应用数学和力学，第17卷 第2期（1996年2月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

径向轴对称冲击载荷下正交异性固支圆板的Liapunov稳定性

揭 敏[1]

（杨桂通推荐，1994年8月10日收到，1995年1月30日收到修改稿）

摘 要

本文用 Liapunov 第二方法分析了周边受轴对称径向冲击载荷作用的极正交各向异性固支圆板的稳定性．分析是在小挠度和弹性范围内进行的．冲击载荷被假定具有阶梯脉冲形式．导出了相应的稳定性条件．

关键词 轴对称 冲击载荷 圆板 Liapunov稳定性

一、引 言

Knops和Wilkes[1]首先将Movchan[2]提出的关于连续系统的 Liapunov 第二方法应用于受轴向冲击的弹性直杆的稳定性分析中，求出了稳定性条件． Leipholz[3]将这一方法运用到受随动载荷作用的直杆、矩形板和圆柱壳等结构元件的弹性稳定性动态分析中，并作了系统的阐述．本文用Liapunov第二方法分析极正交各向异性薄圆板在沿周边的径向轴对称冲击载荷作用下的稳定性．其中采用了小挠度和弹性的假定，并设圆板是周边固支的，冲击载荷具有阶梯脉冲的形式，由此得到了相应的稳定性条件．

二、基本方程和基本定理

如图1，半径为 a，厚为 δ，周边固支的薄圆板受到阶梯脉冲形式的冲击载荷P_r作用．板的挠度为$w(r,t)$．不难导出小挠度下圆板轴对称挠曲时的内力平衡方程

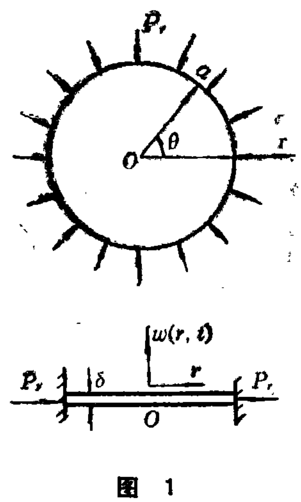

图 1

$$Q_r+r\frac{\partial Q_r}{\partial r}=\gamma r\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+P_r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(rM_r)-M_\theta=rQ_r \tag{2.2}$$

其中Q_r为径向横力，M_r为径向弯矩，M_θ为环向弯矩[4]．γ为材料密度．

1 华中理工大学力学系，武汉 430074

极正交各向异性材料的弹性应力应变关系为

$$\varepsilon_r = R_{12}\sigma_\theta + R_{22}\sigma_r \tag{2.3}$$

$$\varepsilon_\theta = R_{11}\sigma_\theta + R_{12}\sigma_r \tag{2.4}$$

其中ε_r，ε_θ，σ_r，σ_θ分别为径向和环向应变和应力；R_{11}，R_{12}，R_{22} 为弹性常数．轴对称及小挠度假定下的变形几何关系为

$$\varepsilon_r = -z\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \tag{2.5}$$

$$\varepsilon_\theta = -\frac{z}{r}\frac{\partial w}{\partial r} \tag{2.6}$$

其中z为沿板厚度方向的坐标．板的内力与应力间的关系为

$$M_r = \int_{-\delta/2}^{\delta/2}\sigma_r z dz \tag{2.7}$$

$$M_\theta = \int_{-\delta/2}^{\delta/2}\sigma_\theta z dz \tag{2.8}$$

联立方程(2.1)～(2.8)可导出板的动力学微分方程

$$\frac{D}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right]\right\} + \frac{(1-k)D}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)$$

$$+\frac{P_r}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \gamma\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{2.9}$$

其中 $D = \dfrac{\delta^3}{12R_{11}(k-\mu^2)}$， $k = \dfrac{R_{22}}{R_{11}}$， $\mu = -\dfrac{R_{12}}{R_{11}}$

边界条件和轴对称条件为

$$w(a,t)=0,\quad \frac{\partial}{\partial r}w(a,t)=0,\quad \frac{\partial}{\partial r}w(0,t)=0 \tag{2.10}$$

初始条件为

$$w(r,0)=0,\quad \frac{\partial}{\partial t}w(r,0)=0 \tag{2.11}$$

任一时刻数对(w,t)构成圆板运动状态空间中的一点．当$w=0$时，点$(0,t)$称为未被扰动运动状态．定义度量

$$\rho_0 = \sup\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + \sup\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \sup\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right)^2$$

及$\rho = |w|$分别表示扰动运动路径的初始点$(w,0)$以及任一扰动运动状态(w,t)到未被扰动运动状态的距离．它们满足条件(1) ρ_0,ρ 为正定；(2) $\rho_0(0,t)=0$，$\rho(0,t)=0$；(3) ρ 是时间t的连续函数；(4) ρ关于ρ_0连续．根据Movchan定理，要使未被扰动运动状态$(0,t)$相对于度量ρ_0，ρ为稳定，应存在一Liapunov泛函$V(w,t)$，满足以下条件：(5) V是正定的；(6) V关于度量 ρ_0 连续；(7) V 不增，或 $dV/dt\leqslant 0$．以下将利用该定理讨论本文中圆板的稳定性．

三、稳定性条件

由于图1所示的为一保守系统，故可取其Hamilton函数$H(w,t)$为Liapunov泛函．将运动方程(2.9)式左端乘以速度$\partial w/\partial t$，并在整个板内积分，即为Hamilton函数对时间的导

数dH/dt。利用分部积分法及边界条件(2.10)式可以算出

$$\frac{dH}{dt}=\pi\frac{d}{dt}\int_0^a\left[\frac{D}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}+r\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right)^2-P_r r\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2\right.$$

$$\left.-\frac{(1-k)D}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2+\gamma r\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right]dr$$

因此Hamilton函数即Liapunov泛函为

$$V(w,t)=\pi\int_0^a\left[\frac{D}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}+r\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right)^2-P_r r\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2-\frac{(1-k)D}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2\right.$$

$$\left.+\gamma r\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right]dr$$

对于保守系统，$H(w,t)$守恒，故有$dV/dt=dH/dt=0$。又显然有

$$V\leqslant\pi\int_0^a\left\{\frac{2D}{r}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2+\left(r\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right)^2\right]+\frac{|1-k|}{r}D\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2+\gamma r\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right\}dr$$

$$\leqslant\pi D(2+|1-k|)\int_{\varepsilon^+}^a\frac{1}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2dr+2\pi D\int_0^a rdr\cdot\sup\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right)^2$$

$$+\pi\gamma\int_0^a rdr\sup\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\leqslant M\rho_0$$

其中 $M=\max\left[\pi D(2+|1-k|)\ln\frac{a}{\varepsilon^+},\ \pi Da^2,\ \frac{\pi}{2}\gamma a^2\right]$

$^+$为一小量 （这里由$\partial w/\partial r|_{r=0}=0$，知

$$\int_0^{\varepsilon^+}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2dr$$

可积，当ε^+很小时，将其略去）。故V关于ρ_0连续。又

$$V\geqslant\pi\int_0^a\left[\frac{D}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}+r\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right)^2-P_r r\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2-\frac{(1-k)D}{r}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2\right]dr$$

令 $v=\partial w/\partial r$

得
$$V\geqslant\pi\int_0^a\left[rD\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2+\frac{kD}{r}v^2-P_r rv^2\right]dr \tag{3.1}$$

考虑如下泛函的条件极值问题

$$G=\inf\int_0^a\left[r\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2+\frac{k}{r}v^2\right]dr,\quad\int_0^a rv^2dr=1 \tag{3.2}$$

$$v(0)=v(a)=0 \tag{3.3}$$

作泛函

$$\tilde{G}=\int_0^a\left[r\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2+\frac{k}{r}v^2-\lambda rv^2\right]dr \tag{3.4}$$

应有其变分$\delta\tilde{G}=0$。故可导出

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)-(k-\lambda r^2)v=0 \tag{3.5}$$

联立(3.5)，(3.3)两式的解为$cJ_\nu(\sqrt{\lambda}r)$[5]，c与r无关；J_ν为第一类Bessel函数。特征值λ满足$J_{\sqrt{k}}(\sqrt{\lambda}a)=0$，其解为

$$\lambda=j^2_{\sqrt{k},n}/a^2 \qquad (n=1,2,\cdots) \tag{3.6}$$

其中$j_{\sqrt{k},n}$为$\sqrt{k}$阶 Bessel 函数的第n个零点，并且$j_{\sqrt{k},1}<j_{\sqrt{k},2}<\cdots$，其值可查表得到。

由(3.2)、(3.3)、(3.4)、(3.6)诸式知

$$\int_0^a\left[r\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2+\frac{k}{r}v^2\right]dr\geqslant\frac{j^2_{\sqrt{k},1}}{a^2}\int_0^a rv^2dr$$

代入(3.1)式，有

$$V\geqslant\pi\left(\frac{Dj^2_{\sqrt{k},1}}{a^2}-P_r\right)\int_0^a rv^2dr=\pi\left(\frac{Dj^2_{\sqrt{k},1}}{a^2}-P_r\right)m\int_0^a\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2dr$$

其中$m\in[0,a]$。由Schwarz不等式

$$w^2\leqslant r\int_0^r\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2dr\leqslant r\int_0^a\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2dr\leqslant a\int_0^a\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2dr$$

当$P_r\leqslant Dj^2_{\sqrt{k},1}/a^2$时，有

$$V\geqslant\frac{\pi m}{a}\left(\frac{Dj^2_{\sqrt{k},1}}{a^2}-P_r\right)\rho^2$$

即V关于ρ正定。综上所述，本文中圆板的稳定性条件为

$$p_r\leqslant j^2_{\sqrt{k},1}/(k-\mu^2) \tag{3.7}$$

其中$p_r=12P_ra^2R_{11}/\delta^3$为无量纲载荷。

四、讨 论 与 结 论

作为(3.7)式的一种特例，对于各向同性板，稳定性条件为

$$p_r\leqslant1.22E\delta^3/(1-\mu^2)a^2$$

其中E为弹性模量，μ为泊松比。此式右端即为周边固支圆板在准静态压曲时的临界载荷[4]。显然，(3.7) 式给出了一个充分但不一定是必要的条件。当圆板受其它边界支承时，可采用类似的分析方法。

在(3.7) 式中取$\mu^2=0.1$，作出$p_r\sim k$曲线（见图2），从中得到圆板依赖于正交异性比

值k的稳定性区域。可以看到，当$k<10$时，p_r随k值增大而急剧减小，即此范围内板的稳定性在较大程度上依赖于k值。而当$k>10$时，p_r的变化平缓，说明此范围内k值对板的稳定性无太大影响。

注意以上分析和讨论都是在$k>\mu^2$时进行的。

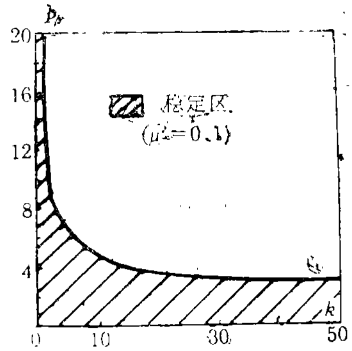

图 2

参 考 文 献

[1] R. J. Knops and E. W. Wikes, On Movchan's theorems for stability of continuous systems, *Int. J. Engng. Sci.*, 4 (1966), 303—329.

[2] A. A. Movchan, Stability of processes based on double metrices, *J. Appl. Math. Mech.*, 24 (1960), 1506—1524.

[3] H. Leipholz, *Stability of Elastic Systems*, Leyden-Noordhoff, Amsterdam (1980).

[4] S. Timoshenko, et al., *Theory of Plates and Shells*, 2nd edition, McGraw-Hill (1959).

[5] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd edition, Cambridge (1944).

On the Liapunov's Stability of a Clamped Orthotropic Round Plate under Radial Axisymmetrical Impact Load

Jie Min

(Department of Mechanics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, *P. R. China)*

Abstract

Liapunov's 2nd method is applied to analyse the stability of a clamped pole-orthotropic round plate acted by a radial axisymmetrical impact load on its periphery. The analysis is carried out under the assumptions of small deflection and elasticity. The impact load is supposed to have a step impulsive form. A sufficient stability condition is given.

Key words axisymmetrical, impact load, round plate, Liapunov's stability