应用数学和力学，第17卷 第2期（1996年2月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

幂向量、复合向量数及其函数理论

杨 文 熊[1]

（汤任基推荐；1995年1月20日收到）

摘 要

本文提出向量为其幂向量和向量幂级数．向量幂级数由一实数和某一向量联合组成的“复合向量数”及其函数有重要涵义．这数也有运算法则．从复合向量数的函数理论分析知其函数有导数和解析函数的必要和充分条件．这些条件构成了“双曲型”方程的特征以及函数的积分性质等．

关键词 复合向量数 幂向量 双曲型方程

一、幂向量和复合向量数的提出

人们在研究全非线性力学或物理学非线性问题时，可取主要的参数用幂级数如Laurent或Taylor级数展开．在力学中，这一参数主要是向量，例如速度或加速度等，而在物理学中则如温度梯度（向量）等．这些物理向量在极高的数值时，例如自由粒子按接近光速($\sim 3\times10^8$m/s)运动时粒子就会出现一种奇怪的运动非线性效应．这种效应就是把运动的速度按Laurent级数展开的结果[1]．在一般的情况下，物理量（速度、加速度、…）可按下述向量幂定义的方法展开．为此先定义幂为$n(\geqslant 0)$的向量$\boldsymbol{A}$是由以下内积向量组成：

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}^i\cdot\boldsymbol{A}^j=\underbrace{\boldsymbol{A}^1\cdot\boldsymbol{A}^1\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{A}^1}_{i}\cdot\underbrace{\boldsymbol{A}^1\cdot\boldsymbol{A}^1\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{A}^1}_{j}=\underbrace{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{A}}_{i+j}$$

上式中$i+j=n$．在下面特殊情况下

(i) $\boldsymbol{A}^0=1$（定义为1的标量）， $n=0$；

(ii) $\boldsymbol{A}^1=\boldsymbol{A}$ $n=1$；

(iii) $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=A^2$ $n=2$；

(iv) $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}^1\cdot\boldsymbol{A}^1\cdot\boldsymbol{A}^1=A^2\boldsymbol{A}$（由(ii)和(iii)） $n=3$；

(v) $\boldsymbol{A}^4=\boldsymbol{A}^1\cdot\boldsymbol{A}^3=A^4$（由(ii)和(iv)） $n=4$；

…………

对高速运动的粒子而言其物理参数如速度向量$\boldsymbol{V}$的幂级数：

$$L=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\boldsymbol{V}^n=\varphi(V)+\boldsymbol{k}\psi(V) \tag{1.1}$$

1 上海交通大学工程力学系，上海 200030

式中$\varphi(V)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{2n}V^{2n}$是$V$的能量部分；$\psi(V)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{2n+1}V^{2n+1}$是$\boldsymbol{V}$的动量部分[2],[3]；而$\boldsymbol{k}$为$\boldsymbol{V}$的单位向量．当给定$V$后，$\varphi$及$\psi$都是定值，则$L$就成为一“复合向量数”了．

二、复合向量数的运算法则

在描述复合向量数运算法则之前对式(1.1)中出现的单位向量$\boldsymbol{k}$可视为乘子k，其运算符合向量内积定义及推广：

$$\left.\begin{array}{ll}(\text{i}) & \boldsymbol{k}^1=\boldsymbol{k}=k;\\ (\text{ii}) & \boldsymbol{k}^2=k^2=1;\\ (\text{iii}) & \boldsymbol{k}^3=k^3=k;\\ (\text{iv}) & \boldsymbol{k}^4=k^4=1;\\ (\text{v}) & 1/k=k\ (\text{由(ii)而得}).\end{array}\right\}\tag{2.1}$$

现在讨论复合向量数的运算法则：

1．加法运算

设复合向量数$A=a_1+ka_2$，$B=b_1+kb_2$（以下法则运算都仿照A和B二个复合向量数）则

$$A+B=(a_1+ka_2)+(b_1+kb_2)=(a_1+b_1)+k(a_2+b_2)\tag{2.2}$$

2．减法运算

$$A-B=(a_1+ka_2)-(b_1+kb_2)=(a_1-b_1)+k(a_2-b_2)\tag{2.3}$$

特别从加法和减法运算知得出二个复合向量数相等的条件是

$$A=B,\ \text{只有当}a_1=b_1,\ a_2=b_2\tag{2.4}$$

3．乘法运算

$$AB=(a_1+ka_2)(b_1+kb_2)=(a_1b_1+a_2b_2)+k(a_1b_2+a_2b_1)\tag{2.5}$$

4．局部除法运算

(1) $$\frac{A}{B}=\frac{a_1+ka_2}{b_1+kb_2}=\frac{a_1}{b_1}+k\frac{a_2}{b_1},\qquad (\text{当}b_2=0,\ b_1\neq 0);\tag{2.6}$$

(2) $$\frac{A}{B}=\frac{a_1+ka_2}{b_1+kb_2}=\frac{a_2}{b_2}+k\frac{a_1}{b_2},\qquad (\text{当}b_1=0,\ b_2\neq 0).\tag{2.7}$$

由以上运算法则可得以下三律：

1．交换律：$A+B=B+A$；$AB=BA$． (2.8)

2．结合律：$(A+B)+C=A+(B+C)$；$(AB)C=A(BC)$． (2.9)

3．分配律：$A(B+C)=AB+AC$． (2.10)

以上三律都可以用$A=a_1+ka_2$，$B=b_1+kb_2$和$C=c_1+kc_2$给出证明．

三、复合向量数的函数f(Z)

设一复合向量数

$$Z=x+ky\tag{3.1}$$

是复合向量数域$\mathscr{R}$内一个点$Z\in\mathscr{R}$，而在另一域$\mathscr{D}$中能找到与之对应的复合向量数$W(\in\mathscr{D})$，

则称在$\mathscr{R}$数域上定义了一复合向量数函数并记为

$$W=f(Z)=u(x,\ y)+kv(x,\ y) \tag{3.2}$$

式(3.2)定义的函数$f(Z)$，读者一定是清楚的。

以下我们定义复合向量函数的连续性和导数。

设$f(Z)$是域$\mathscr{R}$上的函数。在$\mathscr{R}$内选择一点Z_0，如果

$$\lim_{Z\to Z_0} f(Z)=f(Z_0) \tag{3.3}$$

则称$f(Z)$在Z_0处连续，Z_0称为$f(Z)$的连续点。如果$f(Z)$在整个$\mathscr{R}$上所有的点都连续，则称$f(Z)$在$\mathscr{R}$上为一连续函数。

设$f(Z)$在$\mathscr{R}$上是连续函数且$Z_0\in\mathscr{R}$，如果有极限（按局部除法运算）

$$\lim_{Z\to Z_0}\frac{f(Z)-f(Z_0)}{Z-Z_0}=\lim_{Z\to Z_0}\frac{\Delta f(Z)}{\Delta Z} \tag{3.4}$$

存在，则称$f(Z)$在Z_0处是可导的，我们称此极限值(3.4)是$f(Z)$在Z_0处的导数，用记号

$$f'(Z)\Big|_{Z_0}\text{或}\ \frac{df(Z)}{dZ}\Big|_{Z_0} \tag{3.5}$$

表之。

四、解析函数的重要条件

与复变函数一样能定义复合向量函数为解析函数。如果函数$f(Z)$在复合向量数域$\mathscr{R}$内所有的点Z上都有导数存在，则称$f(Z)$是$\mathscr{R}$的解析函数。以下要分析和建立判别$f(Z)$为解析函数的必要与充分条件。

(a) **必要条件**

已知$f(Z)=u(x,\ y)+kv(x,\ y)$为复合向量数域$\mathscr{R}$的解析函数，则按上述定义必存在

$$f'(Z)=\lim_{\Delta Z\to 0}\frac{f(Z+\Delta Z)-f(Z)}{\Delta Z} \tag{4.1}$$

按局部除法运算有

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=0}}\frac{f(Z+\Delta Z)-f(Z)}{\Delta Z}=\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta x=0}}\frac{f(Z+\Delta Z)-f(Z)}{\Delta Z} \tag{4.2}$$

这表示

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+k\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}\right)$$
$$=\lim_{\Delta y\to 0}\left(\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{k\Delta y}+k\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{k\Delta y}\right)$$

立刻得

$$\frac{\partial u}{\partial x}+k\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{k}\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}=k\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}$$

根据(2.4)，则得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x} \tag{4.3}$$

这就是必要条件。

(b) 充分条件

由于$\partial u/\partial x=\partial v/\partial y$，$\partial u/\partial y=\partial v/\partial x$成立，则设增量

$$\Delta W=f(Z+\Delta Z)-f(Z)=\Delta u+k\Delta v$$
$$=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y+k\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\eta_1\Delta x+\eta_2\Delta y\right)$$

其中当$\Delta x\to 0$，$\Delta y\to 0$时ε_1，ε_2；η_1，$\eta_2\to 0$。现将(4.3)代入上式并整理后得

$$\frac{\Delta W}{\Delta Z}=\frac{\partial u}{\partial x}+k\frac{\partial v}{\partial x}+(\varepsilon_1+k\eta_1)\frac{\Delta x}{\Delta x+k\Delta y}+(\varepsilon_2+k\eta_2)\frac{\Delta y}{\Delta x+k\Delta y}$$

由于$\Delta Z=\Delta x+k\Delta y$为一级小量而$(\varepsilon_1+k\eta_1)\Delta x$及$(\varepsilon_2+k\eta_2)\Delta y$为二级小量，故当$\Delta Z\to 0$，$\varepsilon_1$，$\varepsilon_2$；$\eta_1$，$\eta_2\to 0$时，上式必有

$$f'(Z)=\lim_{\Delta Z\to 0}\frac{\Delta W}{\Delta Z}=\frac{\partial u}{\partial x}+k\frac{\partial v}{\partial x}$$

所以$f(Z)$为解析函数。类似地可得：

$$f'(Z)=\lim_{\Delta Z\to 0}\frac{\Delta W}{\Delta Z}=\frac{\partial v}{\partial y}+k\frac{\partial u}{\partial y}$$

这就是充分条件。综上所述，函数$f(Z)=u(x, y)+kv(x, y)$在复合向量数域$\mathscr{R}$内解析的必要和充分条件是

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y} \tag{4.4}$$

成立。这里，请读者把上式试与复变函数论中著名的 Cauchy-Reimann 条件相比较知条件(4.4)更完整和对称。

五、双曲型方程的建立

若对式(4.4)进行一次求导：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

由此对$u(x, y)$得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{5.1}$$

类似地对$v(x, y)$得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \tag{5.2}$$

式(5.1)，(5.2)是对$u(x, y)$及$v(x, y)$满足的“双曲型方程”。双曲型偏微分方程在工程或数学理论上有很多用途，它可描述弦和薄膜的微幅振动；波的传播问题…。从这里研究的情况来看，这些问题都可以统一到复合向量函数理论中去。如果进一步研究式(5.1)和(5.2)，则可以得出

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=0 \tag{5.3}$$

类似地也有

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}-\frac{\partial^4 v}{\partial y^4}=0 \tag{5.4}$$

这里也请读者把式(5.1)到(5.4)试与调和函数满足 Laplace 方程及满足"双（重）调和"方程进行比较是很有意思的。至于双曲型方程和复合向量的几何意义或物理意义将在另篇文章中提出来。

六、复合向量函数的积分问题

设函数$f(Z)$在数域$\mathscr{R}$内解析且$f'(Z)$连续，则$f(Z)=u(x, y)+kv(x, y)$在$\mathscr{R}$内沿任意封闭线C的积分

$$\oint_C f(Z)dZ=0 \tag{6.1}$$

为了证明(6.1)，试作积分

$$\oint_C f(Z)dZ=\int_C(u(x, y)+kv(x, y))(dx+kdy)$$

$$=\int_C(udx+vdy)+k\int_C(vdx+udy) \tag{6.2}$$

根据 Green 定理[4]

$$\int_C(Pdx+Qdy)=\iint_{\mathfrak{R}}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

式中$P(x, y)$，$Q(x, y)$在域$\mathscr{R}$上解析且连续，则(6.2)中的二式分别有

$$\left.\begin{aligned}\int_C(udx+vdy)&=\iint_{\mathfrak{R}}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy\\ \int_C(vdx+udy)&=\iint_{\mathfrak{R}}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy\end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

根据条件(4.4)，式(6.2)的二式都为零，于是

$$\oint_C f(Z)dZ=0 \tag{6.4}$$

对$f(Z)$的封闭线积分为零的结论将对研究复合向量函数理论起到非常重要的作用，为此我们将另文研究之。

七、几 点 结 论

1．由幂向量的定义可以提出对向量幂级数的运算，从而实现了一实数与一向量联合组成一复合向量数及其函数。

2．复合向量数满足运算法则和三律。

3．建立了复合向量解析函数$f(Z)$满足的必充条件：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x} \tag{7.1}$$

及

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0 \tag{7.2}$$

4．解析函数$f(Z)$的封闭线积分为

$$\oint_C f(Z)dZ=0 \tag{7.3}$$

参 考 文 献

[1] 杨文熊，广义非线性、非定常力学理论及在粒子物理学中的应用，应用数学和力学，**16(1)** (1995)，23—32.

[2] 杨文熊，全非线性、非定常力学的理论，力学学报（待刊登）.

[3] 杨文熊，高能物理学中的全非线性效应及对粒子高速运动的应用，物理学报（待刊登）.

[4] M. R. Spiegel, *Schaum's Outline of Theory and Problems of Advanced Mathematics for Engineers and Scientists*, McGraw-Hill Book Co. (1971).

Power Vectors Combinatorial Vector Numbers and Its Theory of Functions

Yang Wenxiong

(*Shanghai Jiaotong University, Shanghai* 200030, *P. R. China*)

Abstract

This paper suggests the power vector and the vector power series. The vector power series is a "Combinatorial Vector Number" which is composed of a real number and a certain vector. Combinatorial vector variable and its functions have an important meaning. They have the fundamental operations of arithemetic too. From the theoretical analysis of functions for a combinatorial vector variable we would know its function has the derivatives, the necessary and sufficient conditions. These conditions make up the characters of "Hyperbolic equation" and its integrations.

Key words power vector, a combinatorial vector number, hyperbolic equation