

四节点元和八节点元 h -收敛的比较*

段 梅^{2,1} 官本裕¹ 周本宽² 陈大鹏²

(1995年3月2日收到)

摘 要

本文从理论上比较了四边形四节点元和四边形八节点元的 h -收敛性, 得出八节点元较四节点元有较快收敛率的结论, 并通过算例进行了验证。

关键词 有限元 四节点元 八节点元

一、引 言

在有限元分析工作中, 对不规则形状的区域, 常常选用不同的单元去模拟。Babuska曾对三角形单元划分, 从理论上证明了高阶单元具有比低阶线性单元更高的收敛率。当奇异性出现在角的顶点时, 他还证明了高阶元的收敛率与低阶线性单元收敛率之间的关系。然而, 仅仅局限于对三角形单元划分的研究是不够的。要想提高计算效率和精度, 要想研究杂交/混合有限元, 考察四边形高阶元的收敛率, 并给出误差估计式, 是非常必要的。为此, 作者在文[1]的基础上, 进一步探讨了四边形八节点元的 h -收敛问题, 给出了有关的定理, 并通过四边形四节点元和八节点元收敛情况的对比, 得出了八节点元比四节点元具有较快收敛率的结论。作者还通过几个算例, 检验了理论分析的正确性。

二、理 论 推 导

1. 等参变换 $F \in (Q_1)^2$, 单元为四边形八节点元时, h -收敛的误差估计

这时的变换 F 是次参变换, F 如同四节点单元的情形, 因此有同文 [1] 定理 2 同样的结论。

2. 等参变换 $F \in (Q_2)^2$, h -收敛的误差估计

这时等参变换为:

$$\left. \begin{aligned} x &= \sum x_i \psi_i \\ y &= \sum y_i \psi_i \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

* 国家自然科学基金和博士点基金资助项目。

1 岩手大学, 日本盛冈; 2 西南交通大学, 中国成都 610031.

$$\text{其中 } \psi_i = (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (\xi_i \xi + \eta_i \eta - 1) / 4 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

$$\psi_i = (1 - \xi^2) (1 + \eta_i \eta) / 2 \quad (i = 5, 7)$$

$$\psi_i = (1 - \eta^2) (1 + \xi_i \xi) / 2 \quad (i = 6, 8)$$

$$\text{设: } \phi_i = (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) / 4 \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \psi_i - \phi_i &= (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) (\xi_i \xi + \eta_i \eta - 2) / 4 \\ &= - (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) [(1 - \xi_i \xi) + (1 - \eta_i \eta)] / 4 \\ &= - (1 - \xi_i^2 \xi^2) (1 + \eta_i \eta) / 4 - (1 + \xi_i \xi) (1 - \eta_i^2 \eta^2) / 4 \\ &= - (1 - \xi^2) (1 - \eta_i \eta) / 4 - (1 + \xi_i \xi) (1 - \eta^2) / 4 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \end{aligned}$$

$$\therefore \xi_2 = \xi_3 = \xi_6, \quad \xi_1 = \xi_4 = \xi_8, \quad \eta_1 = \eta_2 = \eta_5, \quad \eta_3 = \eta_4 = \eta_7,$$

$$\therefore \psi_1 - \phi_1 = - (\psi_5 + \psi_8) / 2, \quad \psi_2 - \phi_2 = - (\psi_5 + \psi_6) / 2,$$

$$\psi_3 - \phi_3 = - (\psi_6 + \psi_7) / 2, \quad \psi_4 - \phi_4 = - (\psi_7 + \psi_8) / 2.$$

于是,

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^8 x_i \psi_i = \sum_{i=1}^4 x_i \psi_i + \sum_{i=5}^8 x_i \psi_i = \sum_{i=1}^4 x_i \phi_i + \sum_{i=1}^4 x_i (\psi_i - \phi_i) + \sum_{i=5}^8 x_i \psi_i \\ &= \sum_{i=1}^4 x_i \phi_i + [-x_1 (\psi_5 + \psi_8) / 2 - x_2 (\psi_5 + \psi_6) / 2 - x_3 (\psi_6 + \psi_7) / 2 \\ &\quad - x_4 (\psi_7 + \psi_8) / 2] + \sum_{i=5}^8 x_i \psi_i \\ &= \sum_{i=1}^4 x_i \phi_i + [-(x_1 + x_2) \psi_5 / 2 - (x_2 + x_3) \psi_6 / 2 - (x_3 + x_4) \psi_7 / 2 \\ &\quad - (x_1 + x_4) \psi_8 / 2] + \sum_{i=5}^8 x_i \psi_i \\ &= \sum_{i=1}^4 x_i \phi_i + \sum_{i=5}^8 (x_i - \bar{x}_i) \psi_i, \end{aligned}$$

$$\text{其中, } \bar{x}_1 = (x_{i-4} + x_{i-3}) / 2 \quad (i = 5, 6, 7), \quad \bar{x}_8 = (x_1 + x_4) / 2.$$

$$\text{同理得: } y = \sum_{i=1}^4 y_i \phi_i + \sum_{i=5}^8 (y_i - \bar{y}_i) \psi_i,$$

$$\text{其中, } \bar{y}_i = (y_{i-4} + y_{i-3}) / 2 \quad (i = 5, 6, 7), \quad \bar{y}_8 = (y_1 + y_4) / 2.$$

所以, (2.1)式变为:

$$\left. \begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^4 \phi_i x_i + \sum_{i=5}^8 (x_i - \bar{x}_i) \psi_i \\ y &= \sum_{i=1}^4 \phi_i y_i + \sum_{i=5}^8 (y_i - \bar{y}_i) \psi_i \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

这意味着, 四边形八节点元等参变换可表示为两部分: 一部分是属于 $(Q_1)^2$ 的四边形四节点等参元, 另一部分是扰动部分. 也就是说, 四边形八节点等参变换是空间 $(Q_1)^2$ 中的四边形

四节点等参映射 F 的扰动.

于是, 对于形式为(2.1)式的等参变换, 有下面的引理和定理.

引理 若形如(2.1)式的等参变换是正则变换, 已给一族凸四边形等参元 $(K_e, \Sigma_e, \Psi_e)_{e \in N}$, \hat{K} 为等参(正方形)单元, 则对充分小的 h , 存在常数 $C > 0$, 使得:

$$\begin{aligned} |F|_{1, \infty, \hat{K}} &\leq Ch, \quad |F|_{2, \infty, \hat{K}} \leq Ch^2, \quad |F|_{3, \infty, \hat{K}} = 0, \\ |F^{-1}|_{1, \infty, K_e} &\leq Ch^{-1}, \quad |F^{-1}|_{2, \infty, K_e} \leq Ch^{-2}, \\ |J_F|_{0, \infty, \hat{K}} &\leq Ch, \quad |J_F^{-1}|_{0, \infty, K_e} \leq Ch^{-1}. \end{aligned}$$

证明 设(2.2)式为: $x = F(\hat{x}) + e(\hat{x})$, 其中, $e(\hat{x}) = \sum_{i=5}^8 (x_i - \tilde{x}_i) \psi_i$, $\tilde{F}(\hat{x})$ 为四边形四

节点等参变换. 由文[1]的引理3得:

$$\begin{aligned} |\tilde{F}|_{1, \infty, \hat{K}} &\leq Ch, \quad |\tilde{F}|_{2, \infty, \hat{K}} \leq Ch^2, \quad |\tilde{F}|_{3, \infty, \hat{K}} = 0, \\ |\tilde{F}^{-1}|_{1, \infty, K} &\leq Ch^{-1}, \quad |\tilde{F}^{-1}|_{2, \infty, K} \leq Ch^{-1}, \end{aligned}$$

又因为

$$|x_i - \tilde{x}_i| \leq O(h^2), \quad \sum_{i=5}^8 D\psi_i = (-2\xi, -2\eta),$$

$$\sum_{i=5}^8 D^2\psi_i = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \sum_{i=5}^8 D^3\psi_i = 0.$$

所以

$$\sup_{\hat{x} \in \hat{K}} \|\Sigma De(\hat{x})\| = \sup_{\hat{x} \in \hat{K}} \left\| \sum_{i=5}^8 (x_i - \tilde{x}_i) D\psi_i \right\| \leq Ch^2 \sup_{\hat{x} \in \hat{K}} \left\| \sum_{i=5}^8 D\psi_i \right\| \leq Ch^2.$$

从而

$$|F|_{1, \infty, \hat{K}} = \sup_{\hat{x} \in \hat{K}} \|DF(\hat{x})\| \leq |\tilde{F}|_{1, \infty, \hat{K}} + \sup_{\hat{x} \in \hat{K}} \|De(\hat{x})\| \leq Ch,$$

$$|F|_{2, \infty, \hat{K}} = \sup_{\hat{x} \in \hat{K}} \|D^2F(\hat{x})\| \leq \sup_{\hat{x} \in \hat{K}} \|D^2e(\hat{x})\| + |\tilde{F}|_{2, \infty, \hat{K}}$$

$$\leq \sup_{\hat{x} \in \hat{K}} \left\| \sum_{i=5}^8 (x_i - \tilde{x}_i) D^2\psi_i \right\| + Ch^2 \leq Ch^2 \sup_{\hat{x} \in \hat{K}} \left\| \sum_{i=5}^8 D\psi_i \right\| + Ch^2$$

$$\leq Ch^2,$$

$$0 \leq |F|_{3, \infty, \hat{K}} = \sup_{\hat{x} \in \hat{K}} \|D^3F(\hat{x})\| \leq \sup_{\hat{x} \in \hat{K}} \|D^3e(\hat{x})\| + |\tilde{F}|_{3, \infty, \hat{K}}$$

$$\leq Ch^2 \sup_{\hat{x} \in \hat{K}} \left\| \sum_{i=5}^8 D^3\psi_i \right\| = 0,$$

所以, $|F|_{3, \infty, \hat{K}} = 0$.

其余各式的证明与此类似, 故略.

定理 设 $(K_e, \Sigma_e, \Psi_e)_{e \in N}$ 是凸四边形八节点正则等参有限元族, 等参变换 $F \in (Q_2)^2$ 是正则变换, 如果存在 $k \geq 1$, 使得 $\rho_k \subset \hat{\Psi} \subset H^m(\hat{K})$, 则存在与 h 和 u 无关的常数 C , 使得 $\forall u \in H^s(K)$ 成立:

$$|u - \Pi u|_{m, k} \leq Ch^{7/2-m} (|u|_{2, k} + |u|_{3, k}) \quad (2.3)$$

证明 类似于文献[1]定理2的证明(略).

至此，我们解决了四边形等参有限元插值的误差估计问题。从四边形四节点元得到的：

$$|u - \Pi u|_{m, K} \leq Ch^{k+1-m} |u|_{k+1, K},$$

和

$$|u - \Pi u|_{m, K} \leq Ch^{k-m} (|u|_{k, K} + |u|_{k-1, K}) \quad (k \geq m \geq 0; k=2,3)$$

推出

$$|u - \Pi u|_{m, K} \leq Ch^{3-m} (|u|_{2, K} + |u|_{3, K}) \quad (2.4)$$

由(2.3)，(2.4)式对比可见，当 h 充分小时，四边形八节点元比四节点元有较快的收敛率。

三、实 例

下面我们将通过实例^[2-4]来考察上述结论。

例1 考察图1所示具有光滑角的 L -形域问题，材料性质和载荷数据为： $E=1.0$ ， $\nu=0.3$ ， $p=10.0$ （均为SI单位，下同）。

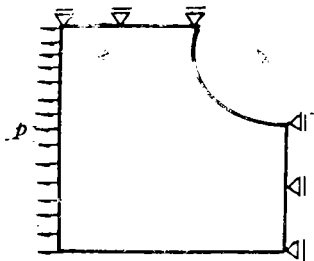


图1 具有光滑角的 L -形域

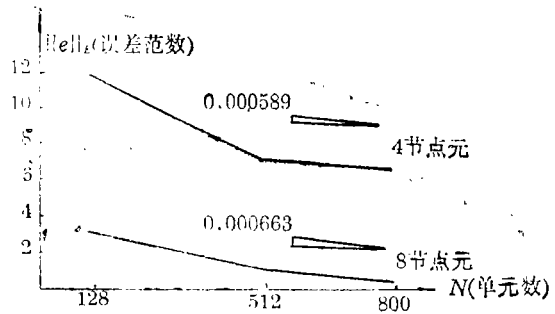


图2 L -形域解的收敛情况

对此问题，分别采用四节点元和八节点元计算，得到如图2所示的收敛曲线。

例2 考虑如图3所示的具有小圆孔板的问题， $E=1.0 \times 10^6$ ， $\nu=0.3$ ， $t=1.0$ ， $p=10.0$ 。其四边形四节点元和四边形八节点元解的误差情况如图4所示。

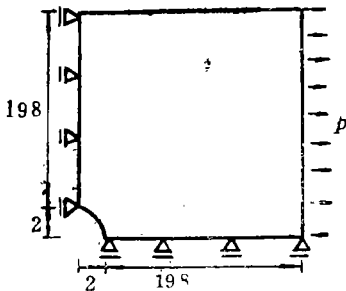


图3 具有小圆孔的板

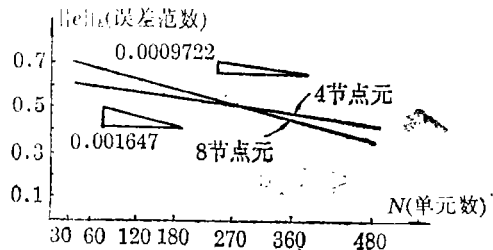


图4 具有小圆孔板问题解的收敛情况

例3 考虑具有奇异性点的 L -形域问题，如图5所示， $E=1.0$ ， $\nu=0.3$ ， $p=1.0$ 。其收敛情况如图6所示。

由图2 图4、图6可见，对问题的四边形划分，四节点元和八节点元的解是收敛的，而八节点元较四节点元有较快的收敛率。

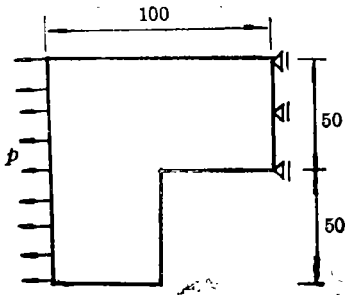


图5 具有奇异性点的L-形域

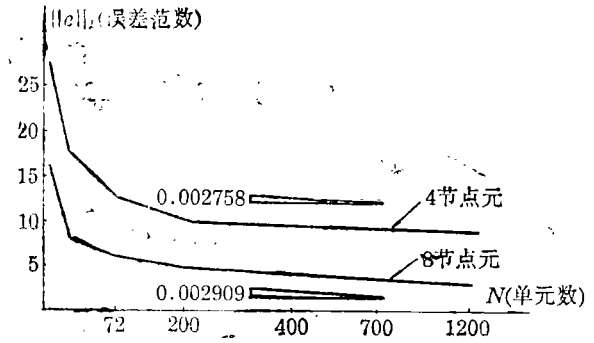


图6 具有奇异性点的L-形域解的收敛情况

四、结 束 语

本文针对四边形八节点单元给出了解的 h -收敛的误差估计式，并与四边形四节点元解的收敛率进行了比较，得出四边形八节点元比四节点元收敛速度较快的结论。实例充分证明了这一事实。

参 考 文 献

- [1] 段梅、宫本裕、陈大鹏、周本宽，四边形单元 h -收敛误差估计的探讨，应用数学和力学，16(12)(1995)，1043—1050.
- [2] I. Babuska et al, *Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations*, John Wiley & Sons, (1986).
- [3] J. Gago, D. W. Kelly and O. C. Zienkiewicz, A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method, Part II—adaptive mesh refinement, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 19(1983), 1621—1656.
- [4] O. C. Zienkiewicz, D. W. Kelly, J. Gago and I. Babuska, Hierarchical finite element approaches, error estimates and adaptive refinement, *In The Mathematics FE and Application* (Ed. J. Whiteman), New York(1981).

A Comparative Study on the h-Convergence of 4-Node and 8-Node Quadrilateral Elements

Duan Mei

(*Iwate University, Morioka, Japan; Southwest Jiaotong
University, Chengdu 610031, P. R. China*)

Miyamoto Yutaka

(*Iwate University Morioka, Japan*)

Zhou Benkuan Chen Dapeng

(*Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, P.R. China*)

Abstract

The present paper is mainly concerned theoretically with the comparative study on h-convergence of 4-node versus 8-node quadrilateral elements. It was found by the present authors that 8-node quadrilateral elements provided favourably enhance convergence rate over the 4-node ones. The fact was further justified via numerical examinations.

Key words finite element, 4-node quadrilateral element, 8-node quadrilateral element