

有限长弹性杆与有限长弹性地基梁的 横向冲击的冲击力近似公式

任文敏¹ 黄剑敏¹ 陈文¹

(杨桂通推荐, 1994年12月25日收到)

摘 要

本文对具有初速的有限长弹性杆与初始静止的有限长弹性地基梁的横向冲击问题进行了研究, 用伽辽金原理求出了冲击力的近似公式并对结果进行了讨论, 得出了有关结论。

关键词 冲击力 弹性波 伽辽金原理

一、概 述

地基梁在工程中具有一定的应用, 对于地基梁的动力学问题的研究是一个具有工程应用价值的课题。弹性杆与地基梁的横向冲击情况是地基梁受冲击动载荷作用的基本形式之一, 对于这个问题, 直接的研究几乎很少有人涉及只有少数学者对于该问题进行了间接的研究, 他们研究的力学模型是: 无限长梁与半无限长弹性杆的横向冲击作用^{[2]~[4]}, 其中 Ranganath, S.^[2]和 Clifton, R. J.^[3]应用了 Hertz 接触应力理论来建立冲击力与相对挤压位移的关系, 小高忠勇, 中原一郎^[4]在研究该问题时作了两个基本假设: 假设接触应力均匀分布及梁的直接受冲击接触作用部分可看作刚性块来处理, 当然仅是指与弹性杆的截面尺寸相当的一小部分梁元。

本文对有限长弹性杆(具有初速)与有限长弹性地基梁的横向冲击问题进行了研究, 文中采用了小高忠勇, 中原一郎^[4]的两个假设, 然后应用弹性杆的一维波动特征线理论建立了冲击力与地基梁的速度变化及杆的初速之间的关系, 并用伽辽金法及积分变换方法求解了该问题。对于这类问题而言, 最重要而且最困难的就是求解冲击力, 一旦确定了冲击力, 其他计算则是十分容易的, 故本文只求解了冲击力(本文求解限于线弹性范围内)。

二、力学和数学模型

如图1所示, 一根具有初速的有限长弹性杆与初始静止的有限长弹性地基梁发生横向冲击。假设: 1. 接触面上的接触应力均匀分布; 2. 直接受弹性杆横向冲击接触作用的那部分梁

¹ 清华大学工程力学系, 北京 100084.

无作为刚性块来处理。

1. 取地基梁为研究对象

对于时间 t ，取刚开始接触的瞬间为时间 $t=0$ 的起点。运动方程：

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + K_0 y = \delta(x-x_0) f(t) \quad (2.1)$$

初始静止，边界条件视具体条件而定。

其中： y ——梁的挠度； E ——梁的弹性模量； $\delta(x-x_0)$ ——狄拉克函数； I ——梁的截面惯性矩； m ——单位长度梁的质量； $f(t)$ ——冲击力； K_0 ——地基的弹性系数（假设地基是线弹性的）。

2. 取弹性杆为研究对象（如图2所示）

有限长弹性杆具有初速 v_0 ，在与梁接触的那一端受到冲击力 $f(t)$ 的作用，另一端自由，下面由一维弹性波传播的特征线理论来推导冲击力 $f(t)$ 与地基梁的运动之间的关系：

(i) 当 $0 \leq t \leq T_0$ 时： $T_0 = 2l_2/c_0$

$$\text{沿特征线 } 1-2: \quad \sigma_2 + \rho c_0 v_2 = \sigma_1 + \rho c_0 v_1 \quad (2.2)$$

其中 σ 为应力， ρ 为杆的材料密度， l_2 为杆长， c_0 为杆中一维纵波的波速；对于冲击杆来说， A 端面是接触端面， B 端面是自由端面，整个(I)区（即三角形 ABC 所围成的时空区域）是非扰动区，在(I)区内任一点应力为零，速度仍为初速 v_0 ，所以， $\sigma_1 = 0$ ， $v_1 = v_0$ ；又 A 端面

与梁接触，故 $v_2 = \frac{\partial y(x_0, t)}{\partial t} = \dot{y}(x_0, t)$ ，上标“.”表示对时间求导数。式(2.2)即：

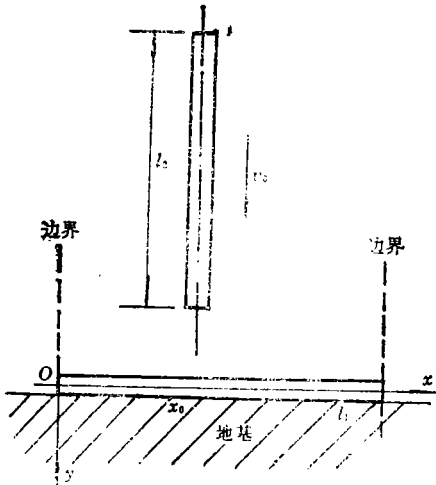


图1 杆与地基梁的冲击

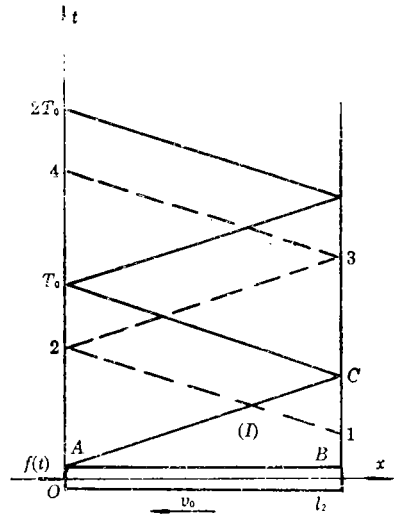


图2 波传播特征线

$$\sigma_2 = \rho c_0 v_0 - \rho c_0 v_2 = \rho c_0 v_0 - \rho c_0 \dot{y}(x_0, t)$$

$$\text{冲击力: } f(t) = \sigma_2 \cdot A = \rho c_0 A v_0 - \rho c_0 A \cdot \dot{y}(x_0, t)$$

$$\text{即: } f(t) = K v_0 - K \dot{y}(x_0, t) \quad (0 \leq t \leq T_0) \quad (2.3)$$

其中： A 为弹性杆截面积， $K = \rho c_0 A$

(ii) 当 $T_0 \leq t \leq 2T_0$ 时：

沿特征线2—3: $\sigma_2 - \rho c_0 v_2 = \sigma_3 - \rho c_0 v_3$

其中 $\sigma_3 = 0$ (因为B端面自由), 上式即:

$$\rho c_0 v_3 = \rho c_0 v_2 - \sigma_2 \quad (2.4)$$

沿特征线3—4: $\sigma_3 + \rho c_0 v_3 = \sigma_4 + \rho c_0 v_4$, 即:

$$\sigma_4 = \rho c_0 v_3 - \rho c_0 v_4 \quad (2.5)$$

把(2.4)代入(2.5): $\sigma_4 = \rho c_0 v_0 - \rho c_0 v_4 - 2\sigma_2$, 即:

$$\sigma_4 = \rho c_0 v_0 - \rho c_0 \dot{y}(x_0, t) - 2\sigma(t - T_0)$$

冲击力: $f(t) = \sigma_4 \cdot A = A\rho c_0 v_0 - A\rho c_0 \dot{y}(x_0, t) - 2A\sigma(t - T_0)$, 亦即:

$$f(t) = K v_0 - K \dot{y}(x_0, t) - 2f(t - T_0) \quad (T_0 \leq t \leq 2T_0) \quad (2.6)$$

(iii) $nT_0 \leq t \leq (n+1)T_0$ 时:

通过分析不难得到:

$$f(t) = K v_0 - K \dot{y}(x_0, t) - 2f(t - T_0) - 2f(t - 2T_0) - \dots - 2f(t - nT_0) \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (2.7)$$

不过通过下面的具体求解发现, 对 $n \geq 2$ 的情况无需考虑, 因为冲击过程在此之前已结束了, 弹性杆与梁之间已分离。

3. 接触条件

在冲击过程中弹性杆与梁保持接触, 在接触作用力大小相等, 方向相反和位移连续, 这两个条件已包括在方程(2.1)和(2.3)(2.6)及(2.7)式中了。此外, 在整个冲击过程中, 弹性杆与梁保持接触, 冲击力 $f(t) \geq 0$, 当求解计算中一旦出现 $f(t) < 0$, 则表示弹性杆与梁已分离, 冲击过程结束, 计算即可以终止。

三、求 解

1. 取地基梁为研究对象

$$\text{设 } y(x, t) = F(x) \cdot T(t) \quad (3.1)$$

其中 $F(x)$ 为假定的挠度分布函数, 取为单位静力集中载荷作用下地基梁的挠度函数,

可在满足所研究的具体的地基梁的边界条件下求解 $EI \frac{d^4 F(x)}{dx^4} + K_0 F(x) = \delta(x - x_0)$ 即可得到, 也可以以有关工程手册中查得, 把(3.1)代入(2.1), 其误差为:

$$L(x, t) = \left[EI \frac{d^4 F(x)}{dx^4} + K_0 F(x) \right] \cdot T(t) + mF(x) \cdot \ddot{T}(t) - \delta(x - x_0) f(t)$$

显然(3.1)式能满足(2.1)的与时间无关的边界条件(指一般的简支、固支、自由等边界条件)。

由伽辽金原理:

$$\int_0^l L(x, t) \cdot F(x) dx = 0$$

$$\text{即: } \int_0^l \left\{ \left[EI \frac{d^4 F(x)}{dx^4} + K_0 F(x) \right] \cdot T(t) + mF(x) \cdot \ddot{T}(t) - \delta(x - x_0) \cdot f(t) \right\} F(x) dx = 0$$

利用 $F(x)$ 的性质, 并对 (3.2) 进行整理即得:

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = \omega^2 f(t) \quad (3.3)$$

$$\text{其中: } \omega^2 = \frac{F(x_0)}{A_1}, \quad A_1 = m \int_0^l F^2(x) dx$$

对 (3.3) 关于时间 t 进行 Laplace 变换, 并利用初值条件, 地基梁初始静止, 因此,

$$y(x, 0) = \dot{y}(x, 0) = 0$$

从而有: $T(0) = \dot{T}(0) = 0$ 即可以得到:

$$\mathcal{T}(s) = \frac{\omega^2}{s^2 + \omega^2} \cdot \mathcal{f}(s) \quad (3.4)$$

其中 上标“~”表示变换后的函数, s 是与 t 对应的变换量。

2. 取弹性杆为研究对象

(i) 当 $0 \leq t \leq T_0$ 时, $(T_0 = \frac{2l_2}{c_0})$

由 (3.1) 可知: $y(x_0, t) = F(x_0) \cdot T(t)$ 代入 (2.3):

$$\text{冲击力: } f(t) = K v_0 - K F(x_0) \cdot T(t) \quad (3.5)$$

对 (3.5) 关于 t 进行 Laplace 变换, 并利用初值条件

$$T(0) = 0$$

$$\text{即得: } \mathcal{f}(s) = K v_0 \cdot \frac{1}{s} - K F(x_0) \cdot s \cdot \mathcal{T}(s)$$

把 (3.4) 代入上式并化简得:

$$\mathcal{f}(s) = K v_0 \left[\frac{1}{s} - \frac{K F(x_0) \omega^2}{s^2 + \omega^2 + K F(x_0) \omega^2 s} \right]$$

$$\text{又令: } a = \frac{K F(x_0) \omega^2}{2}, \text{ 则:}$$

$$\mathcal{f}(s) = K v_0 \left[\frac{1}{s} - \frac{2a}{(s+a)^2 + \omega^2 - a^2} \right] \quad (3.6)$$

对于 (3.6) 或 $\mathcal{f}(s)$ 的 Laplace 逆变换可分三种情况进行如下:

1. 当 $\omega > a$ 时:

$$\text{令 } b_1 = \sqrt{\omega^2 - a^2}$$

则 (3.6) 即为: $\mathcal{f}(s) = K v_0 \left[\frac{1}{s} - \frac{2a}{(s+a)^2 + b_1^2} \right]$, 对该式进行 Laplace 逆变换即可求得冲击力:

$$f(t) = K v_0 \left(1 - \frac{2a}{b_1} \cdot \exp[-at] \sin b_1 t \right) \quad (3.7)$$

2. 当 $\omega = a$ 时:

$$(3.6) \text{ 即: } \mathcal{f}(s) = K v_0 \left[\frac{1}{s} - \frac{2a}{(s+a)^2} \right], \text{ 再进行 Laplace 逆变换即可得:}$$

$$f(t) = K v_0 (1 - 2at \cdot \exp[-at]) \quad (3.8)$$

3. 当 $\omega < a$ 时:

$$\text{令 } b_2 = \sqrt{a^2 - \omega^2}$$

则 (3.6) 即: $\mathcal{f}(s) = K v_0 \left[\frac{1}{s} - \frac{2a}{(s+a)^2 - b_2^2} \right]$, 再进行 Laplace 逆变换:

$$f(t) = K v_0 \left(1 - \frac{2a}{b_2} \cdot \exp[-at] \cdot \sinh b_2 t \right) \quad (3.9)$$

需指出一点：在具体问题计算中，如果出现了， $f(t) < 0$ ，就表示冲击过程结束，可停止计算，否则，继续求解计算。

(ii) 当 $T_0 \leq t \leq 2T_0$ 时，并假定在 $0 \leq t \leq T_0$ 时未出现 $f(t) < 0$ 。冲击力：

$$f(t) = K v_0 - K F(x_0) \cdot T(t) - 2f(t - T_0) \quad (3.10)$$

比较(3.10)与(3.5)式可知，当 $t \geq T_0$ 时，冲击力 $f(t)$ 受到经过弹性杆自由端反射后再传播到接触处的反射应力波的影响，因此，在进一步求解之前应首先研究一下在 $t = T_0^+$ 时刻是否出现冲击过程结束现象。（本文中 T_0^+ 表示 T_0 的右极限， T_0^- 表示 T_0 的左极限， 0^+ 表示 0 的右极限），由(3.10)可知：

$$f(T_0^+) = K v_0 - K F(x_0) \dot{T}(T_0^+) - 2f(T_0^+ - T_0), \text{ 即}$$

$$f(T_0^+) = K v_0 - K F(x_0) \dot{T}(T_0^+) - 2f(0^+)$$

由(3.5)可知： $f(0^+) = K v_0$ ，代入上式，即得：

$$f(T_0^+) = K v_0 - K F(x_0) \dot{T}(T_0^+) - 2K v_0 \quad (3.11)$$

又 $\dot{y}(x_0, t) = F(x) \dot{T}(t)$ 应该是连续的，因为地基梁只受到有限大的外力作用，其运动的加速度是有限的，从而其运动速度应是连续的，即

$$\dot{y}(x_0, T_0^+) = \dot{y}(x_0, T_0^-)$$

从而有 $\dot{T}(T_0^+) = \dot{T}(T_0^-)$ 于是有：

$$K v_0 - K F(x_0) \dot{T}(T_0^+) = K v_0 - K F(x_0) \dot{T}(T_0^-) = f(T_0^-) \quad (3.12)$$

把(3.12)代入(3.11)： $f(T_0^+) = f(T_0^-) - 2K v_0$ (3.13)

由(3.7)~(3.9)可知：

$$f(T_0^-) = \begin{cases} K v_0 \left(1 - \frac{2a}{b_1} \cdot \exp[-aT_0] \sin b_1 T_0 \right) & (\omega > a) \\ K v_0 (1 - 2aT_0 \cdot \exp[-aT_0]) & (\omega = a) \\ K v_0 \left(1 - \frac{2a}{b_2} \exp[-aT_0] \sinh b_2 T_0 \right) & (\omega < a) \end{cases} \quad (3.14)$$

下面分三种情况来分析 $f(T_0^+)$ 是否为负值：

1. 当 $\omega > a$ 时：

由于 $\frac{2a}{b_1} > 0$ （本文中所有常数： $v_0, a, \omega, b_1, b_2, K$ 等全部为正数）， $\exp[-at]$ 为一衰减的正数函数（ $t \geq 0$ ）。

如果： $\sin b_1 T_0 \geq 0$ 则 $f(T_0^-) \leq K v_0$ 代入(3.13)：

$$f(T_0^+) \leq -K v_0 \text{ 即 } f(T_0^+) < 0.$$

当： $\sin b_1 T_0 < 0$ 记 $g(t) = \frac{2a}{b_1} \exp[-at] \sin b_1 t$ ，则在 $t \in [0, T_0]$ 区间内 $g(t)$ 至少有一个极值

点，而且第一个极值点是极大值点，该极大值为正数并且绝对值也一定是最大的，这一结论只要分析一下 $g(t)$ 是一个幅值不断衰减的振荡函数等性质即可证明，记 $g(t)$ 的最大值为 $g(t_0)$ （ t_0 为第一个极值点，也是最大点。）因为进行 $T_0 \leq t \leq 2T_0$ 区间求解的前提就是在

$$0 \leq t \leq T_0 \text{ 时, } f(t) \geq 0, \text{ 因此有:}$$

当 $t \in [0, T_0]$ 时： $f(t) = K v_0 [1 - g(t)] \geq 0$

从而有 $g(t) \leq 1$ 及 $g(t_0) \leq 1$,

由于 $|g(T_0)| < g(t_0)$, 即 $|g(T_0)| < 1$, 可见:

$$f(T_0^-) = Kv_0[1 - g(T_0)] < 2Kv_0, \text{ 故:}$$

$$f(T_0^+) = f(T_0^-) - 2Kv_0 < 0, \text{ 即:}$$

$$f(T_0^+) < 0$$

2. 当 $\omega = a$ 时:

显然 $2aT_0 \cdot \exp[-aT_0] > 0$, $f(T_0^-) < Kv_0$ (当然 $f(T_0^-) \geq 0$), 故:

$$f(T_0^+) = f(T_0^-) - 2Kv_0 < 0 \quad \text{即 } f(T_0^+) < 0$$

3. 当 $\omega < a$ 时:

由于 $\frac{2a}{b_2} \exp[-aT_0] \sinh b_2 T_0 > 0$ 因此: $0 \leq f(T_0^-) < Kv_0$, 从而:

$$f(T_0^+) = f(T_0^-) - 2Kv_0 < 0, \quad \text{即 } f(T_0^+) < 0$$

综上所述三种情况所述, 总有 $f(T_0^+) < 0$

因此可以得出结论: 当 $t = T_0^+$ 时, 冲击过程结束, 弹性杆与梁分离, 因此冲击力为:

$$f(t) = \begin{cases} Kv_0 \left(1 - \frac{2a}{b_1} \exp[-at] \sin b_1 t \right) & (\omega > a, 0 \leq t \leq T_0) \\ Kv_0 (1 - 2at \exp[-at]) & (\omega = a, 0 \leq t \leq T_0) \\ Kv_0 \left(1 - \frac{2a}{b_2} \exp[-at] \sinh b_2 t \right) & (\omega < a, 0 \leq t \leq T_0) \\ 0 & (t > T_0) \end{cases} \quad (3.15)$$

(3.15) 中各常数定义见文中有关各式.

四、分析和讨论

分析本文的求解过程与结果可以得到以下结论:

(1) 本文的近似解能精确满足问题的边界条件, 初值条件, 弹性杆中的一维波动方程 (一维弹性波沿特征线传播) 及近似满足地基梁的运动方程 (用伽辽金原理近似满足) 故可以认为: 本文解答能近似地反映实际的冲击力, 同时冲击力公式显得十分简洁, 因此, 使用十分方便.

(2) 冲击力 $f(t)$ 取决于弹性杆的冲击初速度, 杆, 地基, 梁的材料性质, 几何尺寸, 梁的边界条件, 初值条件, 冲击处的位置.

(3) 冲击力的大小与弹性杆的初速成正比, 冲击力大小与系数 K 有关 ($K = \rho c_0 A$), 但与弹性杆长度无关, 这说明冲击力大小与弹性杆的材料性能, 截面尺寸有关, 而与弹性杆的质量无关, 弹性杆的长度仅决定了冲击过程可能持续的最大持续时间: $T_0 = \frac{2l_2}{c_0}$, 当然, 也有可能 $t < T_0$ 时冲击过程已结束, 视具体情况而定.

(4) 在 $t = 0$ 时刻, 冲击力达到第一峰值 Kv_0 , 以后是否还出现峰值及峰值的大小视具体情况而定.

(5) 在求解结果 (3.15) 式中, 若令 $l_2 \rightarrow \infty$, 即 $T_0 \rightarrow \infty$ 则就可得到半无限长弹性杆与有限长地基梁横向冲击情况时的解答, 显然结果不变, 只是 $T_0 \rightarrow \infty$ 而已.

五、结 语

本文求解了有限长弹性杆与有限长地基梁的横向冲击问题, 得出了冲击力的近似公式, 并推广到了半无限长弹性杆时的情况, 从本文的求解过程可知, 该冲击力公式可以近似反映实际的冲击力, 具有一定的工程应用价值。

参 考 文 献

- [1] R. W. 克拉夫、丁彭津, 《结构动力学》(王光远等译), 科学出版社 (1981).
- [2] S. Ranganath, Normal impact of an infinite elastic beam by a semi-infinite elastic rod, *Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, Series E* 38(2), (1971), 455—460.
- [3] S. Ranganth and R. J. Clifton, Normal impact of an infinite elastic-plastic beam by a semi-infinite elastic rod, *International Journal of Solid and Structures*, B. 1, J(1972), 41~47.
- [4] 小高忠勇, 中原一郎, 弹性棒と衝撃にしち無限長はいの応力, 日本机械学会论文集 (第1部) (1967), 533—541.
- [5] 杨秀雯、梁立华, 《数学物理方程与特殊函数》, 天津大学出版社 (1985).
- [6] 杨桂通、张善元, 《弹性动力学》, 中国铁道出版社 (1988).

Approximate Formulas of Impact Force for Normal Impact of a Finite Elastic Beam on Elastic Foundation by a Finite Rod

Ren Wenmin Huang Jianmin Chen Wen

(Department of Engineering Mechanics, Qinghua
University, Beijing 100084, P. R. China)

Abstract

The normal impact of an elastic initially static beam of finite length on an elastic foundation by a finite elastic rod with initial velocity is investigated in this paper. The approximate formulas for the impact force are obtained by the Galerkin principle. Some discussions are made and conclusions are drawn.

Key words impact force, elastic wave, Galerkin principle