应用数学和力学，第17卷 第1期（1996年1月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

# 关于高阶常系数线性中立型方程周期解的讨论

司 建 国[1]

（林宗池推荐，1995年2月28日收到）

**摘　要**

本文讨论高阶常系数线性中立型方程的周期解问题，作者利用 Fourier 级数理论给出周期解存在，唯一的充分必要条件，所得结果包含和推广了文献[1]中的结果。

**关键词**　周期解　中立型方程　存在性　唯一性　充分必要条件

## 一、引　言

在本文中，我们研究高阶常系数线性中立型方程

$$x^{(k)}(t)+\sum_{i=1}^{k}a_ix^{(k-i)}(t)+\sum_{j=0}^{k}b_jx^{(k-j)}(t-h_j)=f(t) \tag{1.1}$$

的周期解问题，其中$a_i$，$b_j$，$h_j\geqslant 0(i=1,2,\cdots,k;\ j=0,1,\cdots,k)$是常数，$f(t)$是以$2\pi$为周期的$k-1$阶连续可微函数，设其展开式为

$$f(t)=k_0+\sum_{n=1}^{\infty}(k_n\cos nt+l_n\sin nt) \tag{1.2}$$

这里$k_0$，$k_n$，$l_n$是其Fourier系数，我们的结果将[1]中的工作推广到了$k$阶且具有不同时滞的方程。

## 二、主要结果及证明

**定理1**　设 $|b_0|<\frac{1}{2}$，则方程(1.1)存在以$2\pi$为周期的$k-1$阶连续可微周期解的充分必要条件是对一切自然数$n$，关于$c_0$，$c_n$，$d_n$的代数方程组

$$\left.\begin{aligned}&(a_k+b_k)c_0=k_0\\&p(n)c_n+q(n)d_n=k_n\\&-q(n)c_n+p(n)d_n=l_n\end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

1 滨州师专，山东滨州　256604。

有解，其中

$$p(n)=n^k\cos\frac{k\pi}{2}+\sum_{i=1}^{k-1}a_in^{k-i}\cos\frac{(k-i)\pi}{2}+a_k$$

$$+\sum_{i=0}^{k-1}b_in^{k-i}\cos\left[\frac{(k-i)\pi}{2}+nh_i\right]+b_k\cos nh_k,$$

$$q(n)=n^k\sin\frac{k\pi}{2}+\sum_{i=1}^{k-1}a_in^{k-i}\sin\frac{(k-i)\pi}{2}$$

$$+\sum_{i=0}^{k-1}b_in^{k-i}\sin\left[\frac{(k-i)\pi}{2}+nh_i\right]-b_k\sin nh_k$$

**证明** 设$x(t)$是以$2\pi$为周期的$k-1$阶连续可微周期解，其Fourier展开式为

$$x(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos nt+d_n\sin nt) \tag{2.2}$$

则我们有

$$x^{(m)}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[n^m\left(c_n\cos\frac{m\pi}{2}+d_n\sin\frac{m\pi}{2}\right)\cos nt\right.$$

$$\left.+n^m\left(d_n\cos\frac{m\pi}{2}-c_n\sin\frac{m\pi}{2}\right)\sin nt\right]\qquad(m=1,2,\cdots,k) \tag{2.3}$$

将(1.2)，(2.2)和(2.3)代入方程(1.1)，并整理得

$$(a_k+b_k)c_0+\sum_{n=1}^{\infty}[(p(n)c_n+q(n)d_n)\cos nt$$

$$+(-q(n)c_n+p(n)d_n)\sin nt]=k_0+\sum_{n=1}^{\infty}(k_n\cos nt+l_n\sin nt).$$

比较上式两端的系数得

$$\left.\begin{aligned}&(a_k+b_k)c_0=k_0\\&p(n)c_n+q(n)d_n=k_n\\&-q(n)c_n+p(n)d_n=l_n\end{aligned}\right\}$$

这就表明方程组(2.1)有解，于是必要性得证。

再证充分性。

设方程组(2.1)有解，考察下列诸三角级数：

$$c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos nt+d_n\sin nt)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[n^m\left(c_n\cos\frac{m\pi}{2}+d_n\sin\frac{m\pi}{2}\right)\cos nt+\right. \tag{2.4}$$

$$+n^m\left(d_n\cos\frac{m\pi}{2}-c_n\sin\frac{m\pi}{2}\right)\sin nt\Big] \qquad (m=1,2,\cdots,k-1)$$

我们证明这$k$个级数是收敛的.

由方程组(2.1)容易推得

$$|p(n)||c_n|-|q(n)||d_n|\leqslant|k_n| \tag{2.5}$$

$$|p(n)||d_n|-|q(n)||c_n|\leqslant|l_n| \tag{2.6}$$

$$|q(n)||d_n|-|p(n)||c_n|\leqslant|k_n| \tag{2.7}$$

$$|q(n)||c_n|-|p(n)||d_n|\leqslant|l_n| \tag{2.8}$$

由(2.5)和(2.6)可得

$$(|p(n)|-|q(n)|)(|c_n|+|d_n|)\leqslant|k_n|+|l_n| \tag{2.9}$$

由(2.7)和(2.8)可得

$$(|q(n)|-|p(n)|)(c_n|+|d_n|)\leqslant|k_n|+|l_n| \tag{2.10}$$

又因为$|b_0|<\frac{1}{2}$，所以存在充分大的自然数$N$，当$n\geqslant N$时，有

$$n^k(1-2|b_0|)-\sum_{i=1}^{k}(|a_i|+2|b_i|+1)n^{k-i}\geqslant 0 \tag{2.11}$$

另一方面，注意到

$$|p(n)|-|q(n)|\geqslant n^k\left(\left|\cos\frac{k\pi}{2}\right|-\left|\sin\frac{k\pi}{2}\right|-2|b_0|\right)$$
$$-\sum_{i=1}^{k}(|a_i|+2|b_i|)n^{k-i} \tag{2.12}$$

$$|q(n)|-|p(n)|\geqslant n^k\left(\left|\sin\frac{k\pi}{2}\right|-\left|\cos\frac{k\pi}{2}\right|-2|b_0|\right)$$
$$-\sum_{i=1}^{k}(|a_i|+2|b_i|)n^{k-i} \tag{2.13}$$

于是，当$k$为偶数时，由(2.11)和(2.12)可推出

$$|p(n)|-|q(n)|\geqslant n^k(1-2|b_0|)-\sum_{i=1}^{k}(|a_i|+2|b_i|)n^{k-i}$$

$$\geqslant\sum_{i=1}^{k}n^{k-i}\geqslant n^m \qquad (m=1,2,\cdots,k-1,\ n\geqslant N)$$

当$k$为奇数时，由(2.11)和(2.13)可推出

$$|q(n)|-|p(n)|\geqslant n^k(1-2|b_0|)-\sum_{i=1}^{k}(|a_i|+2|b_i|)n^{k-i}$$

$$\geqslant\sum_{i=1}^{k}n^{k-i}\geqslant n^m \qquad (m=1,2,\cdots,k-1,n\geqslant N)$$

于是，再根据(2.9)和(2.10)便可推得对任意固定的自然数$k$，有

$$n^m(|c_n|+|d_n|)\leqslant|k_n|+|l_n| \qquad (m=1,2,\cdots,k-1,n\geqslant N) \tag{2.14}$$

又由于对$m=1,2,\cdots,k-1$，有

$$|k_n|+|l_n|=\frac{1}{n^m}(|n^m k_n|+|n^m l_n|)$$

$$\leqslant\frac{1}{2n^{2m}}+(|n^m k_n|^2+|n^m l_n|^2) \qquad (n\geqslant N)$$

因此由(2.14)可得

$$n^m(|c_n|+|d_n|)\leqslant\frac{1}{2n^{2m}}+(|n^m k_n|^2+|n^m l_n|^2) \qquad (n\geqslant N)$$

此外，注意到

$$f^{(m)}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big[n^m\Big(k_n\cos\frac{m\pi}{2}+l_n\sin\frac{m\pi}{2}\Big)\cos nt$$

$$+n^m\Big(l_n\cos\frac{m\pi}{2}-k_n\sin\frac{m\pi}{2}\Big)\sin nt\Big] \qquad (m=1,2,\cdots,k-1)$$

可知 $n^m\Big(k_n\cos\dfrac{m\pi}{2}+l_n\sin\dfrac{m\pi}{2}\Big)$与 $n^m\Big(l_n\cos\dfrac{m\pi}{2}-k_n\sin\dfrac{m\pi}{2}\Big)$是 $f^{(m)}(t)\ (m=1,2,\cdots,k-1)$的Fourier系数，由Bessel 不等式可得

$$\sum_{n=N}^{s}(|n^m k_n|^2+|n^m l_n|^2)=\sum_{n=N}^{s}\Big[\Big|n^m\Big(k_n\cos\frac{m\pi}{2}+l_n\sin\frac{m\pi}{2}\Big)\Big|^2$$

$$+\Big|n^m\Big(l_n\cos\frac{m\pi}{2}-k_n\sin\frac{m\pi}{2}\Big)\Big|^2\Big]\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f^{(m)}(t)]^2dt,$$

其中 $m=1,2,\cdots,k-1;s=N,N+1,\cdots$.此表明级数 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}(|n^m k_n|^2+|n^m l_n|^2)$ 是收敛的，又级数$\sum\limits_{n=N}^{\infty}\dfrac{1}{2m^{2m}}$收敛，于是$\sum\limits_{n=N}^{\infty}[n^m(|c_n|+|d_n|]$ 收敛，从而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[n^m(|c_n|+|d_n|)]$收敛$(m=1,2,\cdots,k-1)$.

因为

$$|c_n\cos nt+d_n\sin nt|\leqslant|c_n|+|d_n|\leqslant n^m(|c_n|+|d_n|),$$

$$\Big|n^m\Big(c_n\cos\frac{m\pi}{2}+d_n\sin\frac{m\pi}{2}\Big)\cos nt+n^m\Big(d_n\cos\frac{m\pi}{2}-c_n\sin\frac{m\pi}{2}\Big)\sin nt\Big|$$

$$=\Big|n^m\cos\Big(\frac{m\pi}{2}+nt\Big)c_n+n^m\sin\Big(\frac{m\pi}{2}+nt\Big)d_n\Big|$$

$$\leqslant n^m(|c_n|+|d_n|)$$

于是可知三角级数

$$c_0+\sum_{n=1}(c_n\cos nt+d_n\sin nt)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[n^m\left(c_n\cos\frac{m\pi}{2}+d_n\sin\frac{m\pi}{2}\right)\cos nt\right.$$
$$\left.+n^m\left(d_n\cos\frac{m\pi}{2}-c_n\sin\frac{m\pi}{2}\right)\sin nt\right].$$

$(m=1,2,\cdots,k-1)$均为绝对收敛和一致收敛。

记

$$x(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos nt+d_n\sin nt).$$

则有

$$x^{(m)}(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[n^m\left(c_n\cos\frac{m\pi}{2}+d_n\sin\frac{m\pi}{2}\right)\cos nt\right.$$
$$\left.+n^m\left(d_n\cos\frac{m\pi}{2}-c_n\sin\frac{m\pi}{2}\right)\sin nt\right]\qquad(m=1,2,\cdots,k-1)$$

不难验证$x(t)$满足(1.1)。从而$x(t)$是方程(1.1)的以$2\pi$为周期的$k-1$阶连续可微周期解，证毕。

**定理2** 设 $|b_0|<\frac{1}{2}$，则方程(1.1)存在唯一的以$2\pi$为周期的$k-1$阶连续可微周期解的充要条件是

$$\left.\begin{aligned}&a_k+b_k\neq 0\\&p^2(n)+q^2(n)\neq 0\end{aligned}\right\}\tag{2.15}$$

**证** 因为(2.15)是代数方程组(2.1)有唯一解的充分必要条件，由此即可推证定理2。

设$\delta$是代数方程

$$x^k(1-|b_0|)-\sum_{i=1}^{k}(|a_i|+|b_i|)x^{k-i}=0\tag{2.16}$$

的最大正根，则我们可得到

**理定3** 若 $|b_0|<\frac{1}{2}$，$a_k+b_k\neq 0$，$\delta<1$则方程(1.1)存在唯一的以$2\pi$为周期的$k-1$阶连续可微周期解。

**证** 因为当$k$为偶数时，有

$$|p(n)|=\left|n^k(1+b_0\cos nh_0)\cos\frac{k\pi}{2}\right.$$
$$+\sum_{i=1}^{k-1}\left[a_i\cos\frac{(k-i)\pi}{2}+b_i\cos\left(\frac{(k-i)\pi}{2}+nh_i\right)\right]n^{k-i}$$
$$\left.+a_k+b_k\cos nh_k\right|\geqslant n^k(1-|b_0|)$$
$$-\sum_{i=1}^{k}(|a_i|+|b_i|)n^{k-i}\to+\infty\qquad(n\to+\infty),$$

当$k$为奇数时，有

$$|q(n)|=\left|n^k(1+b_0\cos nh_0)\sin\frac{k\pi}{2}\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{k-1}\left[a_i\sin\frac{(k-i)\pi}{2}+b_i\sin\left(\frac{(k-i)\pi}{2}+nh_i\right)n^{k-i}\right]$$

$$\left.-b_k\sin nh_k\right|\geqslant n^k(1-|b_0|)-\sum_{i=1}^{k-1}(|a_i|+|b_i|)n^{k-i}-|b_k|$$

$$\geqslant n^k(1-|b_0|)-\sum_{i=1}^{k}(|a_i|+|b_i|)n^{k-i}\to+\infty\quad(n\to+\infty).$$

所以对任意固定的自然数$k$，在定理2中只需验证对有限个自然数(2.15)成立即可，又因为方程(2.16)的最大正根$\delta<1$，所以方程(2.16)无自然数解．由此可知，当$k$为偶数时$|p(n)|\neq 0(n=1,2,\cdots)$．当$k$为奇数时，$|q(n)|\neq 0(n=1,2,\cdots)$．于是，对任意自然数$k$，有

$$p^2(n)+q^2(n)\neq 0\qquad(n=1,2,\cdots).$$

根据定理2，方程(1.1)存在唯一的以$2\pi$为周期的$k-1$阶连续可微周期解．定理3证讫．

对于$k=3,4$，且$h_i=2m\pi(m\in N,i=0,1,2,3,4)$，我们可得更为简洁的结果．

**定理4** 在方程(1.1)中，设$k=3$，$h_i=2m\pi$ $(m\in N$，$i=0,1,2,3)$，若$|b_0|<\frac{1}{2}$，$a_3+b_3\neq 0$，且下列条件之一成立：

(i) $a_1+b_1=0$;

(ii) $a_1+b_1\neq 0$，$(a_1+b_1)(a_3+b_3)<0$;

(iii) $a_1+b_1\neq 0$，$(a_1+b_1)(a_3+b_3)>0$，$\sqrt{\frac{a_3+b_3}{a_1+b_1}}$不是自然数；

(iv) $a_2+b_2<0$;

(v) $a_2+b_2>0$，$\sqrt{\frac{a_2+b_2}{1+b_0}}$不是自然数．

则方程(1.1)存在唯一的以$2\pi$为周期的二阶连续可微周期解．

**证** 当$k=3$，$h_i=2m\pi$ $(m\in N,i=0,1,2,3)$时，我们有

$$p(n)=-(a_1+b_1)n^2+a_3+b_3,$$
$$q(n)=n[-(1+b_0)n^2+a_2+b_2].$$

于是，当条件(i),(ii)和(iii)之一满足时，$|p(n)|\neq 0$；当条件(iv)和(v)满足时，$|q(n)|\neq 0$．即当条件(i)～(v)之一满足时，总有

$$p^2(n)+q^2(n)\neq 0\qquad(n=1,2,\cdots).$$

由定理2，方程(1.1)存在唯一的以$2\pi$为周期的二阶连续可微周期解．

**定理5** 在方程(1.1)中，设$k=4$，$h_i=2m\pi$ $(m\in N$，$i=0,1,2,3,4)$，如果$|b_0|<1$，那么方程(1.1)存在以$2\pi$为周期的三阶连续可微周期解的充分必要条件是对一切自然数$n$，关于$c_0$，$c_n$，$d_n$的代数方程组

$$\left.\begin{aligned}&(a_4+b_4)c_0=k_0\\&p(n)c_n+q(n)d_n=k_n\\&-q(n)c_n+p(n)d_n=l_n\end{aligned}\right\}\qquad(2.17)$$

有解，其中

$$p(n)=(1+b_0)n^4-(a_2+b_2)n^2+a_4+b_4,$$
$$q(n)=-(a_1+b_1)n^3+(a_3+b_3)n.$$

**证明** 设$x(t)$是以$2\pi$为周期的三阶连续可微周期解，且有形如(2.2)式的Fourier 展开式。与定理1的必要性的证明类似可证本定理的必要性。

下证充分性。

设方程组(2.17)有解，考察下列诸三角级数：

$$\left.\begin{aligned}&c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos nt+d_n\sin nt)\\&\sum_{n=1}^{\infty}\Big[n^m\Big(c_n\cos\frac{m\pi}{2}+d_n\sin\frac{m\pi}{2}\Big)\cos nt\\&\quad+n^m\Big(d_n\cos\frac{m\pi}{2}-c_n\sin\frac{m\pi}{2}\Big)\sin nt\Big]\qquad(m=1,2,3)\end{aligned}\right\}\tag{2.18}$$

我们证明这四个级数是收敛的。

由方程组(2.17)，类似于定理1中的证明可得到

$$(|p(n)|-|q(n)|)(|c_n|+|d_n)\leqslant|k_n|+|l_n|\tag{2.19}$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}|p(n)|-|q(n)|&=|(1+b_0)n^4-(a_2+b_2)n^2+a_4+b_4|\\&-|-(a_1+b_1)n^3+(a_3+b_3)n|\geqslant(1-|b_0|)n^4\\&-\sum_{i=1}^{4}(|a_i|+|b_i|)n^{4-i}\end{aligned}\tag{2.20}$$

又由于$|b_0|<1$，所以必存在充分大的自然数$N$，当$n\geqslant N$时，有

$$(1-|b_0|)n^4-\sum_{i=1}^{4}(|a_i|+|b_i|+1)n^{4-i}\geqslant 0$$

再考虑到(2.20)，便得

$$|p(n)|-|q(n)|\geqslant\sum_{i=1}^{4}n^{4-i}\geqslant n^m\qquad(m=1,2,3,n\geqslant N)$$

因而，根据(2.19)，用与定理1类似的方法可证得(2.18)式中的四个级数均为绝对收敛和一致收敛，并且容易验证

$$x(t)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n\cos nt+d_n\sin nt)$$

满足方程(1.1)，从而$x(t)$是方程(1.1)的以$2\pi$为周期的三阶连续可微的周期解。

**定理6** 在定理5的条件下，方程(1.1)存在唯一的以$2\pi$为周期的三阶连续可微周期解的充要条件是

$$\left.\begin{aligned}&a_4+b_4\neq 0\\&p^2(n)+q^2(n)\neq 0\quad(n=1,2,\cdots)\end{aligned}\right\}\tag{2.21}$$

**证** 注意到条件(2.21)是方程组(2.17)有唯一解的充要条件，根据定理 5 即可推证本定理。

**定理7** 在方程(1.1)中，设$k=4$，$h_i=2m\pi$ $(m\in N,\ i=0,1,2,3,4)$，$|b_0|<1$，$a_4+b_4\neq 0$，且下列条件之一成立：

(i) $\dfrac{|a_2|+|b_2|+\sqrt{(|a_2|+|b_2|)^2+4(1-|b_0|)(|b_4|+|b_4|)}}{2(1-|b_0|)}<1$，

(ii) $a_1+b_1=0$，$a_3+b_3\neq 0$；

(iii) $a_1+b_1\neq 0$，$a_3+b_3=0$；

(iv) $a_1+b_1\neq 0$，$a_3+b_3\neq 0$，$(a_1+b_1)(a_3+b_3)<0$；

(v) $a_1+b_1\neq 0$，$a_3+b_3\neq 0$，$(a_1+b_1)(a_3+b_3)>0$，$\sqrt{\dfrac{a_3+b_3}{a_1+b_1}}$不是自然数。

则方程(1.1)存在唯一的以$2\pi$为周期的三阶连续可微周期解。

**证** 因为

$$p(n)=(1+b_0)n^4-(a_2+b_2)n^2+a_4+b_4,$$
$$q(n)=-(a_1+b_1)n^3+(a_3+b_3)n.$$

所以，由条件(i)成立可推出$|p(n)|\neq 0(n=1,2,\cdots)$。由条件 (ii)～(v) 之一成立均可推出$|q(n)|\neq 0(n=1,2,\cdots)$。从而条件(i)～(v)之一成立时，均有

$$p^2(n)+q^2(n)\neq 0 \qquad (n=1,2,\cdots).$$

由定理6，方程(1.1)存在唯一的以$2\pi$为周期的三阶连续可微周期解。

**注1** 当$k=2$时可得到与[1]中的定理4相同的结果。

**注2** 如果$f(t)$是以$2T$为周期的$k-1$阶连续函数，可作类似的讨论。

**例1** 中立型方程

$$x'''(t)+\frac{3}{160}x''(t)-\frac{7}{160}x'(t)+\frac{1}{160}x(t)+\frac{1}{2}x'''(t-h_0)$$
$$-\frac{7}{160}x''(t-h_1)+\frac{3}{160}x'(t-h_2)-\frac{3}{320}x(t-h_3)=\sin t$$

满足定理3的全部条件，因此有唯一的$2\pi$为周期的二阶连续可微周期解。

当$h_i=2\pi(i=0,1,2,3)$时，上述方程显然满足定理4的条件(iv)。

**例2** 中立型方程

$$x^{(4)}(t)-2x^{(3)}(t)+\frac{2}{24}x^{(2)}(t)+3x'(t)+\frac{1}{32}x(t)+\frac{1}{2}x^{(4)}(t-h_0)$$
$$+2x^{(3)}(t-h_1)-\frac{1}{24}x''(t-h_2)-2x'(t-h_3)+\frac{1}{32}x(t-h_4)=\cos t$$

满足定理7的条件(i)、(ii)、因此有唯一的以$2\pi$为周期的三阶连续可微周期解。

我们也可以举出满足定理7的其它条件的例，限于篇幅，此不赘述。

## 参 考 文 献

[1] 章毅、张毅，关于二阶常系数线性中立型方程的周期解，数学学报，33(4)(1990)， 517—520.
[2] R. Bellman and K. L. Cook, *Differential-Difference Equations*, New York and London (1963).
[3] 司建国，两类线性泛函微分方程解析解的存在性，应用数学学报，14(2)(1991)，262—276.

# Discussion on the Periodic Solutions for Linear Equation of Neutral Type with Constant Coefficients

Si Jianguo

*(Binzhou Teachers' College, Binzhou* 256604, *Shandong P. R. China)*

**Abstract**

In this paper we apply the theory of Fourier Series to give some necessary and sufficient conditions of the existence of periodic solutions for linear equations of neutral type with constant coefficients[1].

**Key words** periodic solutions, Fourier series,necessary and sufficiont conditions