。滑移系多的, 如 FCC 和 BCC 金属, 晶粒变形只需较少的领域晶粒协调, 因此 b 较小。反之, 密排六方金属的 b 则较大, 故设:

$$b = b_0 \bar{m} + b_1 \quad (2.6)$$

其中 \bar{m} 为平均 Schmid 因子的倒数^[6], b_0 和 b_1 为由实验确定的材料常数。

再假定一个Ⅰ型晶粒转化为Ⅱ型晶粒后由于滑移系开动产生一定的塑性变形, 再经近似相同的变形时间 Δt , 转为Ⅲ型晶粒, 故Ⅲ型晶粒的演化方程为:

$$N_{II} = \frac{n}{1 + \exp[a - b(t - \Delta t)]} = \frac{n}{1 + \exp[a' - bt]} \quad (2.7)$$

由(2.2)、(2.4)和(2.7)式知, 在 Δt 不太大, 初始Ⅰ型晶粒较少, 因而 a 较大的情况下

$$\frac{N_{II}}{N'_I} = \frac{1 + \exp[a - bt]}{1 + \exp[a' - bt]} \approx \exp[a - a'] = \exp[-b\Delta t] = K^{-1} \quad (2.8)$$

所以, 为简单起见, 假定原Ⅰ型晶粒中有 $\frac{1}{K}$ 将转为Ⅲ型 (K 近似为一不变常数), 则易知 t 时刻试件中三种晶粒的数目分别为:

$$\left. \begin{aligned} N_{\text{I}} &= n - N_{\text{I}} - N_{\text{I}} = n \left(1 - \frac{1}{1 + \exp[a - bt]} \right) \\ N_{\text{I}} &= \left(1 - \frac{1}{K} \right) \frac{n}{1 + \exp[a - bt]} \\ N_{\text{I}} &= \frac{n}{K(1 + \exp[a - bt])} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

从实际情况出发还需考虑增殖驱动力的作用。驱动力越大，I，II型晶粒的增殖越容易。用两种方法对此进行描述：

方法1：假定驱动力 σ_l 与增殖速度成正比，(2.1)式改为：

$$\frac{dN_{\text{I}}'}{dt} = (\sigma_l b) N_{\text{I}}' \left(1 - \frac{N_{\text{I}}'}{n} \right) \quad (2.10)$$

故
$$N_{\text{I}}' = \frac{n}{1 + \exp[a - bt]} \quad (2.11)$$

其中 $b' = \sigma_l b$ 。显然驱动力直接影响增殖率的大小。

方法2：假定驱动力与不考虑II型存在时的I型晶粒数成正比，(2.2)式改为：

$$N_{\text{I}}' = \frac{\lambda n \sigma_l}{1 + \exp[a - b't]} \quad (2.12)$$

于是得到：

$$\left. \begin{aligned} N_{\text{I}} &= n \left(1 - \frac{1}{1 + \exp[a - b't]} \right) \\ N_{\text{I}} &= \left(1 - \frac{1}{K} \right) \frac{n}{1 + \exp[a - b't]} \\ N_{\text{I}} &= \frac{n}{K(1 + \exp[a - b't])} \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

和

$$\left. \begin{aligned} N_{\text{I}} &= n - \frac{n'}{1 + \exp[a - b't]} \\ N_{\text{I}} &= \left(1 - \frac{1}{K} \right) \frac{n'}{1 + \exp[a - b't]} \\ N_{\text{I}} &= \frac{n'}{K(1 + \exp[a - b't])} \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

其中 $b' = \sigma_l (b_0 m + b_1)$ ， $n' = \lambda n \sigma_l$ ， λ 为比例系数。根据II型晶粒增殖过程分析，认为滑移带穿过晶界或促使晶界向邻域晶内发射位错是因为位错在晶界前塞积形成的应力集中达到某一临界值 σ_l ，如以此为增殖驱动力，按照Cottrell的观点^[17]应为

$$\sigma_l = \sigma + (\sigma - \sigma_0) \left(\frac{d}{2l} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.15)$$

其中 σ 为外加应力， d 为晶粒平均直径， l 为位错塞积群头部与晶界的距离， σ_0 为晶格摩擦力。

2. 各型晶粒的应力-形变关系

假定试件的某一横截面上全为I型晶粒时，它们对宏观伸长的贡献为 $\frac{\sigma d}{E}$ ，则一个I型

晶粒的贡献就近似为

$$\Delta Y_I = \frac{\sigma d}{E} \frac{1}{S'} \tag{2.16}$$

其中 E 为弹性模量, S' 为横截面平均晶粒数.

类似地, 一个 I 型晶粒的贡献近似为

$$\Delta Y_{II} = \frac{\sigma d}{ES'} + \frac{\psi d}{S'} \tag{2.17}$$

其中 ψ 是一个材料常数. 在这儿我们假定: 每一个 I 型晶粒在形变时间 Δt 内都产生近似相等的塑性变形 ψd , 而在准静态加载条件下粘性效应已被忽略.

众所周知, 多晶金属与单晶金属不同, 它没有加工硬化的第一阶段. 所以我们假定每一个 III 型晶粒只出现第二阶段加工硬化, 即线性硬化规律^[11]. 于是一个 III 型晶粒对宏观伸长的贡献为

$$\Delta Y_{III} = \frac{\sigma d}{ES'} + \frac{\psi d}{S'_0} + \frac{(\alpha t + \beta) d}{S'} \tag{2.18}$$

如果外加应力呈单调增加, 则 ΔY_{III} 应为

$$\Delta Y_{III} = \frac{\sigma d}{ES'} + \frac{\psi d}{S'} + \frac{(2\sigma + \beta) d}{S'} \tag{2.19}$$

其中 α 和 β 为材料常数.

3. 各型晶粒的分布及连结方式

实验表明, 位于试件肩部等应力集中处的触发晶粒最先由 I 型转为 II 型, 经过短时增殖后形成 II 型晶粒相连的屈服区沿试件长度方向逐渐扩展, 其前沿 Luders 带与拉伸轴呈 45° (图 2a), 所以三类晶粒的分布近似如图 2b 所示. 参照文献[2]的方法将三维空间中随机取向的各型晶粒作为微杆件, 则某方向上所有微杆件的变形能可表为该方向上内应力对伸长率的积分. 因此随机分布的晶粒可处理成沿三维空间各方向均匀分布的一维晶粒组集体.

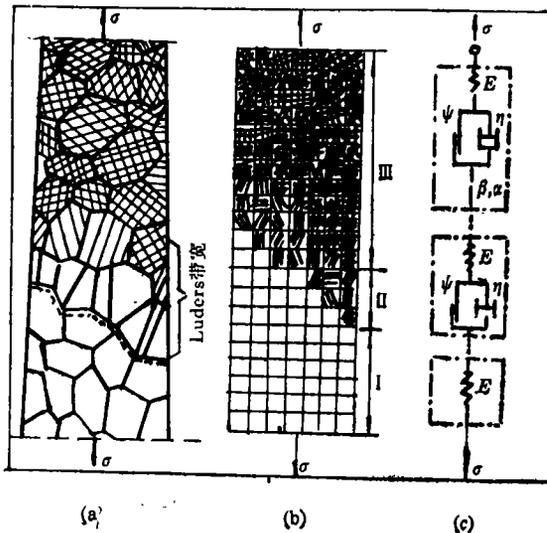


图2 晶粒分布与连结方式

于是试件的宏观形变可近似为各方向组集体形变的均值, 具有该均值形变的组集体由三部分串联而成 (图 2c), 代表三型晶粒对宏观形变贡献的总和:

$$Q = P_{\text{I}} \Delta Y_{\text{I}} N_{\text{I}} + [P_{\text{I}} \Delta Y_{\text{I}} + P_{\text{I}} (\Delta Y_{\text{I}} - \Delta Y_{\text{I}})] N_{\text{I}} \\ + [P_{\text{I}} \Delta Y_{\text{I}} + P_{\text{I}} (\Delta Y_{\text{I}} - \Delta Y_{\text{I}}) + P_{\text{I}} (\Delta Y_{\text{I}} - \Delta Y_{\text{I}})] N_{\text{I}} \quad (2.20)$$

其中 P_{I} , P_{I} 和 P_{I} 为均匀化系数, 认为弹性变形与晶粒取向无关, 取 $P_{\text{I}} = 1$. 主滑移系取向与最大剪应力方向接近的 I, II 型晶粒, 其塑性变形较大, 取向不利的晶粒, 变形较小, 如 (2.17) ~ (2.20) 式中的 ψ , α 和 β 为最大变形晶粒的参数, 则 P_{I} 和 P_{I} 必小于 1. 如设塑性变形只与某晶粒主滑移面上的分切应力成比例, 则对半球面上各方向均匀分布的一维晶粒组集体积分求均值, 得到 $P_{\text{I}} = P_{\text{I}} = \frac{2}{\pi}$.

三、本构关系推导及讨论

单轴拉伸情况下, 设夹头速度为 v , 夹头位移 H 为拉伸机弹性形变 P 和试件形变 Q 之和,

$$\text{即} \quad H = vt = P + Q = \frac{\sigma S}{F} + Q \quad (3.1)$$

其中 t 为变形时间, S 为试件横截面积, σ 为拉应力, F 为拉伸机弹性常数. 设试件长为 L , 则有

$$n = \frac{LS'}{d} \quad (3.2)$$

由 (2.14) ~ (2.18), (2.20) ~ (3.2) 式, 能够得到:

$$vt = \frac{\sigma S}{F} + \frac{\sigma L}{E} + \frac{\lambda P_{\text{I}} \psi \sigma_{\text{I}} L}{1 + \exp[a - bt]} + \frac{\lambda P_{\text{I}} (at + \beta) \sigma_{\text{I}} L}{K(1 + \exp[a - bt])} \quad (3.3)$$

整理得到:

$$\sigma = \frac{vt(1 + \exp[a - bt]) + \sigma_0 \left(\frac{d}{2l}\right)^{\frac{1}{2}} [P_{\text{I}} \psi + K^{-1} P_{\text{I}} (at + \beta)] L \cdot \lambda}{\left(\frac{S}{F} + \frac{L}{E}\right) (1 + \exp[a - bt]) + \left[1 + \left(\frac{d}{2l}\right)^{\frac{1}{2}}\right] [P_{\text{I}} \psi + K^{-1} P_{\text{I}} (at + \beta)] L \cdot \lambda} \quad (3.4)$$

设 $l \ll d$, 故 $\left(\frac{2l}{d}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 0$, 如拉伸机和试件刚度很大, 则 $\left(\frac{S}{F}\right) \left(\frac{2l}{d}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 0$ 和

$\frac{L}{E} \left(\frac{2l}{d}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 0$, 上式简化为:

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{v}{\left[1 + \left(\frac{d}{2l}\right)^{\frac{1}{2}}\right] L \lambda} \cdot \frac{1 + \exp[a - bt]}{P_{\text{I}} \psi + K^{-1} P_{\text{I}} (at + \beta)} \quad (3.5)$$

采用 (2.19) 代替 (2.18) 式, 同样简化, 得到非显式的本构关系:

$$\sigma^2 + C_1 \sigma = C_3 (1 + \exp[a - bt]) t + C_2 \quad (3.6)$$

其中 $C_1 = \frac{K \psi P_{\text{I}}}{\alpha P_{\text{I}}} - \frac{\beta}{\alpha} - \sigma_0$, $C_2 = \left(1 + \frac{\psi K P_{\text{I}}}{\alpha P_{\text{I}}}\right) \sigma_0$, $C_3 = \frac{K v}{\alpha P_{\text{I}} \left[1 + \left(\frac{d}{2l}\right)^{\frac{1}{2}}\right] L \cdot \lambda}$

用 (2.13) 式代替 (2.14) 式, 由 (2.15) ~ (2.19), (2.20) ~ (3.2) 式, 得到

$$vt = \sigma \left(\frac{S}{F} + \frac{L}{E}\right) + \frac{\psi L + K^{-1} (at + \beta)}{1 + \exp\left\{a - \left[\left(\sigma + (\sigma - \sigma_0) \left(\frac{d}{2l}\right)^{\frac{1}{2}}\right) (b_0 \bar{m} + b_1) t\right]\right\}} \quad (3.7)$$

如同样忽略拉伸机和试件的弹性变形, 则可得到显式的本构关系:

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{(2l)^{\frac{1}{2}}}{d^{1/2}(b_0\bar{m} + b_1)t} \ln \left[\frac{e^{a\sigma t}}{\psi L + K^{-1}(\alpha t + \beta) - \sigma t} \right] \quad (3.8)$$

如用 (2.19) 式代替 (2.18) 式, 则得到:

$$\sigma t = \sigma \left(\frac{S}{F} + \frac{L}{E} \right) + \frac{\psi L + K^{-1}(\alpha\sigma + \beta)}{1 + \exp \left\{ a - \left[\sigma + (\sigma - \sigma_0) \left(\frac{d}{2l} \right)^{\frac{1}{2}} \right] (b_0\bar{m} + b_1)t \right\}} \quad (3.9)$$

忽略弹性变形得到:

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{(2l)^{1/2}}{d^{1/2}(b_0\bar{m} + b_1)t} \ln \left[\frac{e^{a\sigma t}}{\psi L + K^{-1}(\alpha\sigma + \beta) - \sigma t} \right] \quad (3.10)$$

上述推导得到的是应力-形变时间 ($\sigma-t$) 关系式, 不难改写为应力-应变 ($\sigma-\epsilon$) 关系或应力-位移 ($\sigma-P$) 关系, 例如类似于 (2.1) 和 (2.18) 式, 设

$$\frac{dN}{de} = bN_{\mathbf{I}} \left(1 - \frac{N}{n} \right) \quad (3.11)$$

和
$$\Delta Y_{\mathbf{I}} = \frac{\sigma d}{ES'} + \frac{\psi d}{S'} + \frac{(\alpha\epsilon + \beta)d}{S'} \quad (3.12)$$

其余条件不变, 按 (3.5) 式同样的推导得到显式的本构方程:

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{(1 + \exp[a - bt])e}{\left[1 + \left(\frac{d}{2l} \right)^{\frac{1}{2}} \right] [P_{\mathbf{I}}\psi + K^{-1}P_{\mathbf{I}}(\alpha\epsilon + \beta)]\lambda} \quad (3.13)$$

实际上, 等速加载情况下, $\sigma-t$, $\sigma-\epsilon$, 和 $\sigma-P$ 关系曲线有相同的形状特征. 现讨论如下:

因为单晶第二阶段的加工硬化率远大于第一阶段, 所以前述各式中 α 和 β 值较小, 由 (2.8) 式知, 只要 $\Delta t \neq 0$, 必有 $K^{-1} < 1$ 及 $P_{\mathbf{I}} < 1$. 所以变形过程前期 t 不是太大时, \mathbf{I} 型晶粒对塑性变形的贡献很小, 加工硬化效应还不显著, 如果忽略不计, 前述本构关系可进一步简化以利讨论.

如方程 (3.5) 可简化为:

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{v}{\lambda LP_{\mathbf{I}}\psi [1 + (d/2l)^{1/2}]} (1 + \exp[a - bt])t \quad (3.14)$$

易证当 $t = t_p = \frac{2}{b}$ 时, 上式表示的 $\sigma-t$ 曲线具有拐点, 根据对曲线各点斜率的分析知: 当 $a < 2$ 时, $\sigma-t$ 曲线呈单调增形式, 能描述连续过渡型屈服 (图3(a)), 当 $a = 2$ 时, 除拐点斜率为零外, 其余各点斜率均为正. 曲线呈图3(d)所示屈服, 常见于中碳钢的情况^[9]. 当 $a > 2$ 时, 将出现 σ 的迭落, 形成上、下屈服应力, 如图3(c)所示. 由 (3.14) 式, 令 $\frac{d\sigma}{dt} = 0$, 当 t 较小时可近似求得上、下屈服应力表达式及屈服发生时间:

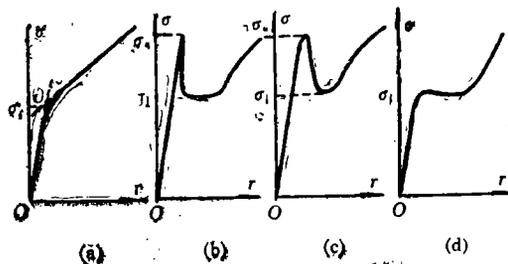


图3 典型屈服模式

$$\sigma_L^* = \sigma_0 + \frac{v}{\lambda L P_1 \psi [1 + (d/2l)^{1/2}]} \cdot \frac{1 - e^{-a} \mp C_4}{b e^{-a}} [1 + \exp[a - e^a (1 \mp C_4) + 1]]$$

$$t_L^* = \frac{1 - e^{-a} \mp C_4}{b e^{-a}} \quad (3.15)$$

其中 $C_4 = (1 - 4e^{-a} - e^{-2a})^{1/2}$.

根据上述方程, 在讨论各种参数影响的基础上可对若干屈服现象给出定性和定量的分析.

先考虑参数 a , 它与初始 I 型晶粒比 c 相关, 是试件加工状态的表征参数. 根据 $\frac{\partial \sigma_u}{\partial a} > \frac{\partial \sigma_L}{\partial a} > 0$ 可知, 随 a 的增大, 屈服应力差将迅速增大, $\sigma-t$ 曲线趋于陡峭. 图 4(a) 为数值计算结果, 参数取值如下: $\sigma_0 = 50 \text{MPa}$, $d = 5 \times 10^{-5} \text{m}$, $v = 10^{-5} \text{m/s}$, $L = 0.15 \text{m}$, $m = 3$, $b_0 = \frac{2}{3}$,

$$b_1 = 1, P_1 = \frac{2}{\pi}, \psi = 2 \times 10^{-2}, \lambda = 3.7\pi \times 10^{-10} (\text{Pa})^{-1}.$$

精心加工的试件此粗糙试件的屈服应力高^[9], 充分消除应力集中的试件可得到很高的 $\frac{\sigma_u - \sigma_L}{\sigma_L}$ 值^[10], 都因为加工状态良好, 细观结构均匀, 初始 I 型晶粒比很小, a 值较大. 而预应变处理使屈服应力差减小甚至消失^[9]的原因则在于预应变使正式拉伸时的初始 I 型晶粒比大幅度提高. 同理, $\alpha\text{-Fe}$ 试件慢拉超过 σ_u 再快速拉伸得到明显的均匀屈服而不是非均匀屈服, 也可用 a 值的改变进行解释.

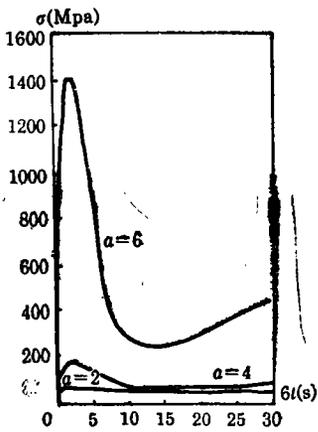
拉伸速度 v 的影响如图 4(b) 所示, 由 $\frac{\partial t_u}{\partial v} = \frac{\partial t_L}{\partial v} = 0$ 和 $\frac{\partial \sigma_u}{\partial v} > \frac{\partial \sigma_L}{\partial v} > 0$ 可知: v 的增大使屈服应力及其差值迅速增大, 这也与实验事实相符^[11]. 图 4(c) 显示出晶粒直径的影响, 根据 $\frac{\partial \sigma_u}{\partial d} < \frac{\partial \sigma_L}{\partial d} < 0$ 和 $\frac{\partial t_u}{\partial d} = \frac{\partial t_L}{\partial d} = 0$ 可知随 d 增大, 屈服应力及其差值都将减小, 许多文献的实验^[11] 支持这一结果, 此外在很宽的直径范围内 ($1\mu\text{m} - 0.5\text{mm}$), 上、下屈服应力均满足 Hall-Petch 关系^[6]:

$$\sigma = \sigma_0 + k_L d^{-1/2} \quad (3.16)$$

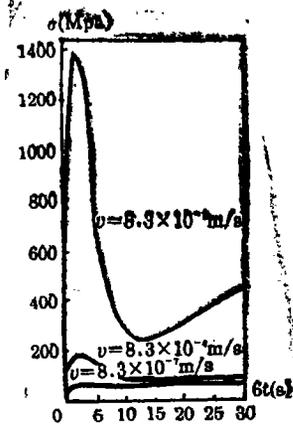
其中 k_L 为 Petch 斜率. 但当 d 趋于零时, 由 (3.14) 算出的 σ_u 和 σ_L 却不会趋于无穷. 所以更为合理. 生产中常用平整机对钢板预加压以消除屈服时 Luders 带对表面质量的影响, 晶粒直径越小, $\Delta\sigma = \sigma_u - \sigma_L$ 越大, 因此所需压下率必然越大^[9]. 图 4(d) 给出了参数 m 的影响. 可以看出, 各参数对 σ_u 的影响比对 σ_L 的影响要大得多, 所以同一材料测得的 σ_L 数据比 σ_u 的更为集中, 因而人们总是以 σ_L 作为屈服应力, 其原因即在于此.

由 (3.14) 还可看出, 试件具有尺寸效应, 标距短的小试件的确应比长试件有更高的屈服应力^[9]. 如要考虑试件形状的影响, 则需对晶粒的演化方程作修改, 如试件呈长条薄板状时, I 型晶粒的三维增殖将很快转为一维. 由此推导出的 $\sigma-t$ 方程显示在上屈服应力出现之后接着出现较长的屈服平台, 这与实验^[11] 也是一致的.

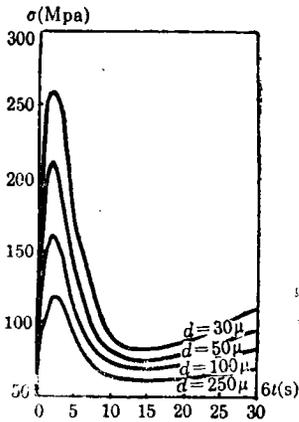
如果 I 型晶粒是从多个应力集中处开始增殖 (多系统增殖), 则可能形成若干屈服区域或数条 Luders 带, 它们相遇时必然相互影响, 使增殖速率下降, 表现为 $\sigma-t$ 曲线上的波动, 形成图 3(b) 所示的非均匀屈服. 其它屈服模式也能被预测.



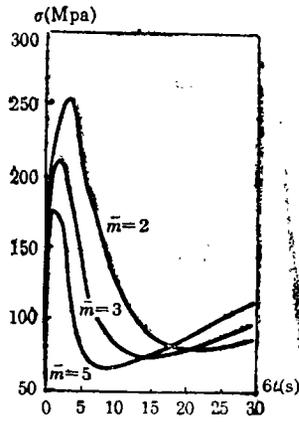
(a)



(b)



(c)



(d)

图4 主要参数对屈服应力的影响

晶粒的动力学演化方程可由实验进行验证, 根据 (2.12) 式推得任一时刻 I 型晶粒 (不考虑 II 型) 与总晶粒数之比:

$$\frac{N'_I}{n} = \frac{\lambda \left[\sigma + (\sigma - \sigma_0) \left(\frac{d}{2l} \right)^{\frac{1}{2}} \right]}{1 + \exp[a - bt]} \quad (3.17)$$

用 (3.14) 式计算出 σ 和 t 的相应值, 代入上式, 得到 $\frac{N'_I}{n}$, d 和 σ 之间的关系曲线, 如图5所示, 与文献[5]的实验数据有较好的一致。

上述屈服模型能够解释以往非均匀屈服和均匀屈服模型难以解释的实验现象, 一定程度上克服了前者不能给出动力学方程, 后者不能考虑晶粒尺寸效应等不足, 可看作两类模型的综合。

作者认为, 多晶金属的宏观屈服不仅与晶内位错的运动而且与形变晶粒演化的动力学过程密切相关。比如采用 (3.14) 式表示的屈服模型, 只要 a 大于临界值2或初始 I 型晶粒比小于临界值11.9%, 就必然出现宏观应力的下降。

类似地, 本构方程 (3.4), (3.6)~(3.10) 和 (3.13) 均可简化后作同样讨论, 结果相近, 但一些特征参数不同。如根据 (3.8) 式的计算使宏观应力下降的临界 a 值为1.44, 临界 I 型

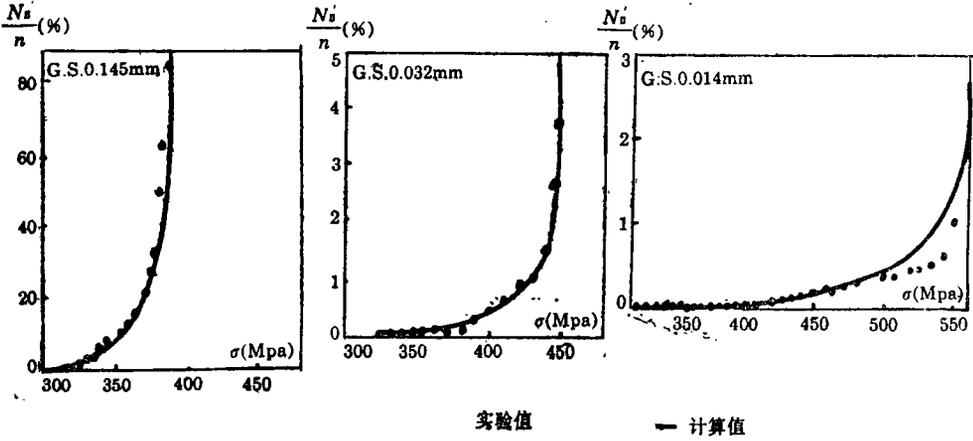


图5 不同晶粒直径下的 $\sigma-N_I/n$ 关系

晶粒比为19%。计算表明，假定增殖驱动力 σ_e 与增殖速度 $\frac{dN_I}{dt}$ 或者与Ⅱ型晶粒数 N_I （不考虑Ⅲ型）成正比，得到的结果定性上是一致的，定量上前者更为合理。例如拉伸速度和屈服应力的关系，由(3.5)式得到：

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \ln V} = B_1 V \tag{3.18}$$

由(3.8)式得到：
$$\frac{\partial \sigma}{\partial \ln V} = \frac{B_2}{B_3 - tV} \tag{3.19}$$

由(3.6)式得到：
$$\frac{\partial \sigma}{\partial \ln V} = \frac{B_4 V}{2[B_4 V + B_5]^{1/2}} \tag{3.20}$$

其中 $B_1 \sim B_5$ 为常数。对照文献[11]的实验结果(图6)可以看出(3.19)式最接近实际。

当 $t > t_L$ 时， $\sigma-t$ 曲线将单调上升。采用(3.6)式更为适当，由于 t 较大该式可简化为

$$\left(\sigma + \frac{C_1}{2}\right)^2 = C_3 t + \frac{C_1^2}{4} + C_2 \tag{3.21}$$

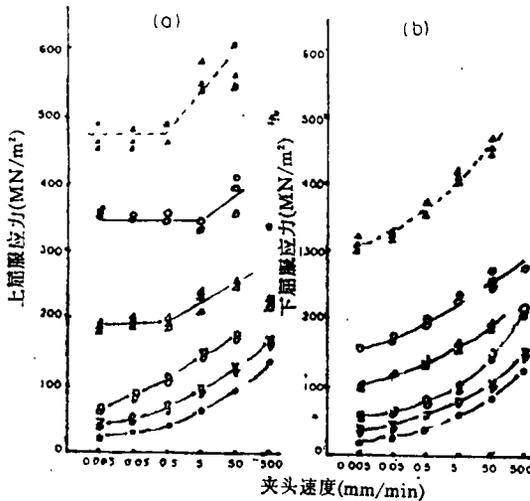


图6 夹头速度与屈服应力的关系

上述 σ 和 t 间的幂函数关系与多晶金属的加工硬化特征完全一致。

四、结 论

1. 金属材料形变过程中, 晶粒所处的变形状态各不相同, 可分为三种类型。各型晶粒数量的变化有确定的动力学演化特征。
2. 试件中塑性变形的范围总是从局部开始扩大, 可看作是Ⅱ型晶粒(屈服晶粒)通过位错塞积突破晶界或促使晶界发生位错而不断增殖的过程。
3. 根据各型晶粒数目演化的动态方程和应力—形变关系用统计平均方法处理各型晶粒的联结方式能得到较为简洁的弹塑性本构关系。
4. 通过对材料初始状态、晶粒直径、加载速度、试件尺寸和形状等参数影响的讨论, 用上述本构模型能对多晶金属的宏观变形现象给出较合理的解释, 与部分文献的实验结果基本吻合。
5. 材料的某些力学性质, 如宏观屈服, 率相关及加工硬化等不仅取决于单个晶粒的静态特性, 还与整个晶粒系统的动力学演化过程相关。

参 考 文 献

- [1] T.H. Lin, A physical theory of elasticity and creep, *ASME J. Engng. Mat. and Tech.*, 106 (1984), 290—294.
- [2] 梁乃刚、程品三, 多晶金属材料的三维组集式弹塑性本构模型, *力学学报*, 22(6) (1990), 680—687.
- [3] N.G. Liang and P.G. Bergan, A multi-dimensional composite model for plastic continua under polyaxial loading condition, *Acta Mechanica Sinica*, 6(4) (1990), 357—364.
- [4] 徐桢、梁乃刚, 《一个三维弹塑性本构模型、塑性力学和细观力学文集》(王自强、徐秉业、黄筑平编), 北京大学出版社, 北京 (1993), 20—30.
- [5] 周邦新, 3%Si-Fe合金屈服前的微应变研究, *金属学报*, 19(1) (1983), A31—39.
- [6] 哈宽富, 《金属力学性质的微观理论》, 科学出版社, 北京 (1981), 415—451.
- [7] 何宗彦、黄克智, 多晶金属屈服的非线性不可逆增殖模型, *金属学报*, 31(3) (1995), 97—104.
- [8] A.H. Cottrell, Theory of brittle fracture in steel and similar metals, *Trans. AIME*, 212 (1958), 192.
- [9] 赖祖涵, 《金属的晶体缺陷与力学性质》, 冶金工业出版社, 北京 (1988), 193—216.
- [10] M.M. Hutchison, High upper yield points in mild steel, *J. Iron Steel Inst.*, 186 (1957), 431.
- [11] H. Fujita and S. Miyazaki, Lüders deformation in polycrystalline Iron, *Acta Met.*, 26 (1978), 1273.

Elastic-Plastic Constitutive Models Based on the Multiplication Processes of Deformed Grains

He Zongyan

(Dept. of Engin. Mechanics, Qinghua University, Beijing 100084, P.R.China)

Abstract

According to the characteristics of micro-deformation of polycrystalline metal, the author divides grains into three kinds and proposes a new conception of deformed grains' multiplication, from which some explicit elastic-plastic constitutive equations can be deduced and some experimental results can be explained quantitatively. It shows that the macro-yield, rate-correlativity, work hardening and other phenomena are all closely related to the kinetic process of grains' deformation.

Key words polycrystal, elastic-plastic deformation, constitutive relation, yield