应用数学和力学，第17卷 第3期（1996年3月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

(Ω, $A_{\mu\nu}$) 场论中的雷达回波延迟

康谭珠迪[1]

（余燊推荐，1994年12月13日收到）

摘　要

本文利用雷达回波延迟，在Yu的（Ω，$A_{\mu\nu}$）场论中研究藉着Shapiro广义相对论的第四个测试。

关键词　雷达回波延迟　（Ω，$A_{\mu\nu}$）场　运动方程　爱因斯坦

一、背　　景

爱因斯坦曾提出广义相对论的三个测试：

（1）　光谱线的引力红移。

（2）　由太阳引起的光线偏转。

（3）　内行星轨道的近日点前移。

上述三个测试实现于空的空间和非常接近于静态电及球对称的引力场中。由Yu的工作[1,2]可知，因为测试粒子沿测地线路径运动，符合（弱）等效性原理的理论假定，(Ω,$A_{\mu\nu}$)场论可得到广义相对论的这些重要结果，并可达到相同精度的量级。而这些经典的测试仅能应付光粒子和行星的轨道变形。由于高速电子技术和高能雷达的发展，现已能测量可以满足测试爱因斯坦方程精度要求的作为时间函数的运动。特别地，雷达信号往返内行星与地球间所需时间的测量结果也已获得。本文考虑在（Ω，$A_{\mu\nu}$）场论中藉着Shapiro的第四个测试。

二、推　　导

我们用到下列方程

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2=\exp[-4\Omega]+C\exp[-6\Omega] \tag{2.1}$$

其中　$\Omega=m/r$，m为中心引力物体的质量，而C是积分常数。

当坐标时间间隔为dt时，利用如下条件

$$r^2\frac{d\phi}{dr}=A\exp[-4\Omega] \tag{2.2}$$

1　香港理工大学应用数学系。

其中 A是一常数．上式表示每单位质量的角动量．方程（2.1）可以写成

$$\exp[6\Omega]\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left(\frac{A}{r}\right)^2\exp[-2\Omega]-\exp[2\Omega]=C \tag{2.3}$$

式(2.3)支配轨道的时间历史．由此出发，我们首先计算雷达信号经过一靠近太阳的区域时，由一点$r=r_1$，$\theta=\pi/2$，$\phi=\phi_1$到达第二点$r=r_2$，$\theta=\pi/2$，$\phi=\phi_2$所需的时间．由于现在我们涉及的是光线，因此$C=0$．这由Yu的度量

$$ds^2=\exp[-2\Omega]dt^2-\exp[2\Omega](dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2))$$

很容易确定．测试粒子轨道限制在赤道平面，由Yu的文章[2]中式(1)～(2)及式(A·1)可得到

$$\dot{t}=E\exp[2\Omega] \qquad (E为常数)$$

"·"表示对标准时间的导数．

此外，在最靠近太阳的距离$r=r_0$处，$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$将消失，这样

$$A^2=r_0^2\exp\left[\frac{4m}{r_0}\right].$$

光粒子的运动方程则为

$$\exp[4\Omega]\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+A_0\exp[-4\Omega]\left(\frac{r_0}{r}\right)^2-1=0 \tag{2.4}$$

式中 $A_0=\exp\left[\frac{4m}{r_0}\right]$.(2.4)可写成

$$dt=\left\{\frac{\exp[4\Omega]}{1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^2A_0\exp[-4\Omega]}\right\}^{\frac{1}{2}}dr$$

则光从r_0到r（或从r到r_0）所需要时间为

$$t(r,r_0)=\int_{r_0}^{r}\left\{\frac{\exp[4\Omega]}{1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^2A_0\exp[-4\Omega]}\right\}^{\frac{1}{2}}dr \tag{2.5}$$

且光从点1到点2所需时间（当$|\phi_1-\phi_2|>\pi/2$时）为

$$t_{12}=t(r_1,r_0)+t(r_2,r_0).$$

为了计算式(2.5)的积分，我们进行下列展开

$$\exp[-4\Omega]=1-4\Omega+\cdots\approx1-\frac{4m}{r};$$

$$A_0=\exp\left[\frac{4m}{r_0}\right]\approx1+\frac{4m}{r_0}.$$

因此

$$1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^2A_0\exp[-4\Omega]\approx1-\left[1+4m\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}\right)\right]\left(\frac{r_0}{r}\right)^2$$

$$=\left(1-\frac{{r_0}^2}{r^2}\right)\left[1-\frac{4mr_0}{r(r+r_0)}\right],$$

因此，式(2.5)给出(至$\frac{m}{r}$和$\frac{m}{r_0}$一次方)

$$t(r,r_0)\approx\int_{r_0}^{r}\left(1-\frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{2m}{r}\right)\left(1+\frac{2mr_0}{r(r+r_0)}\right)dr$$

$$\approx\int_{r_0}^{r}\left(1-\frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{2m}{r}+\frac{2mr_0}{r(r+r_0)}\right)dr$$

这积分是基本的，而且从r_0到r所需时间为

$$t(r,r_0)\approx\sqrt{r^2-r_0^2}+2m\ \ln\left(\frac{r+\sqrt{r^2-r_0^2}}{r_0}\right)+2m\left(\frac{r-r_0}{r+r_0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

如果光以单位速度沿直线移动，前面第一项$\sqrt{r^2-r_0^2}$正是我们所预期的；而那些剩下的项，对于雷达信号在我们这里描述的巡迴中传播时，则产生广义相对论性的时间延迟。因此，当雷达信号从点1到点2来回传播时，应该引入下列量作为在坐标时间中的延迟

$$(\Delta t):=2[t(r_1,r_0)+t(r_2,r_0)-\sqrt{r_1^2-r_0^2}-\sqrt{r_2^2-r_0^2}]$$

$$=4m\ln\left[\frac{(r_1+\sqrt{r_1^2-r_0^2})\ (r_2+\sqrt{r_2^2-r_0^2})}{r_0^2}\right]$$

$$+4m\left[\sqrt{\frac{r_1-r_2}{r_1+r_0}}+\sqrt{\frac{r_2-r_0}{r_2+r_0}}\right].$$

这时间不是可以观察到的，但是它对（Ω，$A_{\mu\nu}$）场的影响给出一个大小和行为的概念。

对于从地球到水星来回的一个完整旅程，当水星在上合位和雷达信号刚巧擦过太阳时，这个过剩延迟是最大的。在这种情况下，r_0大约等于太阳的半径，$r_0\approx R_\odot\approx0.00465\text{AU}$，而且比从地球和水星到太阳的距离$r_1\approx1.0\text{AU}$和$r_2\approx0.4\text{AU}$小很多。因此，来回旅程最大的过剩延迟是

$$(\Delta t)_{\max}\approx4m_\odot\left[2+\ln\left(\frac{4r_1r_2}{r_0^2}\right)\right]\tag{2.6}$$

从式（2.6），我们然后得到[3]

$$(\Delta t)_{\max}\approx78\text{km}\approx260\mu\text{sec},$$

同时由爱因斯坦的场方程得到

$$(\Delta t)_{\max}\approx72\text{km}\approx240\mu\text{sec}$$

为了要获得可比较性质的数据，进行了许多实验。然而，每一个实验在进行和解释时都遇到非常大的困难[3],[5]。

参　考　文　献

[1] X. Yu, The Ω-field theory of gravitation and cosmology, *Astrophys. Space Sci.*, 154 (1989), 321—331.

[2] X. Yu, Theory of gravitational radiation of the(Ω, $A_{\mu\nu}$)-field, *Astrophys. Space Sci.*, 202 (1993)237—246.

[3] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley & Sons (1972), 201—207.

[4] J. Tam Hong, *An Alternative Form for the Equation of Motion in the(Ω, $A_{\mu\nu}$)-Field Theory and its Approximate Solution* (unpublished work).

[5] R. Straumann, *General Relativity and Relativistic Astrophysics*, Springer-Verlag (1984), 182—186.

Radar Echo Delay in the $(\Omega, A_{\mu\nu})$-Field Theory

Hong Tam Judy

(*Department of Applied Mathematics, Hong Kong Polytechnic, Hong Kong*)

Abstract

The present work aims to consider the fourth test of general relativity theory by Shapiro, using radar echo delay, in Yu's$(\Omega, A_{\mu\nu})$-field theory.

Key words radar echo delay, $(\Omega, A_{\mu\nu})$-field, equation of motion, Einstein's field

更 正

我刊第17卷第1期（1996年1月）第75～80页中刊载的论文“旋量法在机器人动力学分析中的应用”第一作者应是**林瑞麟**，误印成林端麟了，特此更正，并向作者致歉。