

# 一种非定常振荡流的稳定性分析\*

王发民<sup>1</sup> 赵烈<sup>1</sup> 于欣<sup>1</sup>

(卡荫贵推荐, 1995年9月2日收到)

## 摘 要

本文分析了一种非定常振荡的不稳定性问题。其特点是, 应用偏微分方程特征理论以及 O-S 方程特征值的展开, 求解扰动波的相函数而不是预先给定扰动波的波动形式。本文研究平面 Poiseuille 流与其垂向振荡流的组合流动系统。对于连续振荡源导致的波包演化, 该系统存在不稳定性。

**关键词** Charpsit 方法 相函数 Pfaffian 方程

## 一、引 言

本文研究在上平板有一运动截面的二维槽道流动, 该截面在磁力作用下做周期性上下振动。这样的流动被广泛应用于医学工程中的人工供氧系统。这种通道流由两部分组成: 一是由压力梯度驱动的平面 Poiseuille 流而另一部分则为类似流经二维压力轴承的振荡流动。

这种通道流跟描述两平板间距的函数  $h(X, T)$  有关。如果用  $H(T)$  表示运动截面的振荡则  $h(X, T)$  可以视为  $H(T)$  在全区域的一种延拓。  $h(X, T)$  与运动截面之比是一小量  $O(10^{-4})$ , 基于这一事实, 本文采用窄缝近似。

关于流动稳定性的大多数研究只是涉及平行剪切流, 采用的方法是先给定扰动波的波动形式, 如  $\exp[i(ax - ct)]$ , 然后确定特征值  $\alpha$  及  $c$ , 本文研究的流动是时间和两个空间坐标的函数, 因此, 上述方法是不适用的, 需要一种新的稳定性分析方法。

因为通道流依赖于变量  $T, X$  及  $\eta$ , 那么, 稳定性方程的系数必定是  $T, X$  及  $\eta$  的函数, 显然, 这组方程不存在  $T, X$  及  $\eta$  的指数型解。为此, 假定扰动波具有以下形式。

$$A(X, T) \exp\left[\frac{i}{\delta} \Theta(X, T)\right] [\Phi_0(\eta, T) + \delta \Phi_1(\eta, T) + \dots] \quad (1.1)$$

此处  $X$  及  $\eta$  分别为平行与垂直平板的无量纲坐标,  $T$  为无量纲时间。

在第二节中, 我们从 N-S 方程出发, 采用窄缝近似得出通道流的基本特征。然后, 在第三节, 采用 Charpsit 方法, 导出扰动波的相函数  $\Theta(X, T)$  所满足的微分方程。从而, 该流动的稳定性问题归结为寻求偏微分方程解的问题。同时, 应用 Forsyth 理论讨论了方程的适定性并给出了它的通解。最后, 本文求出连续振动源引起的扰动波的初值问题的解并讨论了该系统的不稳定性。

\* 1993年6月20日收到初稿。

<sup>1</sup> 中国科学院力学所, 北京 100080。

## 二、通道流基本特征

### 2.1 控制方程

我们考虑不可压缩流体通过图1所示系统, 设运动截面的长度为  $2b$ , 两平板间的间隙为  $2a$ , 取下平板上正对运动截面中点处为坐标原点,  $x$  轴平行于壁面而与壁面垂直的方向为  $y$  轴, 相应的速度分量为  $u$  和  $v$ , 压力为  $p$ , 用  $t$  表示时间,  $\psi$  表示流函数, 则流动的控制方程为:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial z} = \nu \nabla^2 \xi \quad (2.1)$$

$$\text{式中 } \xi = -\nabla^2 \psi \quad (2.2)$$

$\nu$  表示流体的运动粘性系数。

我们选  $U_0$  和  $b$  为无量纲化速度和长度的特征量, 并且定义下列无量纲变量:

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{U_0 t}{b}, \quad \tau = \frac{U_0 t}{a} = \frac{T}{\delta}, \quad \delta = \frac{a}{b} \\ X &= \frac{x}{b}, \quad \xi = \frac{x}{a} = \frac{X}{\delta}, \quad \eta = \frac{z}{ah(X, T)} \quad \text{和} \quad \Psi = \frac{\psi}{bU_0} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

式中  $\delta$  量小量级 ( $10^{-4}$ ) 参数, 由流体运动方程得

$$R = \frac{bU_0}{\nu}, \quad R_m = \frac{aU_0}{\nu} = \delta R \quad (2.4)$$

$R$  是雷诺数,  $R_m$  是流体惯性的一个度量, 在润滑理论中称为修正雷诺数,  $\delta$  及  $R_m$  皆为小量。将(2.3)定义的无量纲变量代入流体运动方程(2.1), 我们得下面含有两个小参数  $\delta$  及  $R_m$  的方程:

$$\left( \frac{\partial}{\partial T} - \delta \eta \frac{h_T}{h} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \nabla^2 \Psi + \frac{1}{h} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \nabla^2 \Psi - \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \xi} \Psi \frac{\partial}{\partial \eta} \nabla^2 \Psi = R^{-1} \nabla^4 \Psi \quad (2.5)$$

$$\text{式中 } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \quad h_T = \frac{\partial h}{\partial T} \quad (2.6 \sim 2.7)$$

其对应的边界条件是:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial X} = 0 \quad (\text{当 } \eta = 0) \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial X} = -2h_T \quad (\text{当 } \eta = 2) \quad (2.9)$$

$$\text{且 } \Psi = \Psi(X, \eta, T, \tau, \delta, R_m) \quad (2.10)$$

### 2.2 基本流动

由上面的分析可以看出, 流函数  $\psi$  不仅是变量  $X, \xi, \eta$  和  $T$  的函数, 而且与参数  $\delta$  和  $R_m$  有关。这就启示我们寻找下面形式的逼近解, 将流函数展开成  $\delta$  及  $R_m$  的幂级数找出(2.5)式的渐近解, 对于层流未扰动流场, 有

$$\Psi_B = \Psi_{B00} + \delta \Psi_{B10} + R_m \Psi_{B01} + \dots \quad (2.11)$$

此处  $\psi_{Bij}$  是  $X, \eta, \tau$  及  $T$  的函数。

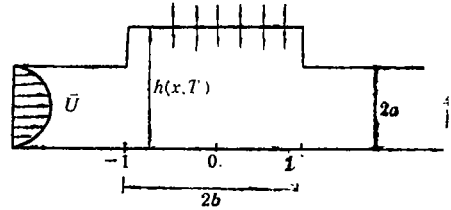


图1 人工供氧系统示意图

将展开式(2.11)代入方程(2.5), 并且归并 $\delta$ 和 $R_m$ 的同幂次项, 可以得到一组序列方程, 其首次逼近式为:

$$\left(\frac{\partial}{\partial T} + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \eta} \Psi_{B00} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \xi} \Psi_{B00} \frac{\partial}{\partial \eta}\right) \nabla^2 \Psi_{B00} = R^{-1} \nabla^4 \Psi_{B00} \quad (2.12)$$

忽略对流项得:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right)^2 \Psi_{B00} = 0 \quad (2.13)$$

而 $\psi_{B00}$ 需满足边界条件(2.8)及(2.9). 若通过该系统的流动由两部分构成, 一个是流体通过压力轴承的运动, 它的作用象弹簧加滴漏壶一样, 另一个是平面Poiseuille流. 我们令

$$\Psi_{B00} = X V_0(\eta, T) + \frac{3}{2} R_B \left(\eta^2 - \frac{1}{3} \eta^3\right) \quad (2.14)$$

式中  $R_B$  表示平面Poiseuille流雷诺数. 将(2.14)代入方程(2.13), 我们求得未知函数

$$V_0 = -\frac{3}{2} \left(\eta^2 - \frac{1}{3} \eta^3\right) h_T \quad (2.15)$$

层流运动的速度分量为:

$$U_B = -\frac{3}{2} (X h_T - R_B) U(\eta) \quad (2.16)$$

$$V_B = -\frac{3b}{2} \delta \left(\eta^2 - \frac{1}{3} \eta^3 \eta^8\right) h_T \quad (2.17)$$

式中  $U(\eta) = 2\eta - \eta^2$ . 如果令 $\eta = 1 + y$ , 则 $U$ 可以变成平面Poiseuille速度 $U(y) = 1 - y^2$ .

流场的压力分布则由下面的方程求得<sup>[3]</sup>

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} U_B \quad (2.18)$$

式中  $\rho$  表示流体密度,  $x$  和  $y$  是有量纲的坐标变量. 方程(2.18)在润滑理论中称为雷诺方程<sup>[3]</sup>. 将 $U_B$ 代入(2.18)积分得

$$p = -\frac{3b^2 \rho \nu U_0}{a^2 h^3} \left(\frac{X^2 h_T}{2} - R_B X + p_a\right) \quad (2.19)$$

$p_a$  是由 $p$ 在 $x = \pm 1$ 处的连续性决定的常数. 同时以上推导还说明雷诺方程(2.18)是Navier-Stokes方程的首次逼近. 我们谈振荡截面的运动速度是下列函数对 $T$ 的导数.

$$h(X, T) = 1 + K(X) H(T) \quad (2.20)$$

由于运动截面的运动垂直于槽道的壁面, 函数 $K(X)$ 必须满足关系式

$$K(X) = \begin{cases} a \text{ (constant)} & (\text{当 } |X| < 1) \\ 0 & (\text{当 } |X| > 1) \end{cases} \quad (2.21)$$

$$\text{及 } \lim_{X \rightarrow 1^+} \frac{dK}{dX} = 0, \lim_{X \rightarrow 1^-} \frac{dK}{dX} = 0, \lim_{X \rightarrow -1^+} \frac{dK}{dX} = 0, \lim_{X \rightarrow -1^-} \frac{dK}{dX} = 0 \quad (2.22)$$

$K(x)$ 在 $x = \pm 1$ 处间断, 然而它的导数在整个区域连续. 同时, 假定运动截面在初始时刻, 与上平面在同一位置, 即 $H(0) = 0$ .

### 三、流动稳定性分析

#### 3.1 扰动波方程

$$\Psi = \Psi_B + \Psi' \quad (3.1)$$

式中  $\Psi_B$  是层流通道的流函数,  $\Psi'$  是小扰动的扰动波.

将(3.1)代入方程(2.5), 得 $\psi'$ 所满足的方程

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} - \delta \eta \frac{h_T}{h} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \nabla^2 \Psi' + \frac{1}{h} \frac{3}{2} U(\eta) (-X h_T + R_B) \delta \frac{\partial}{\partial X} \nabla^2 \Psi' \\ & + \frac{1}{h^3} [ (U' \eta h_T + X h_{T X}) + O(\delta^2) ] \frac{\partial}{\partial \eta} \Psi' - \frac{\delta}{h} \left[ -\frac{3}{2} \left( \eta^2 - \frac{1}{3} \eta^3 \right) h_T \right. \\ & \left. - \frac{3}{2} \frac{h_X}{h} (2\eta - \eta^2) (-X h_T + R_B) \right] \frac{\partial}{\partial \eta} \nabla^2 \Psi' - \frac{1}{h} \delta \frac{\partial}{\partial X} \nabla^2 \Psi' \\ & \cdot \left[ \frac{3}{2} \frac{1}{h^2} U_{\eta\eta} (-X h_T + R_B) + O(\delta^2) \right] = R^{-1} \nabla^4 \Psi' \end{aligned} \quad (3.2)$$

设 $\psi'$ 为一具有相函数 $\Theta(X, T)$ , 沿 $x$ 轴方向传播, 随时间 $T$ 增长(或衰减)的非线性波系, 而且依据“窄缝逼近理论”, 设它与运动截面到下平面的距离是可比的. 这样, 我们在下面分析中, 将寻找如下形式的解.

$$A(X, T) \exp \left[ \frac{i}{\delta} \Theta(X, T) \right] [ \Phi_0(\eta T) + \delta \Phi_1(\eta T) + \dots ] \quad (3.3)$$

式中  $A(X, T)$  是相关振幅,  $\phi_i$  为依赖变量 $\eta$ 和 $T$ 的振幅函数.

将(3.3)代入(3.2)得到含参数 $\Theta$ 及 $h$ 的导数的常微分方程序列, 其首次逼近式为:

$$\begin{aligned} i \Theta_T \left( \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \Theta_X^2 \right) \Phi_0 + \frac{3i}{2h} U(\eta) (-X h_T + R_B) \Theta_X \left( \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \Theta_X^2 \right) \Phi_0 \\ - \frac{3i}{2h^3} U_{\eta\eta} (-X h_T + R_B) \Theta_X \Phi_0 = \frac{1}{R} \left( \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \Theta_X^2 \right)^2 \Phi_0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

即

$$\begin{aligned} \left[ U(\eta) - \frac{2}{3} \frac{\Theta_T h}{(X h_T - R_B) \Theta_X} \right] \left( \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - h^2 \Theta_X^2 \right) \Phi_0 - U_{\eta\eta} \Phi_0 \\ = \left[ \frac{3i}{2} R h (-X h_T + R_B) \Theta_X \right]^{-1} \left( \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - h^2 \Theta_X^2 \right)^2 \Phi_0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\text{如果令 } \frac{2}{3} \frac{\Theta_T h}{(X h_T - R_B) \Theta_X} = c \quad (3.6a)$$

$$h^2 \Theta_X^2 = a^2 \quad (3.6b)$$

$$\frac{3}{2} R h (-X h_T + R_B) \Theta_X = a R' \quad (3.6c)$$

则方程(3.5)与平面Poiseuille流Orr-Sommerfeld方程相同. 其边界条件为:

$$\Phi_0(0) = \Phi_0'(0) = \Phi_0(1) = \Phi_0'(1) = 0 \quad (3.7)$$

四阶常微分方程(3.5)和边界条件(3.7)构成一特征关系式

$$F \left[ h^2 \Theta_X^2, \frac{3}{2} R h (-X h_T + R_B) \Theta_X, -\frac{2}{3} \frac{\Theta_T h}{(-X h_T + R_B) \Theta_X} \right] = 0 \quad (3.8)$$

而且函数 $F$ 与Orr-Sommerfeld特征关系式

$$F(a^2, aR, c) = 0 \quad (3.9)$$

是同一的. 对于未知函数 $\Theta(X, T)$ 和 $h(X, T)$ 而言, 方程(3.8)是一个一阶非线性偏微分方程. 下面我们将讨论它的解.

### 3.2 Charpsit方程及解的适定性

现在我们讨论用Charpsit方法求解包含一未知函数 $F$ 的方程(3.8)的数学问题. 为此令 $\Theta_x = p$ ,  $\Theta_T = q$ , 则(3.5)可以写成下面的一般形式:

$$F\left[h^2 p^2, \frac{3}{2}Rh(-Xh_T+R)p, \frac{2}{3}\frac{qh}{(Xh_T-R_B)p}\right]=0 \quad (3.10)$$

其特征方程(Charpsit' E. Q.)是<sup>(4)</sup>

$$\begin{aligned} & \frac{dx}{2h^2 p F_1 + \frac{3}{2}Rh(-Xh_T+R_B)F_2 - \frac{2}{3}\frac{qh}{(Xh_T-R_B)p^2}F_3} \\ &= \frac{dT}{\frac{2}{3}\frac{h}{(Xh_T-R_B)p}F_3} = \frac{d\Theta}{2h^2 p F_1 + \frac{3}{2}Rh(-Xh_T+R_B)pF_2} \\ &= \frac{-dp}{C(X,T,h,p,q)} = \frac{-dq}{D(X,T,h,p,q)} \end{aligned} \quad (3.11)$$

式中  $F_1, F_2$  和  $F_3$  分别表示  $F$  对特征参数  $a^2$ ,  $aR$  和  $c$  的导数, 且分母中的函数  $C(X, T, h, p, q)$  和  $D(X, T, h, p, q)$  分别为:

$$\begin{aligned} C(X, T, h, p, q) &= 2hh_x p^2 F_1 + \frac{3}{2}[h(-Xh_{xT} - h_T) - Xh_x h_T + R_B h_x] p F_2 \\ &+ \frac{2q}{3p} \left[ \frac{h_T}{Xh_T - R_B} - \frac{h(Xh_{xT} - h_T)}{(Xh_T - R_B)^2} \right] F_3 \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} D(X, T, h, p, q) &= 2hh_x p^2 F_1 + \frac{3}{2}pR(h_T^2 X + h_T R_B - Xhh_{TT}) F_2 \\ &+ \frac{2q}{3p} \left[ \frac{h_T}{Xh_T - R_B} - \frac{hXh_{TT}}{(Xh_T - R_B)^2} \right] F_3 \end{aligned} \quad (3.13)$$

经线性组合, 得(3.11)的等价方程:

$$\begin{aligned} & \frac{dx}{2h^2 p F_1 + \frac{3}{2}Rh(-Xh_T+R_B)F_2 - \frac{2}{3}\frac{qh}{(Xh_T-R_B)p^2}F_3} \\ &= \frac{dT}{\frac{2}{3}\frac{h}{(Xh_T-R_B)p}F_3} = \frac{d\Theta}{2h^2 p F_1 + \frac{3}{2}Rh(-Xh_T+R_B)pF_2} \\ &= \frac{d\Theta - pdx - qdT}{0} = \frac{-\left(1 + X\frac{h_{Tx}}{h_T}\right) dq + \frac{h_{TT}}{h_T} X dp - E(X, T)(d\Theta + qdT)}{0} \end{aligned} \quad (3.14a)$$

函数  $E$  定义为

$$E(X, T) = \frac{1}{h} \left( h_T - X \frac{h_{TT} h_x}{h} + X h_{Tx} \right) \quad (3.14b)$$

除后面两个线性组合以外, 不可能有分母为零的情况, 因为不可能有第三个对应于分母为零的线性组合。

为了求得全微分形式, 我们引入两个积分因子  $G$  和  $Q$ , 它们分别对应于分母为零的两个线性组合, 使得方程

$$\left[ -\left(1 + X\frac{h_{Tx}}{h_T}\right) dq + \frac{h_{TT}}{h_T} X dp - E(X, T)(d\Theta + qdT) \right] Q + (d\Theta - pdX - qdT) G = 0 \quad (3.15)$$

为全微分。此处  $G$  和  $Q$  依赖于  $X, T, \Theta, p, q$  及  $h$ 。

为了简便起见, 将(3.5)写成标准形式

$$\sum_{i=1}^5 X_i dx_i = 0 \quad (3.16)$$

式中  $x_i$  和  $X_i$  分别表示

$$x_1 = q, \quad x_2 = X, \quad x_3 = p, \quad x_4 = \Theta, \quad x_5 = T \quad (3.17a)$$

$$\text{及} \quad X_1 = -\left(1 + X \frac{h_{TX}}{h_T}\right)Q, \quad X_2 = -x_3 G, \quad X_3 = x_2 \frac{h_{TT}}{h_T} Q,$$

$$X_4 = G - D(x_2, x_5), \quad X_5 = -x_1 [G + D(x_2, x_5)Q] \quad (3.17b)$$

依照 Forsyth's 理论, (3.16) 可解的充分必要条件是

$$a_{m,n} X_r + a_{n,r} X_m + a_{r,m} X_n = 0 \quad (3.18)$$

对于  $(m, n, r)$  在序列  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  中取任意三个的组合都成立。这共有十个这样的组合。但其中只有六个是线性独立的<sup>[5]</sup>。式中系数  $a_{ij}$  则由下式定义:

$$\left. \begin{aligned} a_{m,n} &= \frac{\partial X_m}{\partial x_n} - \frac{\partial X_n}{\partial x_m} \\ a_{n,r} &= \frac{\partial X_n}{\partial x_r} - \frac{\partial X_r}{\partial x_n} \\ a_{r,m} &= \frac{\partial X_r}{\partial x_m} - \frac{\partial X_m}{\partial x_r} \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

由条件(3.18)可以推出下列结果:

$$\text{A.} \quad Q \left( G - \frac{H''}{H'} \right) = 0 \quad (3.20a)$$

由于希望  $d\Theta - pdX - qdT$  是全微分, 其积分因子  $Q \neq 0$ , 则有

$$\frac{G}{Q} = -\frac{H''}{H'} \quad (2.20b)$$

$$\text{B.} \quad \frac{\partial}{\partial x_5} \left( \frac{G}{Q} \right) + \frac{G}{Q} \left( \frac{G}{Q} + \frac{H'}{1+KH} \right) = 0 \quad (3.21a)$$

积分得运动截面与底部平板的距离函数  $H(T)$  所满足的微分方程:

$$\frac{H''}{H'} = \frac{\alpha H'}{(1+KH)^{1/k}} \quad (3.21b)$$

根据运动截面的运动特点, 取  $K \equiv 1$ ,  $H(0) = 1$ , 积分两次得

$$H(T) = (1 - \varepsilon T)^\alpha - 1 \quad (3.21c)$$

$$\text{且} \quad h(X, T) = (1 - \varepsilon T)^\alpha \quad (3.21d)$$

式中  $\alpha$  和  $\varepsilon$  为两个参数。当  $|X| > 1$ ,  $\varepsilon = 0$  时  $h(X, T) = 1$ , 描述运动截面以外的情况。当  $|X| < 1$  运动截面向上运动时,  $\varepsilon < 0$ ,  $h_T > 0$ , 运动截面与下平板间的间隙增加。当运动截面向下运动时, 取  $\varepsilon > 0$ , 则  $h_T < 0$  (见图2)。

C. 将(3.20b)和(3.21d)代入方程(3.12)积分得一全微分形式的附加方程

$$(2\alpha - 1)\Theta + (1 - \alpha)XP - \frac{1}{\varepsilon}(1 - \varepsilon T) = k_1 \quad (3.22)$$

将(3.21d)代入特征关系式(3.10)所得方程与(3.22)一起构成对于未知函数  $p$  和  $q$  的方程组。

由此出发, 求解相函数的 Pffafian 方程

$$d\Theta - pdX - qdT = 0 \quad (3.23)$$

### 3.3 Pffafian方程的通解

让我们从求解 $p$ 和 $q$ 的方程组着手, 求方程(3.23)的通解

$$\begin{cases} (2\alpha-1)\Theta + (\alpha-1)Xp + \left(\frac{1}{\varepsilon} - T\right)q = k_1 & (3.24a) \\ F\left[\alpha^2, \alpha R', \frac{\omega}{\alpha}\right] = 0 & (3.24b) \end{cases}$$

式中  $F$  是由四阶常微分方程所确定的特征关系式, 显然该未知函数将引起求解上的困难。然而对于一些特殊的 $\alpha$ 值, 如 $\alpha=1$ , 我们还是可以由(3.24)求得 $p$ 和 $q$ 的。

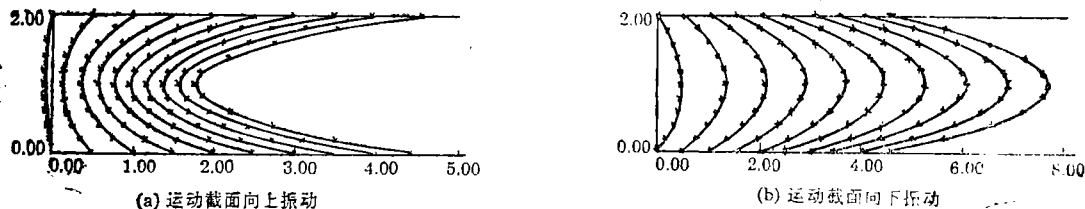


图2 通过供氧系统的基本流场

此时(3.24)成为

$$\begin{cases} \Theta - \left(\frac{1}{\varepsilon} - T\right)q = k_1 & (3.25a) \\ F\left[(1-\varepsilon T)^2 p^2, \frac{3}{2}R(\varepsilon X + R_B)(1-\varepsilon T)p, -\frac{2}{3}\frac{(1-\varepsilon T)q}{(\varepsilon X + R_B)p}\right] = 0 & (3.25b) \end{cases}$$

由(3.24b)解出 $\alpha$ , 用 $G$ 表示 $F$ 的逆函数, 我们有:

$$\alpha = G(R, \omega) \quad (3.26a)$$

对于(3.25b)有

$$(1-\varepsilon T)p = G\left[\frac{3}{2}R(\varepsilon X + R_B), -\frac{2}{3}\frac{(1-\varepsilon T)^2 q}{(\varepsilon X + R_B)}\right] \quad (3.26b)$$

由方程(3.25a)和(3.26b)联立求解, 得:

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{(\Theta - k_1)\varepsilon}{1 - \varepsilon T} \\ p &= \frac{1}{1 - \varepsilon T} G\left[\frac{3}{2}R(\varepsilon X + R_B), -\frac{2}{3}\frac{\varepsilon(1 - \varepsilon T)(\Theta - k_1)}{\varepsilon X + R_B}\right] \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

代入Pffafian方程(3.10), 我们得到一全微分方程

$$G\left[\frac{3}{2}R(\varepsilon X + R_B), -\frac{2}{3}\frac{\varepsilon(1 - \varepsilon T)(\Theta - k_1)}{\varepsilon X + R_B}\right]dX = (1 - \varepsilon T)d\Theta + \varepsilon(\Theta - k_1)dT \quad (3.28)$$

引入变量替换

$$U = (\Theta - k_1)(1 - \varepsilon T) \quad (3.29a)$$

$$Y = \frac{3}{2}R(\varepsilon X + R_B), \quad V = -\frac{\varepsilon RU}{Y} \quad (3.29b, c)$$

它们有下面的全微分

$$dY = \frac{3}{2}R\varepsilon dX, \quad dV = -\frac{\varepsilon R dU}{Y} + \frac{\varepsilon R U dY}{Y^2} \quad (3.29d, e)$$

由(3.29)我们可以推出下面的方程

$$\frac{dU}{dX} = -\frac{3}{2}Y \frac{dV}{dY} - \frac{3}{2}V \quad (3.30)$$

将(3.29)和(3.30)代入方程(3.28), 我们得下面的非线性常微分方程

$$\frac{dV}{dY} + \frac{2}{3} \frac{1}{Y} G(Y, V) + \frac{V}{Y} = 0 \quad (3.31)$$

现在让我们在 $R-\alpha$ 平面上的点 $(R_0, \omega_0)$ 的邻域, 将函数展开成 $(R-R_0)$ 和 $(\omega-\omega_0)$ 的级数形式

$$\begin{aligned} \alpha = G(R, \omega) = & \alpha_0 + b_{10}(R-R_0) + b_{01}(\omega-\omega_0) + b_{20}(R-R_0)^2 + b_{11}(R-R_0)(\omega-\omega_0) \\ & + b_{02}(\omega-\omega_0)^2 + b_{30}(R-R_0)^3 + b_{21}(R-R_0)^2(\omega-\omega_0) \\ & + b_{12}(R-R_0)(\omega-\omega_0)^2 + b_{03}(\omega-\omega_0)^3. \end{aligned} \quad (3.32)$$

式中系数 $b_{ij}$ 的值列在表1之中, 它是由文献[1]的展开式系数计算而得到的。在线性情况下, (3.32)可以简化为:

$$\alpha = \alpha_{00} + b_{10}R + b_{01}\omega \quad (3.33)$$

此处  $\alpha_{00} = \alpha_0 - b_{10}R_0 - b_{01}\omega_0$

有  $G(Y, V) = \alpha_{00} + b_{10}Y + b_{01}V \quad (3.34)$

把(3.34)代入方程(3.31)得

$$\frac{dV}{dY} + \left(\frac{2}{3}b_{01} + 1\right) \frac{V}{Y} + \frac{2}{3} \left(\frac{\alpha_{00}}{Y} + b_{10}\right) = 0 \quad (3.35)$$

它的通解是

$$V = -\frac{2}{3} \left[ \frac{\alpha_{00}}{\frac{2}{3}b_{01} + 1} + \frac{b_{10}Y}{\frac{2}{3}b_{01} + 2} + k_2 Y^{-\frac{2}{3}b_{01} - 1} \right] \quad (3.36)$$

由此式我们可以求得扰动波的相函数的通解

$$\begin{aligned} \Theta = & \frac{\varepsilon X + R_B}{(1-\varepsilon T)\varepsilon} \left\{ \frac{\alpha_{00}}{\frac{2}{3}b_{01} + 1} + \frac{b_{10}}{\frac{2}{3}b_{01} + 2} \cdot \frac{3}{2} R(\varepsilon X + R_B) \right. \\ & \left. + k_2 \left[ \frac{3}{2} R(\varepsilon X + R_B) \right]^{-\frac{2}{3}b_{01} - 1} \right\} + k_1 \end{aligned} \quad (3.37)$$

式中  $k_1$ 和 $k_2$ 为两个任意常数, 它们将在下节的初值问题中确定。

## 四、初值问题

### 4.1 初值问题

设在 $T=0$ 时刻, 扰动波在某给定位置 $S$ 处, 相函数是 $\Theta_0$ , 即

$$\Theta = \Theta_0, \quad X = S, \quad (\text{当 } T = 0) \quad (4.1)$$

代入(3.33)得待定常数 $k_1$ 为

$$k_1 = \Theta_0(S) - \frac{\varepsilon S + R_B}{\varepsilon} \left\{ \frac{\alpha_{00}}{\frac{2}{3}b_{01} + 1} + \frac{b_{10}}{\frac{2}{3}b_{01} + 2} \cdot \frac{3}{2} R(\varepsilon S + R_B) \right.$$



表 1

系数 $b_{ij}$ 的值

$R=5772.2218$	$\alpha=1.020547$	$c=0.26400021$
$b_{10}=0.211767E-04$	$-0.439186E-05i$	$b_{01}=0.261029E+01$
$b_{20}=-0.125726E-08$	$+0.123252E-08i$	$b_{11}=0.874034E-04$
		$+0.540093E-04i$
$b_{30}=0.124645E-08$	$-0.192602E-05i$	$b_{02}=0.162201E-05$
$b_{12}=0.232818E-03$	$+0.353383E-03i$	$+0.277634E-04i$
		$b_{21}=-0.325333E-08$
		$+0.502709E-08i$
		$b_{03}=0.678380E+01$
		$+0.551741E+01i$
$R=5800$	$\alpha=1.019961$	$c=0.26371161+0.4560200E-04i$
$b_{10}=0.210648E-04$	$-0.435633E-04i$	$b_{c1}=0.261294E+01$
$b_{20}=-0.124536E-08$	$+0.121983E-08i$	$b_{11}=0.870574E-04$
		$+0.538673E-04i$
$b_{30}=0.123450E-08$	$-0.190951E-08i$	$b_{02}=0.159735E-05$
$b_{12}=0.232566E-03$	$+0.358106E-03i$	$+0.276803E-04i$
		$b_{21}=-0.322543E-08$
		$+0.489904E-08i$
		$b_{03}=0.681984E+01$
		$+0.554678E+01i$
$R=5900$	$\alpha=1.017869$	$c=0.26268537+0.2068536E-04i$
$b_{10}=0.206707E-04$	$-0.423220E-04i$	$b_{c1}=0.262237E+01$
$b_{20}=-0.120348E-08$	$+0.117773E-08i$	$b_{11}=0.858338E-04$
		$+0.536108E-04i$
$b_{30}=0.119600E-08$	$-0.186093E-08i$	$b_{02}=0.151074E-05$
$b_{12}=0.231710E-03$	$+0.357571E-03i$	$+0.273852E-04i$
		$b_{21}=-0.313615E-08$
		$+0.487967E-08i$
		$b_{03}=0.694943E+01$
		$-0.565741E+01i$
$R=6000$	$\alpha=1.015810$	$c=0.26167877+0.3636420E-04i$
$b_{10}=-0.202899E-04$	$-0.411348E-04i$	$b_{01}=0.263168E+01$
$b_{20}=-0.116441E-08$	$+0.897158E-09i$	$b_{11}=0.846468E-04$
		$+0.528694E-04i$
$b_{30}=0.115335E-08$	$-0.179840E-08i$	$b_{02}=0.142727E-05$
$b_{12}=0.230722E-03$	$+0.356203E-03i$	$+0.270972E-04i$
		$b_{21}=-0.303550E-08$
		$+0.473246E-08i$
		$b_{03}=0.707898E+01$
		$+0.575897E+01i$
$R=10000$	$\alpha=0.95410$	$c=0.23248683+0.435926E-02i$
$b_{10}=0.114516E-04$	$-0.165985E-05i$	$b_{01}=0.293128E+01$
$b_{20}=-0.418847E-09$	$+0.375800E-09i$	$b_{11}=0.552150E-04$
		$+0.394546E-04i$
$b_{30}=0.419681E-09$	$-0.742368E-09i$	$b_{02}=-0.477247E-06$
$b_{12}=0.201654E-03$	$+0.333006E-03i$	$+0.194494E-04i$
		$b_{21}=-0.123014E-08$
		$+0.217602E-08i$
		$b_{03}=0.122570E+02$
		$+0.103486E+02i$
$R=47044$	$\alpha=0.78096$	$c=0.15998430+0.984519-02i$
$b_{10}=0.190689E-05$	$-0.111032E-10i$	$b_{01}=0.407324E+01$
$b_{20}=-0.174945E-10$	$+0.127340E-10i$	$b_{11}=0.144921E-04$
		$+0.149697E-04i$
$b_{30}=0.252803E-10$	$-0.524126E-10i$	$b_{02}=-0.175460E-05$
$b_{12}=0.110279E-03$	$+0.277989E-03i$	$+0.646718E-05i$
		$b_{21}=-0.102971E-09$
		$+0.213488E-09i$
		$b_{03}=0.561535E+02$
		$+681414E+02i$
$R=10000$	$\alpha=0.7058009$	$c=0.13252294+0.1031787-02i$
$b_{10}=0.781171E-06$	$+0.459901E-07i$	$b_{01}=0.479258E+01$
$b_{20}=-0.363744E-11$	$+0.242136E-11i$	$b_{11}=0.739372E-05$
		$+0.907373E-05i$
$b_{30}=0.142713E-12$	$-0.173855E-12i$	$b_{02}=-0.154092E-05$
$b_{12}=0.108491E+03$	$+0.171015E+03i$	$+0.363858E-05i$
		$b_{21}=-0.342565E-10$
		$+0.654220E-10i$
		$b_{03}=0.108491E+03$
		$+0.171015E+03i$
$R=1000000$	$\alpha=0.514134$	$c=0.07317960+0.8303781-02i$
$b_{10}=0.497208E-07$	$+0.102587E-07i$	$b_{01}=0.801655E+01$
$b_{20}=-0.285576E-13$	$+0.147562E-13i$	$b_{11}=0.871619E-06$
		$+0.183631E-05i$
$b_{30}=0.142713E-12$	$-0.173855E-12i$	$b_{02}=-0.470217E-06$
$b_{12}=0.386940E-05$	$+0.143832E-03i$	$+0.567207E-06i$
		$b_{21}=-0.114407E-11$
		$+0.139371E-11i$
		$b_{03}=0.421027E+03$
		$+0.257084E+04i$

$$+k_2 \left[ \frac{3}{2} R(\varepsilon S + R_B) \right]^{-\frac{2}{3} b_{01} - 1} \quad (4.2)$$

对  $S$  求微分, 我们求得另一待定常数  $k_2$  为

$$k_2 = \frac{-3}{2b_{01}} \left\{ \Theta_0' - \frac{\alpha_{00}}{\frac{2}{3}b_{01}+1} - \frac{b_{10}}{\frac{2}{3}b_{01}+2} 3R(\varepsilon S + R_B) \right\} \left[ \frac{3}{2} R(\varepsilon S + R_B) \right]^{\frac{2}{3}b_{01}+1} \quad (4.3)$$

将  $k_1$  代入 (3.33), 对方程  $f(X, T, k_2) = 0$  求包络则得  $S$  所满足的关系式

$$\varepsilon S + R_B = (\varepsilon X + R_B) (1 - \varepsilon T)^{n_0}, \quad n_0 = \frac{3}{2b_{10}} \quad (4.4)$$

现在, 我们已得到仅仅依赖初始扰动  $\Theta_0(S)$  的相函数

$$\begin{aligned} \Theta = \Theta_0(s) + & \frac{\alpha_{00}(\varepsilon X + R_B)}{\left(\frac{2}{3}b_{01}+1\right)(1-\varepsilon T)\varepsilon} [1 - (1 - \varepsilon T)^{n_0+1}] \\ & + \frac{b_{10} \frac{3}{2} R(\varepsilon X + R_B)^2}{\left(\frac{2}{3}b_{01}+2\right)\varepsilon(1-\varepsilon T)} [1 - (1 - \varepsilon T)^{2n_0+1}] \end{aligned} \quad (4.5)$$

在下面的分析中我们将讨论初始扰动  $\Theta_0$ .

## 4.2 特殊的初值问题

作为一个特殊的初值问题, 让我们考虑具有以下形式的初始扰动波

$$\exp\left\{ \frac{1}{\delta} [\sigma_0^2 (X - X_0)^2 + i K X] \right\} \quad (4.6)$$

式中  $K$  是实数,  $\sigma_0^2$  是一描述扰动波扩散的参数,  $X_0$  表示初始扰动的波动中心, 而  $\sigma_0^2 (x - x_0)^2$  则描述波的扩散,  $KX$  表示波的传播速度.

参考 (3.3) 式得

$$\Theta_0 = -i\sigma_0^2 [(\varepsilon X + R_B) (1 - \varepsilon T)^{n_0} - X_0]^2 + K(\varepsilon X + R_B) (1 - \varepsilon T)^{n_0} \quad (4.7)$$

我们选取  $X_0$  满足关系式

$$\varepsilon X_0 + R_B = \frac{2R_0}{3R} \quad (4.8)$$

式中  $R_0$  是平面 Poiseuille 流在  $R$ - $\alpha$  平面内某点的雷诺数.  $R$  是我们所研究的通过该系统的流动的雷诺数.

将 (4.7) 代入 (4.5) 我们得满足此特殊初始扰动的相函数

$$\begin{aligned} \Theta(S) = & -i\sigma_0^2 [(\varepsilon X + R_B) (1 - \varepsilon T)^{n_0} - X_0]^2 + K(\varepsilon X + R_B) (1 - \varepsilon T)^{n_0} \\ & + \frac{\alpha_{00}(\varepsilon X + R_B)}{\left(\frac{2}{3}b_{01}+1\right)\varepsilon} [(1 - \varepsilon T)^{-1} - (1 - \varepsilon T)^{n_0}] \\ & + \frac{b_{10} \frac{3}{2} R(\varepsilon X + R_B)^2}{\left(\frac{2}{3}b_{01}+2\right)\varepsilon} [(1 - \varepsilon T)^{-1} - (1 - \varepsilon T)^{2n_0}] \end{aligned} \quad (4.9)$$

## 五、讨 论

(4.9)式的虚部为

$$\begin{aligned} \Theta_i(S) = & -\sigma_0^2 [(\varepsilon X + R_B)(1 - \varepsilon T)^{n_0} - X_0]^2 \\ & + \frac{\alpha_{00i}(\varepsilon X + R_B)}{\left(\frac{2}{3}b_{01} + 1\right)\varepsilon} [(1 - \varepsilon T)^{-1} - (1 - \varepsilon T)^{n_0}] \\ & + \frac{\frac{3}{2}b_{10i}R(\varepsilon X + R_B)^2}{\left(\frac{2}{3}b_{01} + 2\right)\varepsilon} [(1 - \varepsilon T)^{-1} - (1 - \varepsilon T)^{2n_0}] \end{aligned} \quad (5.1)$$

它可以写成一般形式

$$\Theta_i(S) = -\varepsilon_0^2(T) [(\varepsilon X + R_B) - X_1(T)]^2 + X_2(T) \quad (5.2)$$

式中  $\varepsilon_0^2(T)$ ,  $X_1(T)$  和  $X_2(T)$  分别是

$$\varepsilon_0^2(T) = \sigma_0^2(1 - \varepsilon T)^{2n_0} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} X_1(T) = & X_0(1 - \varepsilon T)^{-n_0} + \frac{1}{2\sigma_0^2} \left\{ \frac{\alpha_{00i}}{\left(\frac{2}{3}b_{01} + 1\right)\varepsilon} [(1 - \varepsilon T)^{-2n_0-1} - (1 - \varepsilon T)^{-n_0}] \right. \\ & \left. + \frac{b_{10i}}{\left(\frac{2}{3}b_{01} + 2\right)\varepsilon} \frac{3R}{2} (\varepsilon X + R_B) [(1 - \varepsilon T)^{-2n_0-1} - 1] \right\} \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$X_2(T) = -\sigma_0^2 X_0^2 - \varepsilon_0^2(T) X_1^2(T) \quad (5.5)$$

在  $T \rightarrow 0$  情况下, 即在扰动波的中心位置, 表示式(5.3)至(5.5)有下面的逼近形式:

$$\varepsilon_0^2(T) \simeq \sigma_0^2(1 - 2n_0\varepsilon T) \quad (5.6)$$

$$X_1(T) \simeq X_0 + T \left\{ X_0 \varepsilon n_0^2 - \frac{1}{2\sigma_0^2} \left[ \alpha_{00i} n_0 + b_{10i} n_0 \frac{3R}{2} (\varepsilon X + R_B) \right] \right\} \quad (5.7)$$

$$X_2(T) \simeq n_0 T \left[ \alpha_{00i} X_0 + b_{10i} X_0 \frac{3R}{2} (\varepsilon X + R_B) \right] \quad (5.8)$$

根据线性稳定性理论,  $\alpha_0$  (表示波数) 是实数,  $c_0$  (表示波速) 是负数. 则  $\alpha_{00i}$  的虚部为

$$\alpha_{00i} = -b_{10i} R_0 - b_{01} \alpha_0 c_{0i} \quad (5.9)$$

代入(5.8)得

$$X_2(T) \simeq -\frac{2}{3} T X_0 \alpha_0 c_{0i} \quad (5.10)$$

参照(5.2)至(5.10)式, 扰动波的相函数可以写成

$$\Theta = \Theta_r - i\varepsilon_0^2(T) [(\varepsilon X + R_B) - X_1(T)]^2 + iX_2(T). \quad (5.11)$$

现在, 我们所求的扰动波已经完全确定, 它可以表示成下面的逼近形式

$$\Psi' = A(X, T) \cdot \exp \left\{ \frac{1}{\delta} [i\Theta_r + \varepsilon_0^2(T) (X - X_1(T))^2 + \frac{2}{3} X_0 \alpha_0 c_{0i}] \right\} \Phi_0(\eta, T) \quad (5.12)$$

式中  $\Theta_r$  表示扰动波的形状,  $\frac{2}{3} X_0 \alpha_0 c_{0i}$  表示波的增长速度.

根据线性稳定性理论, 当该系统的通道流的雷诺数大于  $R = 3R_0/2X_0$  时,

$$\frac{2}{3}TX_0\alpha_0c_{0t} > 0 \quad (5.13)$$

扰动波指数状增加, 流动是不稳定的, 相反当  $R < 3R_0/2X_0$  时,

$$\frac{2}{3}TX_0\alpha_0c_{0t} < 0 \quad (c_{0t} < 0) \quad (5.14)$$

该流动是稳定的。

最后应该指出的是, 在讨论稳定性方程的解的适定性的过程中, 我们发现该方程可用于描述上下平板的距离有以下形式变化的振荡运动

$$h(X, T)m = 1 + \frac{A}{X^\mu} (1 - \varepsilon T)^\mu \quad (5.15)$$

式中  $A$  和  $\mu$  为任意常数。说明上面的数学分析适用于非平行流稳定性分析, 我们相信这样的工作将在以后的研究中出现。

最后, 笔者十分感谢帝国理工学院院长Stuart教授和已故的Diprima教授(美国), 他们在用Charpist's方法, 讨论解的适定性的数学研究中, 曾给出了很好的建议。

### 参 考 文 献

- [1] F.M. Wang, J.T. Stuart and T. W. Ng, An expansion of Orr-Sommerfeld eigenvalue problem, *J. Numerical Methods Computing and Computer Applications*, 1 (1991).
- [2] J.T. Stuart, *Laminar Boundary Layer* (1966).
- [3] A. Cameron, *Basic Lubrication Theory* (1976).
- [4] I.N. Snedden, *Element of Partial Differential Equation* (1957).
- [5] A.R. Forsyth, *Theory of Differential Equation* (1980).

## Stability Study of an Unsteady Oscillation Flow

F.M. Wang    Zhao Lie    Yu Xin

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing 100080, P.R. China*)

### Abstract

In this paper, an instability problem of an unsteady oscillation flow is studied. In particular, the phase function of the disturbance wave system is solved by using the characteristic theory of partial differential equation and an expansion of Orr-sommerfeld eigenvalue problem, instead of using the disturbance model which was given previously. The flow considered is a combination of plane Poiseuille flow with a flow oscillating periodically and its instability is found for a special initial value of a developing wave due to continuous oscillating source.

**Key words** Charpsit's method, phase function, Pfaffian equation