应用数学和力学，第17卷第1期（1996年1月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

光测弹性理论中的耦联变分原理和广义耦联变分原理

付 宝 连[1]

（钱伟长推荐，1993年11月22日收到）

摘 要

在本文中，应用拉格朗日乘子法和高阶拉格朗日乘子法[1]，我们系统地导出了光测弹性理论中的耦联势能原理，耦联余能原理和具有二类和三类变量的广义耦联势能原理和广义耦联余能原理。

关键词 拉格朗日乘子法 耦联系统 耦联变分原理 光测弹性理论

一、引 言

在光测弹性理论中，存在一重要学科性问题，那就是泊松比ν对冻结应力法精度的影响的问题（此后称为ν影响问题）。

为了解决这一问题，在以前的文章[2]中，我们提出了光测弹性理论中耦联系统的变分原理。

在本文中，应用拉格朗日乘子法，我们系统地导出了耦联势能原理，耦联余能原理和具有两类和三类变量的广义耦联势能原理和广义耦联余能原理。

我们看到，与文章[2]比较，本文具有，首先，用拉格朗日乘子法推导这些耦联变分原理的过程具有程序化的特点；其次，我们给出了具有二类变量广义耦联变分原理的更完整形式；第三，应用高阶拉格朗日乘子法，我们第一次给出了具有三类变量的广义耦联变分原理。

最后，我们必须指出，为了完全解决ν影响问题，必须解决一系列的诸如耦联有限元法，分区耦联变分原理等问题。我们非常有兴趣在以后的文章中讨论这些问题。

二、基 本 方 程

对小变形物体，具有如下基本方程

$$\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (x_i\in V) \tag{2.1}$$

$$\sigma_{ij}n_j=\bar{p}_i \qquad (x_i\in S_p) \tag{2.2}$$

1 燕山大学，秦皇岛 066004

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \qquad (x_i\in V) \tag{2.3}$$

$$u_i=\bar{u}_i \qquad (x_i\in S_u) \tag{2.4}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{\partial A}{\partial e_{ij}}=\sigma_{ij} & (2.5\mathbf{a})\\[2ex] \dfrac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}}=e_{ij} & (2.5\mathbf{b})\end{array}\right\} \quad (x_i\in V)$$

耦联系统的基本方程为

$$\sigma_{2ij,j}-\sigma_{1ij,j}=0 \qquad (x_i\in V) \tag{2.6}$$

$$\sigma_{2ij}n_j-\sigma_{1ij}n_j=0 \qquad (x_i\in S_p) \tag{2.7}$$

$$u_{2i}-u_{1i}=0 \qquad (x_i\in S_u) \tag{2.8}$$

三、耦 联 势 能 原 理

应用加权余量法，据式(2.6)和(2.7)我们得到

$$\delta\Pi^*_{cp}=\iiint_V(\sigma_{2ij,j}-\sigma_{1ij,j})C_i dV+\iint_{S_p}(\sigma_{2ij}n_j-\sigma_{1ij}n_j)D_i dS =0 \tag{3.1}$$

其中 C_i和D_i为任意变量.

如设$C_i=-\delta u_{2i}$，则式(3.1)成为

$$\delta\Pi^*_{cp}=-\iiint_V(\sigma_{2ij,j}-\sigma_{1ij,j})\delta u_{2i}dV+\iint_{S_p}(\sigma_{2ij}n_j -\sigma_{1ij}n_j)D_i dS=0 \tag{3.2}$$

由于u_{2i}是容许位移，故有

$$\begin{aligned}\iiint_V(\sigma_{2ij,j}-\sigma_{1ij,j})\delta u_{2i}dV&=\iint_{S_p+S_u}(\sigma_{2ij}-\sigma_{1ij})n_j\delta u_{2i}dS\\ &-\iiint_V(\sigma_{2ij}-\sigma_{1ij})\frac{1}{2}(\delta u_{2i,j}+\delta u_{2j,i})dV=\iint_{S_p}(\sigma_{2ij}-\sigma_{1ij})n_j\delta u_{2i}dS\\ &-\iiint_V(\sigma_{2ij}-\sigma_{1ij})\delta e_{2ij}dV\end{aligned} \tag{3.3}$$

将(3.3)代入(3.1)之后，(3.1)为

$$\delta\Pi^*_{cp}=\iiint_V(\sigma_{2ij}-\sigma_{1ij})\delta e_{2ij}dV+\iint_{S_p}(\sigma_{2ij}-\sigma_{1ij})n_j\cdot(-\delta u_{2i}+D_i)dS=0 \tag{3.4}$$

如设$D_i=\delta u_{2i}$且利用物理条件(2.5a)，我们最后得到

$$\Pi_{cp}=\iiint_V(A_2-\sigma_{1ij}e_{2ij})dV \tag{3.5}$$

式(3.5)被称为耦联势能.

对e_{2ij}取泛函(3.5)的极值且注意到u_{2i}是容许的，我们得到

$$\delta\Pi_{cp}=-\iiint_V\left[\left(\frac{\partial A_2}{\partial e_{2ij}}\right)_{,j}-\sigma_{1ij,j}\right]\delta u_{2i}dV+\iint_{S_p}\left(\frac{\partial A_2}{\partial e_{2ij}}-\sigma_{1ij}\right)n_j\delta u_{2i}dS=0 \tag{3.6}$$

据变分法预备定理，则有

$$\left(\frac{\partial A_2}{\partial e_{2ij}}\right)_{,j}-\sigma_{1ij,j}=0 \qquad (x_i\in V) \tag{3.7}$$

$$\left(\frac{\partial A_2}{\partial e_{2ij}}\right)n_j-\sigma_{1ij}n_j=0 \qquad (x_i\in S_p) \tag{3.8}$$

满足物理条件(2.5a)，方程(3.7)和(3.8)为

$$\sigma_{2ij,j}-\sigma_{1ij,j}=0 \qquad (x_i\in V) \tag{3.9}$$

$$\sigma_{2ij}n_j-\sigma_{1ij}n_j=0 \qquad (x_i\in S_p) \tag{3.10}$$

易于证明，泛函(3.5)取极小，故该证明从略.

四、耦 联 余 能 原 理

用和前第三节相似的方法，我们能够得到耦联余能

$$\Pi_{cc}=\iiint_V(B_2-e_{1ij}\sigma_{2ij})dV \tag{4.1}$$

它的欧拉方程和自然边界条件为

$$\frac{\partial B_2}{\partial\sigma_{2ij}}-\frac{1}{2}(u_{2i,j}+u_{2j,i})=0 \qquad (x_i\in V) \tag{4.2}$$

$$u_{2i}-u_{1i}=0 \qquad (x_i\in S_u) \tag{4.3}$$

如果物理条件(2.5b)被满足，则(4.2)成为

$$e_{2ij}-\frac{1}{2}(u_{2i,j}+u_{2j,i})=0 \qquad (x_i\in V) \tag{4.4}$$

五、具有二类变量的广义耦联势能原理

耦联势能(3.5)是在条件(2.3)和(2.4)下获得的. 为清除(2.3)和(2.4)的条件限制，我们用拉格朗日乘子法构造一新的广义泛函

$$\Pi^{*}_{gcp}=\iiint_V(A_2-\sigma_{1ij}e_{2ij})dV-\iint_{S_u}(u_{2i}-u_i)\mu_{2i}dS-\iiint_V\left[e_{2ij}-\frac{1}{2}(u_{2i,j}+u_{2j,i})\right]\lambda_{2ij}dV \tag{5.1}$$

其中 μ_{2i}和λ_{2ij}为拉格朗日乘子.

取泛函(5.1)对u_{2i}，e_{2ij}，μ_{2i}和λ_{2ij}的驻值，我们得到

$$\iiint_V\left\{\left[\left(\frac{\partial A_2}{\partial e_{2ij}}-\sigma_{1ij}\right)-\lambda_{2ij}\right]\delta e_{2ij}-\left[e_{2ij}-\frac{1}{2}(u_{2i,j}+u_{2j,i})\right]\cdot\delta\lambda_{2ij}-\lambda_{2ij,j}\delta u_{2i}\right\}dV-\iint_{S_u}(u_{2i}-u_{1i})\delta\mu_{2i}dS$$

$$+\iint_{S_u}(\lambda_{2ij}n_j-\mu_{2i})\delta u_{2i}dS+\iint_{S_p}\lambda_{2ij}n_j\delta u_{2i}dS=0 \tag{5.2}$$

据变分法预备定理，则有

$$\frac{\partial A_2}{\partial e_{2ij}}-\sigma_{1ij}=\lambda_{2ij} \qquad (x_i\in V) \tag{5.3}$$

$$e_{2ij}-\frac{1}{2}(u_{2i,j}+u_{2j,i})=0 \qquad (x_i\in V) \tag{5.4}$$

$$\lambda_{2ij,j}=0 \qquad (x_i\in V) \tag{5.5}$$

$$\lambda_{2ij}n_j-\mu_{2i}=0 \qquad (x_i\in S_u) \tag{5.6}$$

$$u_{2i}-u_{1i}=0 \qquad (x_i\in S_u) \tag{5.7}$$

$$\lambda_{2ij}n_j=0 \qquad (x_i\in S_p) \tag{5.8}$$

易于看到

$$\lambda_{2ij}=\frac{\partial A_2}{\partial e_{2ij}}-\sigma_{1ij} \qquad (x_i\in V) \tag{5.9}$$

$$\mu_{2i}=\left(\frac{\partial A_2}{\partial e_{2ij}}\right)n_j-\sigma_{1ij}n_j \qquad (x_i\in S_p) \tag{5.10}$$

将(5.9)和(5.10)代回(5.1)，我们得到

$$\Pi_{gcp}=\iiint_V\left\{(A_2-\sigma_{1ij}e_{2ij})-\left[e_{2ij}-\frac{1}{2}(u_{2i,j}+u_{2j,i})\right]\right.$$

$$\left.\left(\frac{\partial A_2}{\partial e_{2ij}}-\sigma_{1ij}\right)\right\}dV-\iint_{S_u}(u_{2i}-u_{1i})\left(\frac{\partial A_2}{\partial e_{2ij}}-\sigma_{1ij}\right)n_jdS \tag{5.11}$$

式(5.11)被称为广义耦联势能。注意到预备定理和条件(2.5a)，则得(5.11)的欧拉方程和自然边界条件

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{2ij,j}-\sigma_{1ij,j}=0 &(5.12)\\&e_{2ij}-\frac{1}{2}(u_{2i,j}+u_{2j,i})=0 &(5.13)\end{aligned}\right\}\quad (x_i\in V)$$

$$\sigma_{2ij}n_j-\sigma_{1ij}n_j=0 \qquad (x_i\in S_p) \tag{5.14}$$

$$u_{2i}-u_{1i}=0 \qquad (x_i\in S_u) \tag{5.15}$$

六、具有二类变量的广义耦联余能原理

应用与前第五节相似的推导，得到具有二类变量的广义耦联余能为

$$\Pi_{gco}=\iiint_V[(B_2-e_{1ij}\sigma_{2ij})+(\sigma_{2ij,j}-\sigma_{1ij,j})(u_{2i}-u_{1i})]dV$$

$$-\iint_{S_p}(\sigma_{2ij}-\sigma_{1ij})n_j(u_{2i}-u_{1i})dS \tag{6.1}$$

在物理条件(2.5b)下，式(6.1)的欧拉方程和自然边界条件为(5.12)～(5.15)。

七、具有三类变量的广义耦联势能原理

在第五节和第六节的广义耦联势能原理和广义耦联余能原理是在条理条件(2.5a)或

(2.5b)下的条件变分问题．为了得到无条件的广义耦联泛函，我们将采用由钱伟长教授提出的高阶拉格朗日乘子法．

应用高阶拉格朗日乘子法，我们得到具有三类变量的广义耦联势能为

$$\Pi_{tgcp}=\Pi_{gcp}+\iiint_V(A_2+B_2-e_{2ij}\sigma_{2ij})\lambda_1 dV \tag{7.1}$$

其中u_{2i}，e_{2ij}，σ_{2ij}和λ_1都是可变分的变量且λ_1是任意的．

用和第五节相似的推导过程，我们得到如下的泛函(7.1)的欧拉方程和自然边界条件

$$\left.\begin{aligned}
&A_2+B_2-e_{2ij}\sigma_{2ij}=0 && (7.2)\\
&\frac{\partial A_2}{\partial e_{2ij}}-\sigma_{2ij}=0 && (7.3)\\
&\frac{\partial B_2}{\partial \sigma_{2ij}}-e_{2ij}=0 && (7.4)\\
&e_{2ij}-\frac{1}{2}(u_{2i,j}+u_{2j,i})=0 && (7.5)\\
&\left(\frac{\partial A_2}{\partial e_{2ij}}\right)_{,j}-\sigma_{1ij,j}=0 && (7.6)
\end{aligned}\right\}\quad (x_i\in V)$$

$$\left(\frac{\partial A_2}{\partial e_{2ij}}\right)n_j-\sigma_{1ij}n_j=0 \qquad (x_i\in S_p) \tag{7.7}$$

$$u_{2i}-u_{1i}=0 \qquad (x_i\in S_u) \tag{7.8}$$

八、具有三类变量的广义耦联余能原理

用与第七节相同的方法，我们得到广义耦联余能

$$\Pi_{tgce}=\Pi_{gce}+\iiint_V(A_2+B_2-e_{2ij}\sigma_{2ij})\lambda_2 dV \tag{8.1}$$

与(8.1)相应的欧拉方程与自然边界条件为

$$\left.\begin{aligned}
&A_2+B_2-e_{2ij}\sigma_{2ij}=0 && (8.2)\\
&\frac{\partial A_2}{\partial e_{2ij}}-\sigma_{2ij}=0 && (8.3)\\
&\frac{\partial B_2}{\partial \sigma_{2ij}}-e_{2ij}=0 && (8.4)\\
&\frac{\partial B_2}{\partial \sigma_{2ij}}-\frac{1}{2}(u_{2i,j}+u_{2j,i})=0 && (8.5)\\
&\sigma_{2ij,j}-\sigma_{1ij,j}=0 && (8.6)
\end{aligned}\right\}\quad (x_i\in V)$$

$$\sigma_{2ij}n_j-\sigma_{1ij}n_j=0 \qquad (x_i\in S_p) \tag{8.7}$$

$$u_{2i}-u_{1i}=0 \qquad (x_i\in S_u) \tag{8.8}$$

参 考 文 献

[1] 钱伟长，《广义变分原理》，知识出版社，上海(1985)．

[2] 付宝连，光测弹性理论中耦联系统的变分原理，应用数学和力学，**15**(1)(1994)，37—48．

Coupled Variational Principles and Generalized Coupled Variational Principles in Photoelasticity

Fu Baolian

(Yanshan University, Qinhuangdao 066004, *P.R, China)*

Abstract

In this paper, applying Lagrange multiplier method and high order Lagrange multiplier method[1], we systematicaly derive coupled potential energy principle, coupled complementary energy principle, and generalized coupled potential energy priciples and generalized coupled complementary energy principles with two and three kinds of variables in photoelasticity.

Key words Lagrange multiplier method, coupled systems, coupled variational principle, photoelasticity