

带裂纹层合板复应力强度分析

胡互让¹ 吴承平²

(1994年11月25日收到)

摘 要

本文用经典板理论求得了复合材料层合板的界面应力强度因子。利用裂纹尖端能量释放率和复应力强度因子间的关系, 给出最一般的复合材料层合板, 在相应外荷载和模型混合参数下的复应力强度因子的一个封闭形式的解。然后提出确定这一模型混合参数的步骤, 给出某些层合板的数值结果。并给出在相应外荷载下的小范围接触条件。特别证明了界面韧度曲线的对称性质。最后讨论振荡指数消失后, 预计的断裂荷载的精确性。还通过一个实例表明 $\beta=0$ 法的有效性和局限性。

关键词 复合材料 层合板 复应力强度因子 能量释放率 界面裂纹

一、引 言

两种不同弹性固体间的裂纹可能出现振荡奇异性^[1]。在距裂纹尖端应力场 r 处, 界面裂纹应力场呈现为 $r^{-1/2+i\epsilon}$ 奇异性。 ϵ 为双材料常数, 通常称为振荡指数。这一振荡引起 I 型和 II 型的内在耦合, 从而给定义一个合理的应力强度因子(SIF)造成困难。这时, I 型和 II 型能量释放率分量不再存在^[2]。

设 (r, θ) 为原点在裂纹尖端的极坐标系(图1(a))。不同的各向同性材料间的界面裂纹的裂纹尖端应力场可写为

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} [\operatorname{Re}(K r^{i\epsilon}) \tilde{\alpha}_{ij}^I(\theta) + \operatorname{Im}(K r^{i\epsilon}) \tilde{\alpha}_{ij}^{II}(\theta)] \quad (1.1)$$

其中函数 $\tilde{\alpha}_{ij}^I(\theta)$ 和 $\tilde{\alpha}_{ij}^{II}(\theta)$ 由[3]给出。在界面上, $\theta=0$, (1.1)可化为[4]中 K 的定义, 即

$$\sigma_{33} + i\sigma_{13} = K r^{i\epsilon} / \sqrt{2\pi r} \quad (1.2a)$$

其中 $K = K_1 + iK_2$ (1.2b)

复量 K 通常称为界面应力强度因子, 用以量度外荷载的幅度和相位。这涉及到最早由 Sih 和 Rice^[5,6]通过 $K = (k_1 + ik_2)(\pi)^{1/2} \cosh(\pi\epsilon)$ 导出的应力强度因子 $k_1 + ik_2$ 和对均匀各向同性固体导出的应力强度因子 $K_I + iK_{II}$ 。除应力振荡外, 与此相应的位移也将振荡, 并且裂纹尖端附近裂纹两侧面相互渗透或闭合。在一定条件下, 这一相互渗透区域非常小, 因此线弹性断裂力学方法仍然有效, 并且 K 仍然可以表征裂纹尖端应力场。

(1.2)式定义的复应力强度因子不是通常意义的应力强度因子。 K_1 和 K_2 也不是 I 型和 II 型应力强度因子。同时, 它们具有与材料有关的量纲。量纲形式之所以特别重要, 是由于当

1 美国西拉库斯大学机械、航空和制造工程系。2 重庆交通学院 630074

使用的单位变化时,复量 K 的相角也会发生变化. Suo^[7]用(1.2)的形式给出了一般各向异性材料界面应力强度因子的定义,但发现当各向异性双材料退化为非振荡的时,这样定义的应力强度因子,一般并不能归并为传统的应力强度因子. Wu^[8,9]在 Rice^[10]和 Willis^[11]的工作的基础上,给出了界面裂纹尖端应力强度因子的另一个定义. 类似于(1.2),他给出

$$t = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \mathbf{R} \left[\left(\frac{r}{\hat{r}} \right)^{i\epsilon} \right] \mathbf{K} \quad (1.3)$$

这里,黑体字母表示矢量或矩阵. $t^T = (\sigma_{13} \sigma_{33})$ 为沿裂纹尖端前端界面的应力矢量, $\mathbf{K}^T = (K_I K_{II})$ 为界面 I 和 II 型应力强度因子矢量(这里只考虑面内分量), $\mathbf{R}[\]$ 为实的无量纲矩阵函数,它可由文[12]求得. \hat{r} 为长度参数. 对各向同性材料界面裂纹, (1.3)又可写为复量形式:

$$\sigma_{33} + i\sigma_{13} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} K \left(\frac{r}{\hat{r}} \right)^{i\epsilon} \quad (1.4a)$$

$$\text{其中} \quad K = K_I + iK_{II} \quad (1.4b)$$

按这一方法定义的应力强度因子与传统应力强度因子是一致的,可避免前面提到的争议. 然而其弊端也是显然的. 首先,其 I 型和 II 型仍不同于(1.3)中除 $r = \hat{r}$ 点外的荷载类型. 这是由于当 $\epsilon \neq 0$ 时,应力强度因子和荷载类型实质上是混杂的. 其次,在应力强度因子的解中,除 \hat{r} 外还包含另一个长度参数 $(L/\hat{r})^{-i\epsilon}$, 其中 L 可以是裂纹长度或层合板的层厚. 在下面的讨论中,我们将选用(1.2)式定义的应力强度因子.

已有不少文献计算了各向同性界面复应力强度因子^[13,14],也有一些测定界面韧度的实验,然而很少有涉及各向异性双材料界面或复合材料层合板的复应力强度因子 K .

本文把(1.2)中复应力强度因子 K 的定义推广到两种不同的正交各向异性材料的界面情况. 利用经典板理论分析的结果,给出在相应外荷载和一个模型混合参数下,复合材料层合板的 K 的一般表达式. 利用“裂纹表面变位(CSD)法”确定模型混合参数,并给出一些数值结果. 然后讨论小范围接触条件. 最后讨论 $\beta = 0$ 法,并给出这一近似方法的误差估计.

二、能量释放率和应力强度

我们着重讨论两种不同正交各向异性材料的界面裂纹. 这是因为很多的层合板界面,可以看作正交各向异性材料界面来处理. 其能量释放率和复应力强度因子 K 的关系,可由如下方程给出(参见图1(a)):

$$G = H_{11} |K|^2 / 4 \cosh^2(\pi\epsilon) \quad (2.1)$$

其中振荡指数 ϵ 与广义Dundurs参数 β 的关系为^[15]

$$\epsilon = (2\pi)^{-1} \ln[(1-\beta)/(1+\beta)] \quad (2.2)$$

其中,

$$\beta = (H_{11}H_{33})^{-1/2} ([\sqrt{s_{11}s_{33}} + s_{13}]_2 - [\sqrt{s_{11}s_{33}} + s_{13}]_1) \quad (2.3)$$

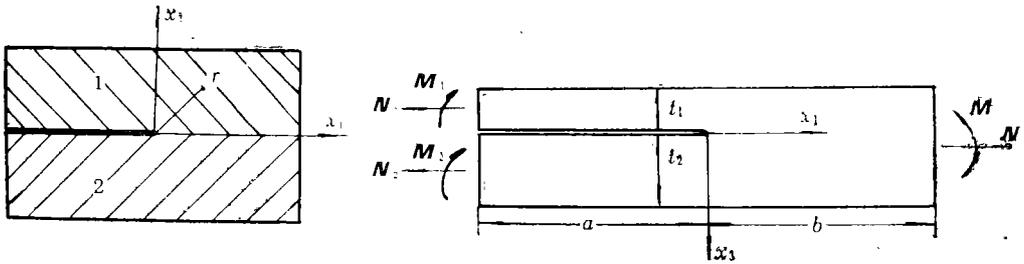
$$H_{11} = \sqrt{2} \{ [s_{11}\lambda^{-1/4} \sqrt{1+\rho}]_2 + [s_{11}\lambda^{-1/4} \sqrt{1+\rho}]_1 \} \quad (2.4)$$

$$H_{33} = \sqrt{2} \{ [s_{11}\lambda^{-3/4} \sqrt{1+\rho}]_2 + [s_{11}\lambda^{-3/4} \sqrt{1+\rho}]_1 \} \quad (2.5)$$

方括号外的脚标1和2分别代表材料1和2, λ 和 ρ 为下式定义的两个无量纲弹性参数,

$$\lambda = s_{11}/s_{33}, \quad \rho = (2s_{13} + s_{66}) / 2\sqrt{s_{11}s_{33}} \quad (2.6)$$

方程(2.3)至(2.6)中, s_{ij} 是相对于 x_2 轴的平面应力问题,对相应的平面应变问题, s_{ij} 须改为



(a) 界面裂纹及坐标系 (b) 模型几何条件和荷载条件

图 1

$(S_{1j} - S_{12}S_{j2}/S_{22})$ 。

考虑如图1(b)所示的物理模型。为能应用经典板理论，我们设 $a, b \gg t_1, t_2$ 。该问题可能是均质板、双材料偶或一般层合板。用经典板理论求得该问题的能量释放率为^[16]

$$G = |i\sqrt{c_1}N_c + e^{i\Gamma}\sqrt{c_2}M_c|^2/2 \quad (2.7)$$

其中 c_1, c_2 和 Γ 为层合板的已知参数， N_c 和 M_c 分别为集中在裂纹尖端的力和弯矩。由(2.1)和(2.7)式，可得复应力强度因子 K 为

$$K = \sqrt{2} \cosh(\pi\varepsilon) \left(i\sqrt{\frac{c_1 t_1}{H_{11}}} \frac{N_c}{t_1} + e^{i\Gamma} \sqrt{\frac{c_2 t_1^3}{H_{11}}} \frac{M_c}{t_1^2} \right) \sqrt{t_1} L^{-i\varepsilon} e^{i\Omega} \quad (2.8)$$

其中 L 为特征尺寸参数； Ω 为无量纲量，可作为模型混合参数考虑。方程(2.8)把复应力强度因子 K 和作用的“复荷载”

$$\left(i\sqrt{\frac{c_1 t_1}{H_{11}}} \frac{N_c}{t_1} + e^{i\Gamma} \sqrt{\frac{c_2 t_1^3}{H_{11}}} \frac{M_c}{t_1^2} \right)$$

联系起来。 Ω 如同 c_1, c_2 和 Γ 一样，看作层合板的特征参数。根据量纲分析， Ω 可能是无量纲量 $c_1 t_1/H_{11}$ ， $c_2 t_1^3/H_{11}$ ， ε 和 Γ 的函数。对一层合板，一旦 Ω 已知，在任意外荷作用下的复应力强度因子 K 就可由(2.8)式唯一确定。

我们定义荷载相角 ψ ，

$$KL^{i\varepsilon} = |K| e^{i\psi} \quad (2.9)$$

注意 ψ 取决于 L 。如果在(2.9)中挑选 \hat{L} 代替 L ，则对应的相角 $\hat{\psi}$ 为

$$\hat{\psi} = \psi + \varepsilon \ln(\hat{L}/L) \quad (2.10)$$

显然，这样定义的荷载相角并无绝对的物理含义。如果在某一荷载组合下 $KL^{i\varepsilon}$ 已知，则 $K\hat{L}^{i\varepsilon}$ 可以简单地通过沿 ψ 轴平移 $\varepsilon \ln(\hat{L}/L)$ 得到。 ψ 的角域约为 0° 到 360° （参见(2.9)式）。然而小范围接触条件仅限于 $(\pi - 4.6|\varepsilon|)$ 范围内，其初值和终值取决于振荡指数 ε 及长度参数 L 。关于这一点将在第五节中详细讨论。

当各向异性双材料退化为 $\varepsilon=0$ 时，复应力强度因子 K 与传统应力强度因子的关系为

$$K_I = K_1 (H_{11}/H_{33})^{1/2}, \quad K_{II} = K_2 \quad (2.11)$$

在裂纹尖端后面距离 r 处，横跨裂纹的位移跃变由Suo^[17]给出为

$$\sqrt{\frac{H_{11}}{H_{33}}} \Delta u_3 + i \Delta u_1 = \frac{2H_{11} K r^{i\varepsilon}}{(1+2i\varepsilon) \cosh(\pi\varepsilon)} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad (2.12)$$

利用(2.8)式，可用外荷载表示为

$$\sqrt{\frac{H_{11}}{H_{33}}} \Delta u_3 + i \Delta u_1 = \frac{2H_{11}}{1+2i\varepsilon} \sqrt{\frac{t_1 r}{\pi}} \left(i \sqrt{\frac{c_1 t_1}{H_{11}}} \frac{N_c}{t_1} + e^{i r} \sqrt{\frac{c_2 t_1^3}{H_{11}}} \frac{M_c}{t_1^2} \right) \left(\frac{r}{L} \right)^{i\Omega} e^{i\Omega} \quad (2.13)$$

下面讨论一特殊情况。设裂纹上下表面的材料是均匀正交各向异性的，且其主轴与参考坐标轴重合，则 c_1 ， c_2 和 Γ 可写为

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \frac{4[s_{11}]_1}{t_1} (1 + \Sigma \eta), \quad c_2 = \frac{12[s_{11}]_1}{t_1^3} (1 + \Sigma \eta^3) \\ \sin \Gamma &= \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Sigma \eta^2 - 1}{\sqrt{(1 + \Sigma \eta)(1 + \Sigma \eta^3)}} \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

其中， $\Sigma = [s_{11}]_2/[s_{11}]_1 = [E_{11}]_1/[E_{11}]_2$ 为两种材料在 x_1 方向上的刚度比。 $\eta = t_1/t_2$ 为厚度比。如果我们定义一个无量纲正交各向异性双材料参数 \hat{n} ，

$$\hat{n} = H_{11}/[s_{11}]_1 = \sqrt{2} \{ [\lambda^{-1/4} \sqrt{1+\rho}]_2 + \Sigma [\lambda^{-1/4} \sqrt{1+\rho}]_1 \} \quad (2.15)$$

则(2.8)式中的 K 成为

$$K = 2\sqrt{2} \cosh(\pi\varepsilon) \left(i \sqrt{\frac{1+\Sigma\eta}{\hat{n}}} \frac{N_c}{t_1} + e^{i r} \sqrt{\frac{3(1+\Sigma\eta^3)}{\hat{n}}} \frac{M_c}{t_1^2} \right) \sqrt{t_1} L^{-i\Omega} e^{i\Omega} \quad (2.16)$$

由此方程可看出， Ω 为 η ， Σ ， ε 和 \hat{n} 的函数。如果 $\varepsilon = 0$ ，则 Ω 仅取决于 η ， Σ 和 \hat{n} 。对各向同性双材料偶，因为 $\hat{n} = 2(1 + \Sigma)$ ，则 Ω 又仅取决于 η ， Σ 和 ε 。再有，因各向同性双材料偶的 Σ 和 ε 可分别用 Dundurs 参数 α 和 β 代替，则 $\Omega = \Omega(\eta, \alpha, \beta)$ 。若 β 与 ε 的关系由(2.2)确定，则 α 与 Σ 的关系为 $\alpha = (\Sigma - 1)/(\Sigma + 1)$ 。

三、模型混合参数的确定

在上节，我们得到了最一般的层合板在外荷载作用下， K 的一个封闭形式解(参见(2.8)式)。对于方程(2.8)，我们必须强调以下几点：

1. Ω 是一个与层合板自身性质有关的无量纲参数，它独立于荷载条件。
2. L 是带裂纹层合板尺寸的度量。任一尺寸参数，如 a ， t_1 ， t_2 ， $t = t_1 + t_2$ (参见图 1(b))，或层厚，都可以用 L 表示。
3. 对一类给定的层合板，一旦选定参数 L ，则无论几块层合板的 L 值怎么不同， Ω 都不再变化。例如，对正交异性双材料问题，可选择(2.16)中 $L = t_1$ 。对具相同参数 η ， Σ ， ε 和 \hat{n} 的另一层合板，只要 L 仍选 t_1 (t_1 的值可不同于第一种情况)，则两层合板的 Ω 必然相同。
4. 对同一层合板，如果参数 L 选择不一样，则 Ω 也会不一样。例如，对一已知层合板，可用(2.8)式确定其 Ω ，而对同一层合板，在相同荷载条件下，也可用另一不同尺寸参数 \hat{L} 由(2.8)式确定其 Ω ，

$$K = \sqrt{2} \cosh(\pi\varepsilon) \left(i \sqrt{\frac{c_1 t_1}{H_{11}}} \frac{N_c}{t_1} + e^{i r} \sqrt{\frac{c_2 t_1^3}{H_{11}}} \frac{M_c}{t_1^2} \right) \sqrt{i_1} \hat{L}^{-i\Omega} e^{i\Omega} \quad (2.8a)$$

一方面，因为 $\hat{L} \neq L$ ，可以看作它们是具有不同几何条件的两层合板。因此，在相同荷载下，两个 K 表征的裂纹尖端应力场是不相同的。为了使 K 与 \hat{L} 匹配，应该用一个新的荷载

$$\left(i \sqrt{\frac{c_1 \hat{t}_1}{H_{11}}} \frac{N_c}{\hat{t}_1} + e^{i r} \sqrt{\frac{c_2 \hat{t}_1^3}{H_{11}}} \frac{M_c}{\hat{t}_1^2} \right) \left(\frac{L}{\hat{L}} \right)^{i\Omega}$$

来代替

$$\left(i \sqrt{\frac{c_1 t_1}{H_{11}}} \frac{N_c}{t_1} + e^{i\tau} \sqrt{\frac{c_2 t_1^3}{H_{11}}} \frac{M_c}{t_1^2} \right)$$

另一方面, 由于参数 L 的选择是任意的, 因此可以认为(2.8)和(2.8a)是在同一荷载条件下, 选择不同尺寸参数的同一层合板。但显然, 由(2.8)和(2.8a)得到的 Ω 是不相同的。有一个 $\epsilon \ln(L/\hat{L})$ 的改变。因此, 对一种层合板的 Ω , 必须在其结论中明确表明所使用的尺寸参数 L 。这样作才能避免某些混淆并保证 Ω 的唯一性(相对已知的尺寸参数 L)。

利用裂纹表面变位法可先后求得 K 和 Ω 。其主要步骤如下:

1. 对给定层合板选择满足小范围接触条件的荷载组合(参见第五节)。
2. 对所选择的荷载, 应用有限元法和虚拟裂纹封闭技术(VCCT)给出 G 。然后由(2.1)式的 G 求得 K 的模, 表示为 $|K|_c$ 。
3. 利用同一有限元解, 求出裂纹尖端附近节点的位移跃变 Δu_1 和 Δu_3 。对每一对节点用(2.12)式计算 $|K|$ 。将计算出的 $|K|$ 和 $|K|_c$ 比较, 找出 r_0 处 $|K|$ 的值最接近 $|K|_c$ 的一对节点。当 $|K|_c$ 在两对节点的 $|K|$ 值之间时, 需要采用内插法来给出 r_0 及此处的位移跃变 Δu_1 和 Δu_3 。
4. 由(2.12)式, 利用 r_0 和 Δu_1 , Δu_3 求得 K , 然后利用(2.8)式求得对应于所选尺寸参数 L 的 Ω 。

四、数值结果

4.1 收敛性讨论

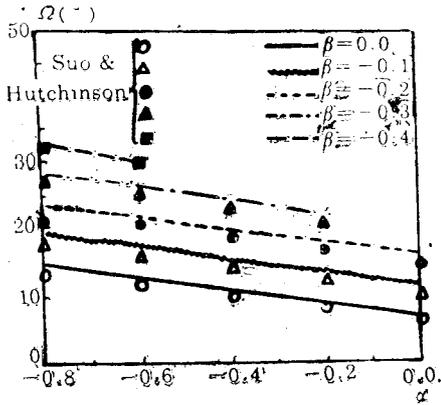
讨论三个问题的收敛性。有两个分别是 $\eta=1$, $\alpha=-0.2$, $\beta=-0.1$ 和 $\eta=0.5$, $\alpha=-0.4$, $\beta=-0.2$ 的各向同性双材料偶。对应的振荡指数分别求得为 $\epsilon=0.0319$ 和 $\epsilon=0.0645$ 。第三个是 $[90_s/0_4]$ 石墨/环氧层合板, 在其较上面的 $90/0$ 界面有一边缘脱层, 求得 $\epsilon=0.04778$ 。设 Δ 为裂纹尖端正方形单元的边长。三个问题的结果列于表1。由表1可以看出, 当 $\Delta/t_1=1/128$ 时, 有限元结果收敛。

表1 2种各向同性板和一种正交各向异性板的收敛性

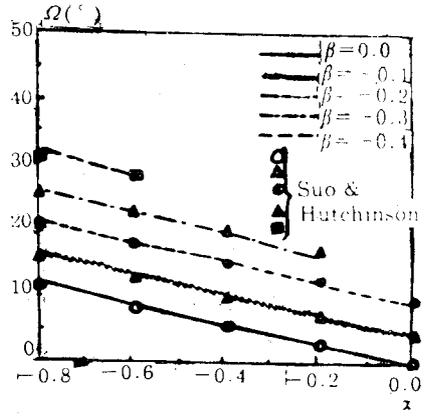
Δ/t_1	各向同性板 1		各向同性板 2		正交各向异性板	
	$\psi(^{\circ})$	$\Omega(^{\circ})$	$\psi(^{\circ})$	$\Omega(^{\circ})$	$\psi(^{\circ})$	$\Omega(^{\circ})$
1/16	-82.4	7.6	-68.9	21.1	-69.9	20.1
1/32	-82.4	7.6	-69.2	20.8	-70.2	19.8
1/64	-82.5	7.5	-69.5	20.5	-70.6	19.4
1/128	-82.5	7.5	-69.7	20.3	-70.8	19.2
1/256	-82.5	7.5	-69.8	20.2	-71.0	19.0
1/512	-82.5	7.5	-69.9	20.1	-71.1	18.9

4.2 各向同性双材料偶

对各向同性双材料偶的 η , α 和 β 的不同组合求得了 Ω 。图2(a)、(b)示出了当 $\eta=1$ 和0.5时, Ω 随 α 和 β 的变化情况。图中还示出了Suo和Hutchinson的结果^[17]。由图中可以看出, 两个结果吻合很好。



(a)



(b)

图2 各向同性双材料界面当(a) $\eta=1.0$, (b) $\eta=0.5$ 时的模型混合参数 Ω

4.3 复合材料层合板

这里讨论两种复合材料层合板。一种即4.1中探讨的层合板，另一种是石墨/环氧层合板 $[90/\pm 55/0]_s$ ，在较上的 $-55/0$ 界面有脱层。对后一层合板，求得 $\varepsilon=0.03613$ 。这两种层合板的单向材料性质分别示于表2和表3。对每一层合板，求出 Ω ，将5种荷载的 ψ 相角域均设计为 0° 到 90° 。并比较了有限元分析和经典板理论的结果。第一种层合板， $\Omega(L=t_1)=19.2^\circ$ ；第二种层合板， $\Omega(L=t_1)=16.5^\circ$ 。所得结果示于表4和表5。两种层合板的经典板理论结果和有限元结果十分吻合。

表2 石墨/环氧层合板 $[90_s/0_4]$ 单向材料性质

$E_{xx}=137.9\text{GPa}$	$\nu_{xy}=0.25$	$G_{xy}=5.90\text{GPa}$
$E_{yy}=14.5\text{GPa}$	$\nu_{xz}=0.25$	$G_{xz}=5.80\text{GPa}$
$E_{zz}=14.5\text{GPa}$	$\nu_{yz}=0.25$	$G_{yz}=5.80\text{GPa}$

单层厚度: $140.0 \times 10^{-6}\text{m}$

表3 石墨/环氧层合板 $[90/\pm 55/0]$ 单向材料性质

$E_{xx}=134.4\text{GPa}$	$\nu_{xy}=0.30$	$G_{xy}=5.52\text{GPa}$
$E_{yy}=10.2\text{GPa}$	$\nu_{xz}=0.30$	$G_{xz}=5.52\text{GPa}$
$E_{zz}=10.2\text{GPa}$	$\nu_{yz}=0.49$	$G_{yz}=3.43\text{GPa}$

单层厚度: $137.2 \times 10^{-6}\text{m}$

表4 $[90_s/0_4]_s$ 层合板经典板理论(CPT)和有限元分析(FEA)结果的比较(K_1, K_2 : $\text{Jm}^{-3/2}$)

$N_c(\text{N/m})$	$M_c(\text{N})$	$\psi(^{\circ})$	$K_1(\text{FEA})$	$K_2(\text{FEA})$	$K_1(\text{CPT})$	$K_2(\text{CPT})$
470.26	0.5584	-0.5	31676	-276	31747	55
737.63	0.5966	21.6	29781	11791	29639	12338
878.98	0.5366	43.1	23251	21757	22741	22347
904.62	0.4016	65.9	13129	29350	12538	29603
774.70	0.1943	89.7	167	31956	-59	31913

$K_1 = \text{Re}(K t_1^{\varepsilon})$

$K_2 = \text{Im}(K t_1^{\varepsilon})$

$\tan\psi = K_2/K_1$

表5 [90/±55/0]层合板经典板理论(CPT)和有限元分析(FEA)结果的比较($K_1, K_2: \text{Jm}^{-3/2}$)

$N_c(\text{N/m})$	$M_c(\text{N})$	$\psi(^{\circ})$	$K_1(\text{FEA})$	$K_2(\text{FEA})$	$K_1(\text{CPT})$	$K_2(\text{CPT})$
256.84	0.1152	-0.4	34239	-263	34335	169
432.85	0.1177	21.4	31458	12353	31224	13169
543.45	0.1049	42.4	25042	22874	24275	23753
581.17	0.0755	65.6	14129	31191	13164	31590
520.67	0.0337	89.4	351	34080	-28	34019
$K_1=\text{Re}(K_{t_1}^{\prime\epsilon})$		$K_2=\text{Im}(K_{t_1}^{\prime\epsilon})$	$\tan\psi=K_2/K_1$			

五、小范围接触条件和断裂轨迹

5.1 小范围接触条件

根据线弹性分析的结果,当 r 充分小时,界面裂纹表面最终将相互渗透(参见(2.12)式).将开口缝隙 Δu_3 刚刚转为负值时的最大 r ,定义为接触区域的大小.设接触区域的尺寸与裂纹体尺寸 L 相比非常小.Wang和Suo^[19]指出,当 $0.01 < r/L < 1$ 时满足 $\Delta u_3 > 0$ (这里的0.01是任意选定的,但其值一点也不影响下面的结果),则认为小范围接触(SSC)条件得到满足,即裂纹尖端应力场完全由复应力强度因子 K 表征.由(2.12)式,很容易证明小范围接触条件将限制 ψ 为

$$\left. \begin{aligned} -\pi/2 + 6.6\epsilon < \psi < \pi/2 + 2\epsilon, & \quad \text{当 } \epsilon > 0 \\ -\pi/2 + 2\epsilon < \psi < \pi/2 + 6.6\epsilon, & \quad \text{当 } \epsilon < 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

因为 ϵ 是小参数,因此在以上方程中可取 $2\epsilon \approx \tan^{-1}(2\epsilon)$.(5.1)表明,在满足小范围接触条件下, ψ 的区域约为 $(\pi - 4.6|\epsilon|)$. ψ 的边值取决于振荡指数 ϵ 的值.对一个已知界面问题,如果除 L 之外还包含另一个尺寸参数 \hat{L} ,则满足小范围接触条件的 ψ 的边值还将取决于 \hat{L} (参见(2.10)).

小范围接触条件要求,对一个已知界面,相应物度下的荷载组合可以被有效度量.因此,最好是根据荷载直接表示小范围接触条件.我们定义无量纲荷载参数 Q 为

$$Q = \sqrt{c_2/c_1} M_c / N_c \quad (5.2)$$

Q 是荷载组合的度量.由(2.8)式,可得出 Q 和荷载相角 ψ 的关系

$$Q = \cos(\psi - \Omega) / \sin(\psi - \Omega - \Gamma) \quad (5.3)$$

方程(5.2)和(5.3)可用于双材料偶或带裂纹复合材料层合板.由(2.13)有

$$\begin{aligned} \Delta u_3 = & \sqrt{4H_{33}r/\pi(1+4\epsilon^2)} (-\sqrt{c_1} N_c \sin(\Omega - 2\epsilon + \epsilon \ln(r/L)) \\ & + \sqrt{c_2} M_c \cos(\Omega + \Gamma - 2\epsilon + \epsilon \ln(r/L))) \end{aligned} \quad (5.4)$$

为使线弹性断裂力学方法继续有效,有必要限定 Q 为

当 $\epsilon > 0$ 时,

$$\left. \begin{aligned} Q > \sin(\Omega - 2\epsilon) / \cos(\Omega + \Gamma - 2\epsilon), & \quad N_c > 0 \\ Q < \sin(\Omega - 6.6\epsilon) / \cos(\Omega + \Gamma - 6.6\epsilon), & \quad N_c < 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.5a)$$

当 $\epsilon < 0$ 时,

$$\left. \begin{aligned} Q > \sin(\Omega - 6.6\epsilon) / \cos(\Omega + \Gamma - 6.6\epsilon), & \quad N_c > 0 \\ Q < \sin(\Omega - 2\epsilon) / \cos(\Omega + \Gamma - 2\epsilon), & \quad N_c < 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.5b)$$

如果 $N_c = 0$ ，则需 $M_c > 0$ 。

对于表达小范围接触条件，(5.5a)、(5.5b)与(5.1)是等价的。所不同的是前者用荷载组合表达，后者用荷载相角表达。对一带裂纹的试件，一旦求得模型混合参数 Ω ，就可以依据外荷载组合直接由(5.5a)、(5.5b)得出小范围接触条件。图3示出了4.1讨论的层合板 $[90_8/0_4]_s$ 的小范围接触条件。注意 Q 是一个周期为 π 的周期函数，在任一周期的区间范围内， Q 都是 ψ 的单值函数。因此，只要 ψ 的区间为 180° ，在 ψ 作变换时（参见(2.10)式），就不会失去任何信息。用 ψ 表示的该试件的小范围接触条件为

$$-71.9^\circ < \psi < 95.5^\circ$$

用 Q 表示，则为

$$Q > 0.296, \text{ 当 } N_c > 0; \quad Q < 0.030, \text{ 当 } N_c < 0$$

当 $\psi = \pm 90^\circ$ 时， $Q = 0.385$ 。

5.2 裂断轨迹的表示

界面断裂分析的目的是确定材料的某些性质，量化界面抗断裂强度。我们采用界面韧度作为断裂判据。界面韧度可表示为荷载相角 ψ 的函数：

$$G_c = G_c(\psi) \tag{5.6}$$

(5.6)式的图形称为界面韧度曲线或该界面的断裂轨迹。该曲线根据实验数据绘出。

考虑 $-\varepsilon > 0$ 的界面（如果 $\varepsilon < 0$ ，只需把试件翻转，使 $\varepsilon > 0$ ），发现断裂轨迹(5.6)是对称的（参见附录）。如果选择长度参数 \hat{L} 为单位长度，则断裂轨迹的对称轴（当 $\text{Im}(K\hat{L}^{1/2}) = 0$ 时，出现纯 I 型断裂）为 $\psi = 0$ 。我们建议研究断裂轨迹时取 $\hat{L} = 1$ （单位长度）。因为断裂轨迹是对称的，因此只须在 $0 \leq \psi < \pi/2 + 2\varepsilon$ 区间内量度和研究界面韧度。

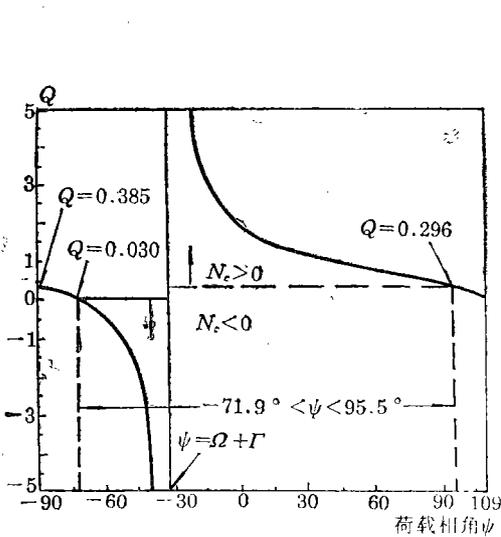


图3 $[90_8/0_4]_s$ 层合板 Q 与 ψ 的关系

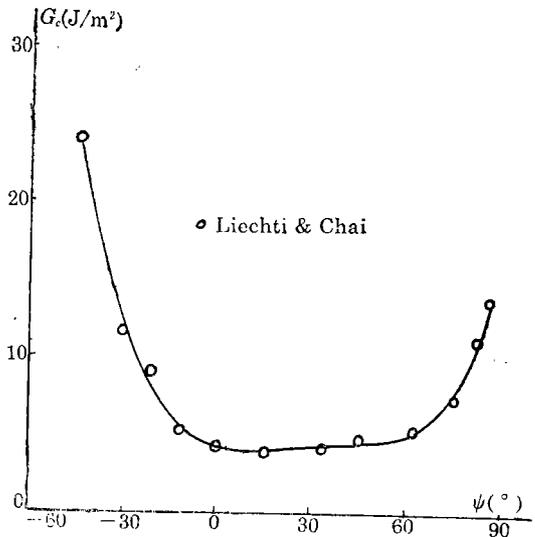


图4 $\hat{L} = 12.7\text{mm}$ 环氧-玻璃界面的拟合曲线
(基于Liechti和Chai的工作)

六、 $\beta = 0$ 法

由非零 β (或 ε) 产生的病态裂纹尖端状态使问题更加复杂。事实上，实际应用的金属

非金属材料界面, 对于“1”/“2”有意义的不同的组合, ε 值是十分小的. 迄今在断裂预计中, 还没有振荡指数有重大差异的资料报道. 因此, He和Hutchinson^[18,19]建议在解释实验数据和用 $\beta=0$ 进行预测时, 降低 β 的作用. Davidson^[20]把这一思想推广到正交各向异性界面情况.

当用 $\beta=0$ 说明实验数据时, 韧度将变为

$$G_c = CG_c(\psi^*) \quad (6.1a)$$

$$\text{其中} \quad \tan(\psi^*) = K_2/K_1 \quad (6.1b)$$

$C > 0$ 为一常数. 当使 $\beta=0$ 时, 能量释放率可能受影响. C 是使 $\beta=0$ 时能量释放率精度的度量. 如果能保持 G 不变, 则 $C=1$. 使 $\beta=0$, G 可能不变或变化很小. 实际上很容易使 $\beta=0$ 时 G 保持不变(参见[21]). 对于一个已知界面, (5.6)的图形和(6.1)的相似. 曲线(6.1)由曲线(5.6)平移两次得到. 在 $G-\psi$ 平面中, 首先将曲线(5.6)沿 G 轴平移 $(C-1)G$, 然后沿 ψ 轴平移 $(\psi^*-\psi)$. 如果 $(\psi^*-\psi) < 0$, 则曲线(6.1)移位到(5.6)的左边; 如果 $(\psi^*-\psi) > 0$, 又将移位到右边. 有两个用 $\beta=0$ 法接近实际问题解的例子:

(a) $|\varepsilon|$ 远远小于1, 则移位的角度 $(\psi^*-\psi)$ 非常小, 两条曲线基本重合. 事实上, 各向同性或正交各向异性的很多实际界面, $|\varepsilon|$ 都非常小.

(b) 曲线(5.6)的斜率非常小, 就是说 $|dG_c/d\psi|$ 的值非常小. 从物理意义上来说, G_c 对模型比并不敏感. 这一条件不必在 ψ 的整个区域上有效. 如果在所关心的区域上条件成立, 就可指望 $\beta=0$ 法可精确地预计荷载.

下面我们估计 $\beta=0$ 法的误差. 对振荡界面, 能量释放率(2.7)可重写为

$$G = (1/2)c_1N_c^2(1+2Q\sin\Gamma+Q^2) \quad (6.2)$$

设 Q 不变, 断裂荷载 N_c 可由下式确定

$$(1/2)c_1N_c^2(1+2Q\sin\Gamma+Q^2) = G_c(\phi+\Omega) \quad (6.3)$$

其中 ϕ 为“复荷载”

$$\left(i\sqrt{\frac{c_1t_1}{H_{11}}} \frac{N_c}{t_1} + e^{i\Gamma} \sqrt{\frac{c_2t_1^3}{H_{11}}} \frac{M_c}{t_1^2} \right)$$

的相角. 在得出(6.3)时, 已设(2.8)中的 $L = \hat{L}$, 并令 $\beta=0$. 在使 $\beta=0$ 时, 设 G , c_1 , c_2 和 Γ 不变, 从而 ϕ 也不变. 类似于(6.3), 当 $\beta=0$ 时, 有

$$(1/2)c_1\hat{N}_c^2(1+2Q\sin\Gamma+Q^2) = G_c(\phi+\hat{\Omega}) \quad (6.4)$$

这里 \hat{N}_c 和 $\hat{\Omega}$ 分别表示 $\beta=0$ 近似时的断裂荷载和模型混合参数. 由(6.3)和(6.4)有

$$\left(\frac{\hat{N}_c}{N_c} \right)^2 = \frac{G_c(\phi+\hat{\Omega})}{G_c(\phi+\Omega)} \approx 1 + \frac{1}{G_c} \left. \frac{dG_c}{d\psi} \right|_{\phi+\Omega} (\hat{\Omega} - \Omega) \quad (6.5)$$

对 $\eta=1$ 的各向同性材料界面, 一般说来 $\hat{\Omega} - \Omega \approx 2\varepsilon$, 则

$$\frac{\hat{N}_c - N_c}{N_c} = -\frac{\varepsilon}{G_c} \left. \frac{dG_c}{d\psi} \right|_{\phi+\Omega} \quad (6.6)$$

用曲线 $G_c(\psi)$ 拟合Liechti和Chai^[22]给出的环氧/玻璃界面实验值($\alpha = -0.9366$, $\beta = -0.1879$, $\varepsilon = 0.0605$)(参见图4), 得

$$G_c(\psi) = 4.1794 - 0.049856\psi + 0.00409103\psi^2 - 9.00581 \times 10^{-5}\psi^3 + 4.09156 \times 10^{-7}\psi^4 + 4.00622 \times 10^{-9}\psi^5 \quad (6.7)$$

对不同的 ψ 估计了断裂荷载的误差, 其结果列于表6. 由表6可以看出, $|\psi|$ 大, 即 $K_2 \gg K_1$, 误差相对较大; $|\psi|$ 小, 即 $K_1 \gg K_2$, 误差相对较小. 这是由于 $|\psi|$ 大, 即2型大于1型, 大多数材料出现2型裂纹比1型需要更大的能量. 因此, $|\psi|$ 大比 $|\psi|$ 小时韧度曲线 $G_c(\psi)$ 的斜

率要大。Wang和 Suo^[13]关于某些金属/环氧系统和有机玻璃/环氧系统的实验结果证实了这一结论。

因此可以说,对大多数界面而言, $|\psi|$ 小,即 I 型控制, $\beta=0$ 法能精确预计断裂荷载; $|\psi|$ 大,即 II 型控制, $\beta=0$ 预计断裂荷载的误差可能不小,特别是 ε 不是很小的情况下。

其它问题,如 Griffith 问题, $\beta=0$ 解的误差也可用类似的方法估计。一般说来,即使 ε 不很小, $|dG_c/d\psi|$ 也不很小,只要在我们关心的区域上 $|dG_c/d\psi|$ 很小,则 $\beta=0$ 法仍然可以使用。

表6 $\beta \neq 0$ 和 $\beta = 0$ 时断裂荷载的比较

$\psi(^{\circ})$	$dG_c/d\psi _{\phi+\Omega}$	$(\hat{N}_c - N_c)/N_c(\%)$
-45	-1.0322	15
-21	-0.3521	14
0	-0.0499	4
15	0.0186	-2
45	0.0025	0
75	0.3683	-17

七、结 语

本文用经典板理论分析复合材料层合板的断裂状态,给出了含有模型混合参数 Ω 的复应力强度因子 K 的一个封闭形式解,用裂纹表面变位(CSD)法确定这一参数。几个例子表明,本文方法可以精确预计带裂纹层合板的应力强度。还讨论了两个与界面裂纹问题实验有关的问题,给出了依据外荷载表达的小范围接触条件,证实了界面裂纹断裂轨迹的对称性质。最后讨论了用 $\beta=0$ 法精确预计断裂荷载的条件。

附 录

设试件如图1(b)所示。该试件的应力强度因子 K 为(参见(2.8)):

$$K = \sqrt{2} \cosh(\tau\varepsilon) \left| i \sqrt{\frac{c_1 t_1}{H_{11}}} \frac{N_c}{t_1} + e^{i\Gamma} \sqrt{\frac{c_2 t_1^3}{H_{11}}} \frac{M_c}{t_1^2} \right| \sqrt{t_1} L^{-i\varepsilon} e^{i\Omega} e^{i\phi} \quad (\text{A.1})$$

其中 ϕ 为“复荷载”的相角。设 $\hat{\phi}$ 为(A.1)中 K 的相角,即

$$\hat{\phi} = \phi + \Omega - \varepsilon \ln L = \psi - \varepsilon \ln L \quad (\text{A.2})$$

由于 $\hat{\phi}$ 与 ψ 仅差一个常数,在表示断裂轨迹时可用 $\hat{\phi}$ 替换 ψ 。对任一 $\hat{\phi}$ (此时 M_c/N_c 为确定),增大 N_c 和 M_c 直到发生断裂可得到 $G_c(\hat{\phi})$ 。翻转试件,由自由板1的曲线,很容易证明当 N_c 变号时, M_c 不变号。由于试件被翻转, ε , Γ 和 Ω 都要变号, c_1, c_2 不变。由(A.2), $\hat{\phi}$ 也要变号。由于是同一试件在同一荷载条件下,预计 G_c 也相同。因而 $G_c(\hat{\phi})$ 为以 $\hat{\phi}=0$ 为对称轴的对称函数。由(A.2)知, $G_c(\psi)$ 为以 $\psi = \varepsilon \ln L$ 为对称轴的对称函数。

若要以 \hat{L} 为任意长度参数提出实验数据,即 $G_c = G_c(\hat{\psi})$, $\hat{\psi}$ 由 $K \hat{L}^{i\varepsilon} = |K| \exp[i\hat{\psi}]$ 确定。由(2.10)知, $G_c(\hat{\psi})$ 的对称轴为 $\hat{\psi} = \varepsilon \ln \hat{L}$ 。如果设 \hat{L} 为单位长度,则断裂轨迹的对称轴总为 $\hat{\psi} = 0$ 。 \hat{L} 的单位应与计算中所使用的其它物理量的单位一致,并且应在试验结果的描述中显著地标明 \hat{L} 。

参 考 文 献

- [1] M. L. Williams, The stresses around a fault or crack in dissimilar media, *Bull. Seismol. Soc. Amer.*, 49 (1959), 199—204.
- [2] I. S. Raju, J. H. Crews, Jr. and M. A. Aminpour, Convergence of strain release rate components for edge-delaminated composite laminates, *Engineering Fract. Mech.*, 30 (1988), 383—396.
- [3] J. R. Rice, Z. Suo and J.-S. Wang, Mechanics and thermodynamics of brittle interfacial fracture in bimaterial system, in *Metal-Ceramic Interfaces*, Ed. by

- M. Ruhle, A. G. Evans, M. F. Ashby and J. P. Hirth, Pergamon Press, New York (1990), 269—294.
- [4] J. W. Hutchinson, M. E. Mear and J. R. Rice, Crack paralleling an interface between dissimilar materials, *J. Appl. Mech.*, **54** (1987), 828—832.
- [5] G. C. Sih and J. R. Rice, The bending of plates of dissimilar materials with cracks, *J. Appl. Mech.*, **31** (1964), 477—482.
- [6] J. R. Rice and G. C. Sih, Plane problems of cracks in dissimilar media, *J. Appl. Mech.*, **32** (1965), 418—423.
- [7] Z. Suo, Singularities, interfaces and cracks in dissimilar anisotropic media, *Proc. R. Soc. Lond.*, **A427** (1990), 331—358.
- [8] K. C. Wu, Stress intensity factor and energy release rate for interfacial crack between dissimilar anisotropic materials, *J. Appl. Mech.*, **57** (1990), 882—886.
- [9] K. C. Wu, Explicit crack-tip fields of an extending interface crack in an anisotropic bimaterial, *Int. J. Solids Struct.*, **27** (1991), 455—466.
- [10] J. R. Rice, Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks, *J. Appl. Mech.*, **55** (1988), 98—103.
- [11] J. R. Willis, Fracture mechanics of interfacial cracks, *J. Mech. Phys. Solids*, **19** (1971), 353—368.
- [12] H. Gao, M. Abbudi and D. M. Barnett, Interfacial crack-tip field in anisotropic elastic solids, *J. Mech. Phys. Solids*, **40** (1992), 393—416.
- [13] J.-S. Wang and Z. Suo, Experimental determination of interfacial toughness curves using brazil-nut-sandwiches, *Acta Metall. Mater.*, **38** (1990), 1279—1290.
- [14] P. P. L. Matos, R. M. McMeeking, P. G. Charalamambides and M. D. Drory, A method for calculating stress intensities in bimaterial fracture, *Int. J. Fracture*, **40** (1989), 235—254.
- [15] J. Dundurs, in *Mathematical Theory of Dislocations*, ASME (1969), 70—115.
- [16] 胡互让、吴承平, 带裂纹层合板能量释放率分析, 应用数学和力学, **16**(6) (1995), 527—541.
- [17] Z. Suo and J. W. Hutchinson, Interface crack between two elastic layers, *Int. J. Fracture*, **43** (1990), 1—18.
- [18] M. -Y. He and J. W. Hutchinson, Kinking of a crack out of an interface, *J. Appl. Mech.*, **56** (1989), 270—278.
- [19] J. W. Hutchinson, Mixed mode fracture mechanics of interfaces, in *Metal-Ceramic Interfaces*, Ed. by M. Ruhle, A. G. Evans, M. F. Ashby and J. P. Hirth, Pergamon Press, New York (1990), 295—306.
- [20] B. D. Davidson, Prediction of energy release rate for edge delamination using a crack tip element, *Presented at Fifth ASTM Symposium on Composite Materials, Fatigue and Fracture*, Atlanta, Georgia, May 4—6 (1993).
- [21] B. D. Davidson, H. Hu and R. A. Schapery, An analytical crack tip element for layered elastic structure, *J. Appl. Mech.* (in Press)
- [22] K. M. Liechti and Y.-S. Chai, Asymmetric shielding in interfacial fracture under in-plane shear, EMRL Report No. 89/4, The University of Texas at Austin (1990).

Analysis of Complex Stress Intensities for Cracked Laminates

Hu Hurang

*(Department of Mechanical, Aerospace and Manufacturing
Engineering, Syracuse University, Syracuse, NY 13244, USA)*

Wu Chengping

(Chongqing Jiaotong Institute, Chongqing 630074, P. R. China)

Abstract

Classical plate theory has been used to find out interfacial stress intensity factors in composite laminates. By using a well-known relation between the crack-tip energy release rate and the complex stress intensity factor, a closed-form solution for complex stress intensity in terms of external loading and a mode mix parameter for fairly general composite laminates is given. Then a procedure for determining this mode mix parameter is presented, followed by numerical results for some laminates. Small scale contact condition is expressed in terms of external loading. In particular, a symmetric property of interfacial toughness curve is proven. Finally, the accuracy of failure load predicted by eliminating oscillation index is discussed, and an example is presented to show the validity and limitation of the $\beta=1$ approximation.

Key words composite materials, laminates, complex stress intensity factor, energy release rate, interface crack