应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

半线性常微分方程混合边值奇摄动问题的一致差分格式*

白清源[1]　　林鹏程[1]

（林宗池推荐，1993年7月4日收到）

摘　要

本文应用分离奇性法研究半线性常微分方程混合边值奇摄动问题的一致差分格式．我们证明了所构造的 Il'in 型差分格式关于小参数ε的一阶一致收敛性．在本文的最后，我们给出一个数值例子，计算结果与理论分析相符合．

关键词　奇摄动问题　差分格式　一致收敛性　混合边值　半线性常微分方程

一、引　言

关于线性常微分方程混合边值奇摄动问题数值解的研究，已有不少文章，如[1]、[3]．而对于半线性的情况，至今尚无论文发表，主要的难点在于非线性项的处理．

本文考虑如下奇摄动问题：

$$\begin{cases} Lu(x)\equiv\varepsilon u''(x)+a(x)\cdot u'(x)-b(x,u(x))=f(x),\quad 0<x<1 & (1.1)\\ B_0u(0)\equiv\alpha\cdot u(0)-\beta\cdot u'(0)=A & (1.2)\\ B_1u(1)\equiv\gamma\cdot u(1)+\delta\cdot u'(1)=B & (1.3)\end{cases}$$

我们假定：

1° 函数a，b，f关于各自自变量充分可微；

2° $A^*\geqslant a(x)\geqslant a^*>0$，$b_u(x,u(x))\geqslant b^*>0$；

3° α，β，$\delta\geqslant0$，$\gamma>0$，$\alpha+\beta>0$，A，B，A^*，a^*，b^*为常数．

二、微分方程解的性质

引理2.1　设$u(x)$是(1.1)～(1.3)的解，则

$$\max|u(x)|\leqslant C,\qquad 0\leqslant x\leqslant 1$$

其中C是不依赖于x，ε的正常数．在以后的讨论中，C还与网络步长无关，并且在不同地方，C可表示不同的数值．

* 国家和福建省自然科学基金资助项目
1 福州大学计算机系，福州 350002

引理2.2 假设同上，则

$$|u^{(i)}(x)|\leqslant C\{1+\varepsilon^{-i-1}\cdot\exp(-a^*x/2\varepsilon)\},\qquad (i=0,1,2,\cdots)$$

引理2.3 假设同上，则

$$|u^{(i)}(0)|\leqslant C\varepsilon^{-i},\qquad (i=0,1,2,\cdots)$$

且当$\beta\neq 0$时，$|u'(0)|\leqslant C$。

证明 显然，当$i=0$时结论成立。

当$\beta\neq 0$时，由(1.2)即可得$|u'(0)|\leqslant C$。

当$\beta=0$时，对(1.1)积分，得：

$$\varepsilon u'(x)+a(x)\cdot u(x)=H(x)+C_1 \tag{2.1}$$

其中

$$H(x)=\int_0^x[b(t,u(t))+f(t)-a'(t)u(t)]dt,\qquad C_1\text{为积分常数}$$

由此可得：

$$u(x)=u(0)\cdot\exp\left(-\int_0^x\frac{a(t)}{\varepsilon}dt\right)+\varepsilon^{-1}\exp\left[-\int_0^x\frac{a(t)}{\varepsilon}dt\right]$$

$$\cdot\int_0^x[H(t)+C_1]\cdot\exp\left(\int_0^t\frac{a(s)}{\varepsilon}ds\right)dt \tag{2.2}$$

在(2.1)中，令$x=0$，$x=1$ 可得：

$$u'(0)=-\frac{a(0)}{\varepsilon}u(0)+\frac{C_1}{\varepsilon}$$

$$u'(1)=-\frac{a(1)}{\varepsilon}u(1)+\frac{1}{\varepsilon}[H(1)+C_1]$$

再结合(1.3)可知：$|C_1|\leqslant C$。从而$|u'(0)|\leqslant C\varepsilon^{-1}$。

当$i\geqslant 2$时，对(2.2)求导i次，可得引理结论。证毕。

引理2.4 假设同上，则

$$|u^{(i)}(x)|\leqslant C\{1+\varepsilon^{-i}\exp(-a^*x/2\varepsilon)\},\qquad (i=0,1,2,\cdots) \tag{2.3}$$

证明 采用数归法证之。

由引理2.1知，对$i=0$结论成立。

假设对$i-1$，结论成立，即有：

$$|u^{(i-1)}(x)|\leqslant C\{1+\varepsilon^{-i+1}\exp(-a^*x/2\varepsilon)\},\qquad i\geqslant 1$$

对(1.1)两边求$i-1$次导数，得：

$$\varepsilon u^{(i+1)}(x)+a(x)u^{(i)}(x)=G(x,u,u',\cdots,u^{(i-1)}) \tag{2.4}$$

由归纳假设，容易得到：

$$|G|\leqslant C\{1+\varepsilon^{-i+1}\exp(-a^*x/2\varepsilon)\}$$

由(2.4)有：

$$u^{(i)}(x)=u^{(i)}(0)\cdot\exp\left[-\int_0^x\frac{a(t)}{\varepsilon}dt\right]+\varepsilon^{-1}\exp\left[-\int_0^x\frac{a(t)}{\varepsilon}dt\right]$$

$$\cdot\int_0^x G(t,u,u',\cdots,u^{(i-1)})\cdot\exp\left[\int_0^t\frac{a(s)}{\varepsilon}ds\right]dt$$

利用引理2.3的结论，经过计算可得：

$$|u^{(i)}(x)|\leqslant C\{1+\varepsilon^{-i}\cdot\exp(-a^*x/2\varepsilon)\}$$

证毕

综合引理2.1～2.4，就可以将(1.1)～(1.3)的解奇性分离出来。

定理2.1　设$u(x)$是(1.1)～(1.3)的解，则

$$u(x)=\bar{\gamma}\cdot V(x)+Z(x) \tag{2.5}$$

其中，

$$V(x)=\exp(-xa(0)/\varepsilon)$$

$$|\bar{\gamma}|\leqslant\begin{cases}C, & \text{当}\beta=0\text{时}\\ C\varepsilon, & \text{当}\beta\neq 0\text{时}\end{cases}$$

$$|Z^{(i)}(x)|\leqslant C\{1+\varepsilon^{-i+1}\exp(-a^*x/2\varepsilon)\}$$

引进如下辅助问题：

$$\tilde{L}\tilde{u}(x)\equiv\varepsilon\tilde{u}''(x)+a(x)\cdot\tilde{u}'(x)=b(x,u(x))+f(x),\qquad 0<x<1 \tag{2.6}$$

$$B_0\tilde{u}(0)\equiv\alpha\tilde{u}(0)-\beta\cdot\tilde{u}'(0)=A \tag{2.7}$$

$$B_1\tilde{u}(1)\equiv\gamma\tilde{u}(1)+\delta\tilde{u}'(1)=B \tag{2.8}$$

其中，$u(x)$是(1.1)～(1.3)的解。显然，(2.6)～(2.8)与(1.1)～(1.3)同解，即$x\in[0,1]$，$\tilde{u}(x)=u(x)$。从而

$$\tilde{u}(x)=\bar{\gamma}V(x)+Z(x)$$

式中的$V(x)$，$Z(x)$等如前所定义。注意到(2.6)～(2.8)此时是线性问题（相对$\tilde{u}(x)$而言）。

三、差分格式及其一致收敛性

等距划分[0,1]，步长h，$N\cdot h=1$，$x_i=ih$，$i=0$，1，…，N，N是正整数。对(1.1)～(1.3)构造如下 Il'in 型差分格式：

$$\begin{cases}L^hu_i\equiv\varepsilon\sigma_i[u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}]/h^2+a(x_i)\cdot[u_{i+1}-u_{i-1}]/2h\\ \qquad -b(x_i,\ u_i)=f(x_i),\qquad 1\leqslant i\leqslant N-1 & (3.1)\\ B_0^hu_0\equiv\alpha u_0-\beta[u_1-u_0]/h=A & (3.2)\\ B_1^hu_N\equiv\gamma u_N+\delta[u_N-u_{N-1}]/h=B & (3.3)\end{cases}$$

其中，　$\sigma_i=0.5\rho a(x_i)\cdot\coth(0.5\rho a(x_i))$，$\rho=h/\varepsilon$

为证明所需，我们对(2.6)～(2.8)也构造其相应的 Il'in 型差分格式如下：

$$\begin{cases}\tilde{L}^h\tilde{u}_i\equiv\varepsilon\sigma_i[\tilde{u}_{i+1}-2\tilde{u}_i+\tilde{u}_{i-1}]/h^2+a(x_i)\cdot[\tilde{u}_{i+1}-\tilde{u}_{i-1}]/2h\\ \qquad =b(x_i,\ u(x_i))+f(x_i),\qquad 1\leqslant i\leqslant N-1 & (3.4)\\ B_0^h\tilde{u}_0\equiv\alpha\tilde{u}_0-\beta[\tilde{u}_1-\tilde{u}_0]/h=A & (3.5)\\ B_1^h\tilde{u}_N\equiv\gamma\tilde{u}_N+\delta[\tilde{u}_N-\tilde{u}_{N-1}]/h=B & (3.6)\end{cases}$$

其中σ_i即为(3.1)～(3.3)中的指数拟合因子。

引理3.1　若网格函数ω_i满足：

$$\tilde{L}^h\omega_i\leqslant 0,\ 1\leqslant i\leqslant N-1,\ B_0^h\omega_0\geqslant 0,\ B_1^h\omega_N\geqslant 0$$

则　$\omega_i\geqslant 0,\qquad (i=0,1,\cdots,N)$

引理3.2　若$\tilde{u}_i$满足：

$$|\tilde{L}^h\tilde{u}_i|\leqslant K\left\{1+\frac{1}{\max(h,\varepsilon)}\exp\left(-\frac{a^*x_{i-1}}{2\varepsilon}\right)\right\},\qquad 1\leqslant i\leqslant N-1$$

$$|B_0^h\tilde{u}_0|\leqslant K_0\cdot\beta\{1+[1-\exp(-A^*\rho/2)]/h\},\ |B_1^h\tilde{u}_N|\leqslant K_1$$

则有：

$$|\tilde{u}_i|\leqslant C,\qquad 0\leqslant i\leqslant N$$

式中 K_0，K_1，K均为正常数。

证明 不妨设$\Delta=\gamma(\alpha+\beta)+\alpha\cdot\delta=1$。

构造闸函数为：

$$\Phi(x_i)=m_0P_0(x_i)+m_1P_1(x_i)+m_2\cdot\exp(-a^*x_{i-1}/2\varepsilon),\qquad 0\leqslant i\leqslant N$$

其中，$P_0(x)=\gamma\cdot(1-x)+\delta$，$P_1(x)=\alpha x+\beta$，$m_0$，$m_1$，$m_2$为待定正常数。

$$B_0^h\Phi(0)\geqslant m_0+m_2\cdot\beta\cdot[1-\exp(-a^*\rho/2)]/h\cdot\exp(a^*\rho/2)$$

取 $m_0=K_0\cdot\beta$，$m_2=K_0\cdot[1-\exp(-A^*\rho/2)]/[1-\exp(-a^*\rho/2)]\cdot\exp(-a^*\rho/2)$

则有：

$$B_0^h\Phi(0)\geqslant|B_0^h\tilde{u}_0|$$

$$B_1^h\Phi(1)\geqslant m_1-m_2\cdot\delta\cdot\exp((\theta+1)\cdot a^*\rho/2)\cdot\exp(-\bar{\theta}a^*/2\varepsilon),\quad \theta,\bar{\theta}\in(0,1)$$

取 $\bar{\theta}\geqslant(\theta+1)h$，$m_1=K_1+m_2\delta$，则

$$|B_1^h\Phi(1)|\geqslant|B_1^h\tilde{u}_N|$$

$$\tilde{L}^h\exp(-a^*x_{i-1}/2\varepsilon)\leqslant-\frac{C_0}{\max(h,\varepsilon)}\exp(-a^*x_{i-1}/2\varepsilon)$$

C_0为某常数。

$$\tilde{L}^hP_0(x_i)=-\gamma\cdot a(x_i),\quad \tilde{L}^hP_1(x_i)\leqslant\alpha A^*$$

故有：

$$\tilde{L}^h\Phi(x_i)\leqslant-m_0\cdot\gamma\cdot a^*+m_1\cdot\alpha\cdot A^*-m_2\cdot\frac{C_0}{\max(h,\varepsilon)}\exp(-a^*x_{i-1}/2\varepsilon)$$

取

$$m_2=\max\{K_0\cdot[1-\exp(-A^*\rho/2)]/[1-\exp(-a^*\rho/2)]\cdot\exp(-a^*\rho/2),\ K/C_0\}$$

$$m_1=K_1+m_2\delta,\quad m_0=\max\{[K+m_1\alpha A^*]/\gamma a^*,\ K_0\beta\}$$

则

$$\tilde{L}^h\Phi(x_i)\leqslant|\tilde{L}^h\tilde{u}_i|$$

由引理3.1可得：

$$|\tilde{u}_i|\leqslant\Phi(x_i)\leqslant C,\qquad 0\leqslant i\leqslant N$$ 证毕

定义网格函数V_i，Z_i如下($0\leqslant i\leqslant N$)：

$$\begin{cases}\tilde{L}^hV_i=\tilde{L}V(x_i)\\ B_0^hV_0=B_0^hV(0)\\ B_1^hV_N=B_1^hV(1)\end{cases}\quad 和\quad \begin{cases}\tilde{L}^hZ_i=\tilde{L}Z(x_i)\\ B_0^hZ_0=B_0^hZ(0)\\ B_1^hZ_N=B_1^hZ(1)\end{cases}$$

式中函数$V(x)$，$Z(x)$如前所定义。则

$$\tilde{u}_i=\bar{\gamma}V_i+Z_i$$

引理3.3 $|\bar{\gamma}(V(x_i)-V_i)|\leqslant Ch,\quad 0\leqslant i\leqslant N$

证明

$$\tilde{L}^h[V(x_i)-V_i]=\left[\frac{2a(x_i)}{h}\cdot\mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}\rho a(0)\right)\cdot\frac{\mathrm{sh}[0.5\rho(a(x_i)-a(0))]}{\mathrm{sh}(0.5\rho a(x_i))}\right.$$

$$-\frac{a(0)}{\varepsilon}(a(0)-a(x_i))\Big]\cdot V(x_i)$$

由文[2]中的引理4.3可得：

$$|\tilde{L}^h V(x_i)-\tilde{L}V(x_i)|\leqslant\frac{Ch^2}{\varepsilon(h+\varepsilon)}\cdot\exp(-a^*x_i/2\varepsilon)$$

$$\leqslant \text{ch}\left\{1+\frac{1}{\max(h,\varepsilon)}\exp(-a^*x_{i-1}/2\varepsilon)\right\}$$

$$B_0^h(V(0)-V_0)=-\beta\frac{a(0)}{\varepsilon}\cdot\frac{a(0)\rho+\exp(-a(0)\rho)-1}{a(0)\rho}$$

$$|B_0^h(V(0)-V_0)|\leqslant\beta\frac{a(0)}{\varepsilon}(1-\exp(-A^*\rho/2))$$

从而

$$|B_0^h(\bar{\gamma}(V(0)-V_0))|\leqslant\begin{cases}0, & \text{当}\beta=0\text{时}\\ K_0\beta h\cdot\left\{1+\dfrac{1-\exp(-A^*\rho/2)}{h}\right\}, & \text{当}\beta\neq0\text{时}\end{cases}$$

另外，容易得到；

$$|B_1^h(\bar{\gamma}(V(1)-V_N))|\leqslant Ch$$

应用引理3.2可得：

$$|\bar{\gamma}(V(x_i)-V_i)|\leqslant Ch,\qquad 0\leqslant i\leqslant N$$

证毕

引理3.4 $|Z(x_i)-Z_i|\leqslant Ch,\quad 0\leqslant i\leqslant N$.

证明 记 $T_i=\tilde{L}^h(Z(x_i)-Z_i)=\tilde{L}^hZ(x_i)-\tilde{L}Z(x_i)$

由文[2]可得：

$$|T_i|\leqslant C\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}[\varepsilon|Z^{(3)}(t)|+|Z^{(2)}(t)|]dt$$

以定理2.1结果代入上式，可得：

$$|T_i|\leqslant Ch\left\{1+\frac{1}{\max(h,\varepsilon)}\exp(-a^*x_{i-1}/2\varepsilon)\right\}$$

$$|B_0^h(Z(0)-Z_0)|=\beta\left|\frac{Z(h)-Z(0)}{h}-Z'(0)\right|$$

$$\leqslant\beta\int_0^h|Z''(t)|dt$$

$$\leqslant C\beta h\left\{1+\frac{1-\exp(-A^*\rho/2)}{h}\right\}$$

$$|B_1^h(Z(1)-Z_N)|=\gamma\left|\frac{Z(1)-Z(1-h)}{h}-Z'(1)\right|\leqslant Ch$$

仍应用引理3.2可得：

$$|Z(x_i)-Z_i|\leqslant Ch,\qquad 0\leqslant i\leqslant N$$

证毕

定理3.1 设$\tilde{u}_i$，$0\leqslant i\leqslant N$，是差分格式(3.4)～(3.6)的解，$u(x)$是(1.1)～(1.3)的解，则

$$|\tilde{u}_i-u(x_i)|\leqslant Ch,\qquad 0\leqslant i\leqslant N\tag{3.7}$$

证明 由引理3.3、3.4可得；

$$|\tilde{u}_i-\tilde{u}(x_i)|\leqslant Ch,\qquad 0\leqslant i\leqslant N$$

从而

$$|\tilde{u}_i-u(x_i)|\leqslant Ch,\qquad 0\leqslant i\leqslant N$$

证毕

现在讨论下面的差分格式：

$$\begin{cases}\tilde{\tilde{L}}^h W_i\equiv\varepsilon\sigma_i[W_{i+1}-2W_i+W_{i-1}]/h^2+a(x_i)\cdot[W_{i+1}-W_{i-1}]/2h\\ \qquad -b_u(x_i,\eta_i)\cdot W_i,\qquad 1\leqslant i\leqslant N-1 & (3.8)\\ B_0^h W_0\equiv\alpha W_0-\beta[W_1-W_0]/h=0 & (3.9)\\ B_1^h W_N\equiv\gamma W_N+\delta[W_N-W_{N-1}]/h=0 & (3.10)\end{cases}$$

其中，σ_i即为上述的指数拟合因子，η_i的定义见下面。

引理3.5

1° 若$\tilde{\tilde{L}}^h W_i\geqslant 0$，$1\leqslant i\leqslant N-1$，$B_0^h W_0\leqslant 0$，$B_1^h W_N\leqslant 0$，则

$$W_i\leqslant 0,\qquad 0\leqslant i\leqslant N$$

2° $\max|W_i|\leqslant C\cdot\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N-1}|\tilde{\tilde{L}}^h W_i|,\qquad 0\leqslant i\leqslant N$

证明

1° 此结论是显然的。

2° 构造闸函数为：

$$\Phi_i=(-1+\varepsilon^* x_i)\cdot C_1\cdot\max_{1\leqslant i\leqslant N-1}|\tilde{\tilde{L}}^h W_i|\pm W_i$$

其中，C_1为待定常数，ε^*为正常数；$0<\varepsilon^*\leqslant 0.5$。

$$\tilde{\tilde{L}}^h\Phi_i\geqslant\frac{1}{2}b^*\cdot C_1\cdot\max_{1\leqslant i\leqslant N-1}|\tilde{\tilde{L}}^h W_i|\pm\tilde{\tilde{L}}W_i,\qquad 1\leqslant i\leqslant N-1$$

取$C_1\geqslant 2/b^*$，则

$$\tilde{\tilde{L}}^h\Phi_i\geqslant 0,\qquad 1\leqslant i\leqslant N-1$$

$$B_0^h\Phi_0\leqslant 0,$$

$$B_1^h\Phi_N\leqslant 0,\qquad \text{当}0<\varepsilon^*<\gamma/(\gamma+\delta)\text{时}$$

从而，取$\varepsilon^*\leqslant\min(1/2,\ \gamma/(\gamma+\delta))$时，应用1°可得：

$$\Phi_i\leqslant 0,\qquad 0\leqslant i\leqslant N$$

即

$$|W_i|\leqslant C\cdot\max_{1\leqslant i\leqslant N-1}|\tilde{\tilde{L}}^h W_i|,\qquad 0\leqslant i\leqslant N$$

证毕

定理3.2 设u_i，$\tilde{u}_i$，$0\leqslant i\leqslant N$，分别是差分格式(3.1)～(3.3)和(3.4)～(3.6)的解，则

$$|u_i-\tilde{u}_i|\leqslant Ch,\qquad 0\leqslant i\leqslant N \tag{3.11}$$

证明 将(3.1)～(3.3)与(3.4)～(3.6)相减，并利用

$$b(x_i,\ u_i)-b(x_i,\ u(x_i))=b_u(x_i,\ \eta_i)(u_i-u(x_i))$$

这里η_i是 Taylor 展开式余项中的中介值。则有：

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{\tilde{L}}^h(u_i-\tilde{u}_i)=b_u(x_i,\eta_i)\cdot(\tilde{u}_i-u(x_i)),\qquad 1\leqslant i\leqslant N-1\\ &B_0^h(u_0-\tilde{u}_0)=0,\ \ B_1^h(u_N-\tilde{u}_N)=0\end{aligned}\right\}$$

由引理3.5可得：

$$|u_i-\tilde{u}_i|\leqslant C\cdot\max_{1\leqslant i\leqslant N-1}|b_u(x_i,\eta_i)\cdot(\tilde{u}_i-u(x_i))|\leqslant C\cdot\max_{1\leqslant i\leqslant N-1}|\tilde{u}_i-u(x_i)|$$

由(3.7)式，即得：

$$|u_i-\tilde{u}_i|\leqslant Ch,\qquad 0\leqslant i\leqslant N$$

证毕

我们的主要结果是：

定理3.3 设$u(x)$，$u_i(0\leqslant i\leqslant N)$分别是(1.1)～(1.3)和(3.1)～(3.3)的解，则

$$|u_i-u(x_i)|\leqslant Ch,\qquad 0\leqslant i\leqslant N$$

其中C是与x,h,ε无关的正常数。

证明 由绝对值三角不等式有：

$$|u_i-u(x_i)|\leqslant|u_i-\tilde{u}_i|+|\tilde{u}_i-u(x_i)|\leqslant Ch,\qquad 0\leqslant i\leqslant N$$

证毕

注 (3.1)～(3.3)可用迭代法进行求解。参见[4]

四、数 值 例 子

考虑如下第三边值奇摄动问题：

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon u''(x)+a(x)u'(x)-b(x)u(x)=f(x),\qquad 0<x<1\\&u(0)-2u'(0)=1,\quad u(1)+4u'(1)=1\end{aligned}\right\}$$

其中，

$$a(x)=(1+\varepsilon/2)/(1+x),\quad b(x)=1/(2(1+x)^2),\quad f(x)=1/(2(1+x))$$

其精确解为：

$$u(x)=\frac{1+x}{1+\varepsilon}+2M_1\cdot\frac{\sqrt{1+x}}{2+\varepsilon}+M_2\cdot(1+x)^{-1/\varepsilon}$$

这里，

$$M_1=\left[1-\frac{6}{1+\varepsilon}-\frac{1-3/(1+\varepsilon)}{2^{1/\varepsilon}}\right]\cdot(2+\varepsilon)/4\sqrt{2},\quad M_2=\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

计算结果如表1。

表 1

点坐标 \ h \ ε	$h=0.05$		$h=0.01$	
	$\varepsilon=10^{-3}$	$\varepsilon=10^{-6}$	$\varepsilon=10^{-3}$	$\varepsilon=10^{-6}$
	误　差	误　差	误　差	误　差
$x=0$	−1.484239E−2	−1.659727E−2	−1.623154E−3	−3.317535E−3
$x=0.1$	−1.561552E−2	−1.636469E−2	−2.547801E−3	−3.270030E−3
$x=0.2$	−1.544356E−2	−1.618385E−2	−2.520204E−3	−3.232598E−3
$x=0.3$	−1.531386E−2	−1.604384E−2	−2.502263E−3	−3.203273E−3
$x=0.4$	−1.521844E−2	−1.593691E−2	−2.491892E−3	−3.180683E−3
$x=0.5$	−1.515073E−2	−1.585692E−2	−2.488017E−3	−3.163874E−3
$x=0.6$	−1.510572E−2	−1.579887E−2	−2.489030E−3	−3.151477E−3
$x=0.7$	−1.508004E−2	−1.575923E−2	−2.494276E−3	−3.142536E−3
$x=0.8$	−1.506984E−2	−1.573473E−2	−2.502978E−3	−3.136575E−3
$x=0.9$	−1.507354E−2	−1.572371E−2	−2.512959E−3	−3.133893E−3
$x=1.0$	−1.508904E−2	−1.572383E−2	−2.529532E−3	−3.133178E−3

表中计算结果表明与理论分析相符合。

参 考 文 献

[1] E. P. Doolan, J. J. H. Miller and W. H. A. Schilders, *Uniform Numerical Methods for Problems with Initial and Boundary Layers*, Boole Press, Dublin (1980).

[2] R. B. Kellogg and A. Tsan, Analysis of some difference approximations for a singular perturbation problems without turning points, *Math. Comp.*, 32(144) (1978), 1025—1039.

[3] 蔡新、林鹏程，守恒型奇摄动常微分方程混合边值问题的数值解法，华侨大学学报，11(4) (1990), 344—352.

[4] 林平、苏煜城，二阶拟线性奇摄动常微分方程的数值解法，应用数学和力学，10(11) (1989), 955—959.

[5] M. H. Protter and H. F. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations*, Springer-Verlag, New York (1984).

A Uniformly Difference Scheme of Singular Perturbation Problem for a Semilinear Ordinary Differential Equation with Mixed Boundary Value Condition

Bai Qingyuan Lin Pengcheng

(*Fuzhou University, Fuzhou* 350002, *P. R. China*)

Abstract

In this paper, the method of separating singularity is applied to study the uniformly difference scheme of a singular perturbation problem for a semilinear ordinary differential equation with mixed boundary value condition. The uniform convergence on small parameter ε of order one for an Il'in type difference scheme constructed is proved. At the end of the paper, a numerical example is given. The computing results coincide with the theoretical analysis.

Key words singular perturbation problem, differene scheme, uniform convergence, mixed boundary value condition, semilinear ordinary differential equation