

一类碰撞振动系统的余维 二分叉和Hopf分叉*

谢建华¹

(李骊推荐, 1994年10月5日收到)

摘 要

本文研究弹簧质量系统对无穷大平面碰撞振动的分叉问题, 证明了在接近完全弹性碰撞和在一些特殊的频率比附近, 存在余维二分叉现象. 利用映射的正则型理论, 将 Poincaré 映射变换成含两个参数的正则型, 通过分析该正则型, 我们得到周期倍化分叉、周期 1 点、2 点的 Hopf 分叉, 并进行了数值验证.

关键词 碰撞振动 稳定性 余维二分叉

一、前 言

近年来, 国内外对碰撞振动系统的分叉混沌现象进行了广泛的研究, 但重点仍仅限于简单(余维一)的分叉问题, 对混沌的研究则或基于近似模型或依赖于数值计算. 文[1]、[2]对两类不同的碰撞振动模型的周期倍化分叉进行了研究, 给出了分叉条件, 并对混沌运动进行了数值计算. 文[3]对所谓“弹跳小球”的简化数学模型, 借助于 Smale 马蹄理论, 证明了混沌运动的存在. 最近, 文[4]指出了文[3]的缺陷.

本文对弹簧质量系统对无穷大平面碰撞振动的余维二分叉问题进行了较详细的分析. 首先建立 Poincaré 映射, 并计算该映射在不动点处的导映射的两个特征值均为 -1 的条件. 根据映射的正则型理论, 得到含两个参数余维二分叉问题的正则型, 分析此正则型, 得到周期倍化分叉、周期 1 点、2 点的 Hopf 分叉.

二、Poincaré 映射及正则型

我们研究图 1 所示的力学模型^[5], 它也是冲式振动落砂机在一种极限情况下的力学模型^[6]. 它与气动微震造型机的力学模型十分相似(反作用力不同). 质块 M 的运动微分方程和碰撞方程为

* 国家自然科学基金资助项目.

¹ 西南交通大学工程力学系, 成都 610031.

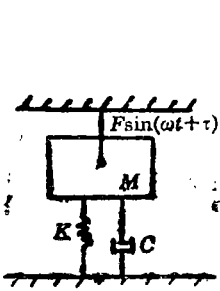


图 1

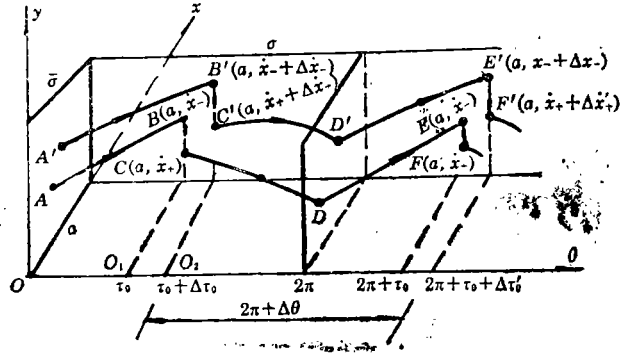


图 2

$$M\ddot{x} + Kx = F\sin(\omega t + \tau) \tag{2.1}$$

$$\dot{x}_+ = -R\dot{x}_- \tag{2.2}$$

其中 \dot{x}_-, \dot{x}_+ 分别表示 M 与平面碰撞前后的速度。 R 为碰撞恢复系数。

在增广相空间中 (图2), 非光滑曲线 \overline{ABCDEF} 与 $\overline{A'B'C'D'E'F'}$ 分别表示振子 M 的周期运动和相应的扰动运动。在图2中还标出相轨线上控制点的 x, y 坐标。Poincaré 截面通常有两种取法: $\bar{\sigma}, \sigma \subset R^2 \times S$ 。其中 $\bar{\sigma} = \{(y, x, \theta) \in R^2 \times S, \theta = 0 \pmod{2\pi}\}, \sigma = \{(x, y, \theta) \in R^2 \times S, x = a\}$ 。由方程 (2.1)、(2.2), 可建立相应的 Poincaré 映射

$$X' = \bar{f}(X), Y' = f(Y) \tag{2.3}$$

其中 $X = (\Delta x_0, \Delta \dot{x}_0), X' = (\Delta x'_0, \Delta \dot{x}'_0), Y = (\Delta \dot{x}_+, \Delta \tau_0), Y' = (\Delta \dot{x}'_+, \Delta \tau'_0)$ 是超平面 $\bar{\sigma}, \sigma$ 上的扰动矢量。容易证明, 当 M 与平面发生碰撞时, 若其速度不为零, 则存在变换

$$Y = P(X) \tag{2.4}$$

其中 P 为局部微分同胚。由 (2.3)、(2.4) 可得

$$\bar{f} = P^{-1} \circ f \circ P \tag{2.5}$$

因此 $\bar{f} \sim f$, 即 \bar{f} 与 f 等价。(2.5) 式可表示成图3。

我们取定 Poincaré 截面 σ 并建立 f 。把 θ 坐标的原点移至 $O_1(O_2)$, 方程 (2.1) 解的无量纲形式

$$x = b_1 \sin \frac{\theta}{z} + b_2 \cos \frac{\theta}{z} + \sin(\theta + \tau) \tag{2.6}$$

$$y = \frac{b_1}{z} \cos \frac{\theta}{z} - \frac{b_2}{z} \sin \frac{\theta}{z} + \cos(\theta + \tau) \tag{2.7}$$

其中 $z = \omega/\omega_0, \omega_0 = \sqrt{M/K}$ 。将控制点坐标代入 (2.6)、(2.7) (设 $a=0$), 得:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= b_2 + \sin \tau_0 \\ 0 &= b_1 S + b_2 C + \sin \tau_0 \\ \dot{x}_+ &= \frac{b_1}{z} + \cos \tau_0 \\ \dot{x}_- &= \frac{b_1}{z} C - \frac{b_2}{z} S + \cos \tau_0 \\ \dot{x}_+ &= -R\dot{x}_- \end{aligned} \right\} \tag{2.8}$$

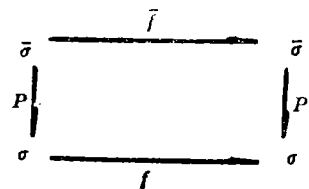


图 3

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \delta_2 + \sin(\tau_0 + \Delta\tau_0) \\ 0 &= \delta_1 \sin \frac{2\pi + \Delta\theta}{z} + \delta_2 \cos \frac{2\pi + \Delta\theta}{z} + \sin(\tau_0 + \Delta\tau_0) \\ \dot{x}_+ + \Delta\dot{x}_+ &= \frac{\delta_1}{z} + \cos(\tau_0 + \Delta\tau_0) \\ \dot{x}_- + \Delta\dot{x}_- &= \frac{\delta_1}{z} \cos \frac{2\pi + \Delta\theta}{z} - \frac{\delta_2}{z} \sin \frac{2\pi + \Delta\theta}{z} + \cos(\tau_0 + \Delta\tau_0) \\ \Delta\dot{x}_+^! &= -R\Delta\dot{x}_-^! \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

其中 $S = \sin(2\pi/z)$, $C = \cos(2\pi/z)$. 由(2.8)解出

$$\dot{x}_- = \frac{2}{\sqrt{(1-R)^2 + [z(1+R)\text{ctg}(\pi/z)]^2}}$$

$$\cos\tau_0 = \frac{1-R}{\sqrt{(1-R)^2 + [z(1+R)\text{ctg}(\pi/z)]^2}}$$

由(2.9)的第一、三式解出 δ_1 , δ_2 , 并代入(2.9)的第二、四式, 并利用(2.9)的最后一式, 得:

$$\begin{aligned} g(\Delta\dot{x}_+, \Delta\tau_0, \Delta\theta) &= z[\dot{x}_+ + \Delta\dot{x}_+ - \cos(\tau_0 + \Delta\tau_0)] \sin \frac{2\pi + \Delta\theta}{z} \\ &\quad - \sin(\tau_0 + \Delta\tau_0) \cos \frac{2\pi + \Delta\theta}{z} + \sin(\tau_0 + \Delta\theta + \Delta\tau_0) \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \Delta\dot{x}_+^! &= f_1(\Delta\dot{x}_+, \Delta\tau_0, \Delta\theta) \\ &= -R \left\{ [\dot{x}_+ + \Delta\dot{x}_+ - \cos(\tau_0 + \Delta\tau_0)] \cos \frac{2\pi + \Delta\theta}{z} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{z} \sin(\tau_0 + \Delta\tau_0) \sin \frac{2\pi + \Delta\theta}{z} + \cos(\tau_0 + \Delta\theta + \Delta\tau_0) - \dot{x}_- \right\} \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\Delta\tau_0^! = \Delta\tau_0 + \Delta\theta \quad (2.12)$$

设 $\partial g / \partial \Delta\theta = \dot{x}_- \neq 0$, 则由隐函数定理, 由(2.10)解出

$$\Delta\theta = \Delta\theta(\Delta\dot{x}_+, \Delta\tau_0), \quad \Delta\theta(0, 0) = 0 \quad (2.13)$$

(2.13)代入(2.11)、(2.12)式, 得Poincaré映射

$$\left. \begin{aligned} \Delta\dot{x}_+^! &= f_1(\Delta\dot{x}_+, \Delta\tau_0, \Delta\theta(\Delta\dot{x}_+, \Delta\tau_0)) \triangleq f_1(\Delta\dot{x}_+, \Delta\tau_0) \\ \Delta\tau_0^! &= \Delta\tau_0 + \Delta\theta(\Delta\dot{x}_+, \Delta\tau_0) \triangleq f_2(\Delta\dot{x}_+, \Delta\tau_0) \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Poincaré映射(2.14)在不动点(0, 0)处的导映射矩阵

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \Delta\dot{x}_+} & \frac{\partial f_1}{\partial \Delta\tau_0} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \Delta\dot{x}_+} & \frac{\partial f_2}{\partial \Delta\tau_0} \end{pmatrix}_{(0,0)} \quad (2.15)$$

容易算出

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta\theta}{\partial \Delta\dot{x}_+} &= -\frac{\partial g}{\partial \Delta\dot{x}_+} / \left(\frac{\partial g}{\partial \Delta\theta} \right) = -\frac{zS}{2} \sqrt{(1-R)^2 + \left[z(1+R)\text{ctg} \frac{\pi}{z} \right]^2}, \\ \frac{\partial \Delta\theta}{\partial \Delta\tau_0} &= -\frac{\partial g}{\partial \Delta\tau_0} / \left(\frac{\partial g}{\partial \Delta\theta} \right) = -\left[z^2(1+R)\cos^2 \frac{\pi}{z} + \frac{1}{2}(1-C)(1-R) \right], \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \Delta \dot{x}_+} = \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial \Delta \dot{x}_+} + \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial \Delta \theta} \cdot \frac{\partial \Delta \theta}{\partial \Delta \dot{x}_+} = R \left[-C + (1-z^2)(1+R) \cos^2 \frac{\pi}{z} \right],$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \Delta \tau_0} &= \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial \Delta \tau_0} + \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial \Delta \theta} \cdot \frac{\partial \Delta \theta}{\partial \Delta \tau_0} = R \left\{ S \left[z(1+R) - \frac{1}{z}(1-R) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(1 - \frac{1}{z^2}\right) z(1+R) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{z} \left[-z^2(1+R) \cos^2 \frac{\pi}{z} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \frac{1}{2}(1-C)(1-R) \right] \right\} / \sqrt{(1-R^2) + \left[z(1+R) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{z} \right]^2}, \end{aligned}$$

特别地, 当 $R=1$ 时

$$Df = \begin{pmatrix} 1 - 2z^2 \cos^2 \frac{\pi}{z}, & 2 \left(1 - z^2 \cos^2 \frac{\pi}{z}\right) \delta_0 \\ \left(-2z^2 \cos^2 \frac{\pi}{z}\right) \delta_0, & 1 - 2z^2 \cos^2 \frac{\pi}{z} \end{pmatrix}$$

$$\delta_0 = \operatorname{sgn} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{z} \right)$$

Df 的两个特征根

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(Df) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{2} \operatorname{tr}(Df) \right]^2 - 1}$$

式中 $\operatorname{tr}(Df) = 2 \left(1 - 2z^2 \cos^2 \frac{\pi}{z}\right)$, $\operatorname{Det}(Df) = 1$. 因此当 $\left| \frac{1}{2} \operatorname{tr}(Df) \right| < 1$ 时, Df 有一对模

为 1 的共轭复根. 当 $\left| \frac{1}{2} \operatorname{tr}(Df) \right| > 1$ 时, Df 有两个不等实根, 一个绝对值大于 1, 另一个绝

对值小于 1. 当 $\frac{1}{2} \operatorname{tr}(Df) = 1$ 时, 有重根 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. 当 $\frac{1}{2} \operatorname{tr}(Df) = -1$ 时, $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. 以

$\frac{1}{2} \operatorname{tr}(Df)$ 为纵坐标, z 为横坐标, 图 4 表示 $\frac{1}{2} \operatorname{tr}(Df)$ 随 z 的变化曲线. 其中 $z_3 = 1.26609$,

$z_7 = 2.65275$.

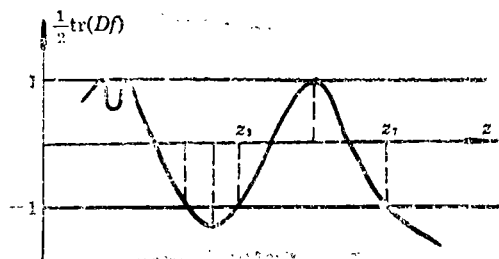


图 4

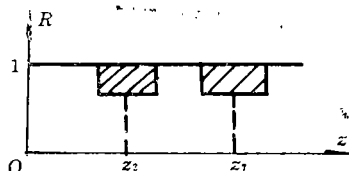


图 5

取两参数 $\xi_1 = z - z_3$ ($z > z_3$), $\xi_2 = 1 - R$ ($\xi_2 \geq 0$). 我们考虑图 5 所示参数平面上阴影区域.

(2.14) 可写成

$$X' = f(X, \mu) \quad (X, \mu \in \mathbb{R}^2) \quad (2.16)$$

将上式展成 X, μ 的泰勒级数

$$X' = AX_0 + \mu A_1 X + F_{02}[X^{(2)}] + F_{03}[X^{(3)}] + \dots \quad (2.17)$$

式中 F_{02} , F_{03} 为关于 X 的二次、三次项的全体^[6]。经过线性变换, (2.17) 变为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2.92809\xi_1 + 0.24767\xi_2 & -1.46405\xi_1 - 0.5\xi_2 \\ -5.85618\xi_1 + 0.75232\xi_2 & 2.92809\xi_1 + 1.37617\xi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0.61334x^2 + 0.4038xy - 0.50857y^2 \\ -1.22668x^2 + 1.22668xy \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} -0.07056x^3 - 2.79343x^2y + 0.91849xy^2 + 0.41460y^3 \\ -4.82724x^3 + 1.90319x^2y - 1.76907xy^2 + 0.27261y^3 \end{pmatrix} \\ &+ O(|\mu|^2 + |X|^4) \quad (z = z_3) \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x'/R \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5.89550\xi_1 - 0.71579\xi_2 & 2.94775\xi_1 - 0.5\xi_2 \\ 11.791\xi_1 + 1.7198\xi_2 & -5.8955\xi_1 + 1.85182\xi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} -0.92621x^2 + 0.77279xy + 0.07672y^2 \\ 1.8524x^2 - 1.85243xy \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} -0.43946x^3 - 0.71723x^2y + 0.70138xy^2 + 0.04141y^3 \\ -8.04204x^3 + 1.50773x^2y - 1.79113xy^2 + 0.82452y^3 \end{pmatrix} \\ &+ O(|\mu|^2 + |X|^4) \quad (z = z_7) \end{aligned} \quad (2.19)$$

通过正则型的计算公式, 将(2.18)、(2.19)变成正则型

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 x \\ \mu_2 y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -5.60422x^3 + 1.08957x^2y \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 \\ O[(|x| + |y|)^5] \end{pmatrix} \\ \mu_1 &= 5.85618\xi_1 + 1.62377\xi_2 \\ \mu_2 &= -5.85618\xi_1 + 0.75232\xi_2 \quad (z = z_3) \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 x \\ \mu_2 x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -9.75779x^3 + 3.21558x^2y \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 \\ O[(|x| + |y|)^5] \end{pmatrix} \\ \mu_1 &= -11.791\xi_1 + 1.13603\xi_2 \\ \mu_2 &= 11.791\xi_1 + 1.7198\xi_2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

(2.20)、(2.21)可写成一般形式

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 x \\ \mu_2 x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ bx^3 + ax^2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ O[(|x| + |y|)^5] \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

三、周期倍化分叉和Hopf分叉

由(2.20)、(2.21)式知: $\mu_1 + \mu_2 = 2.37609\xi_2 (2.85583\xi_2)$ 。因为 $\xi_2 \geq 0$, 故 $\mu_1 + \mu_2 \geq 0$, 由

(2.22), 可求出周期 2 点

$$f^2(X, \mu) = X \quad (3.1)$$

略去 μ 的高次项, 由上式解得

$$X_1 = \left(\sqrt{\frac{\mu_2}{-b}}, -\mu_1 \sqrt{\frac{\mu_2}{-b}} \right), \quad X_2 = \left(-\sqrt{\frac{\mu_2}{-b}}, \mu_1 \sqrt{\frac{\mu_2}{-b}} \right)$$

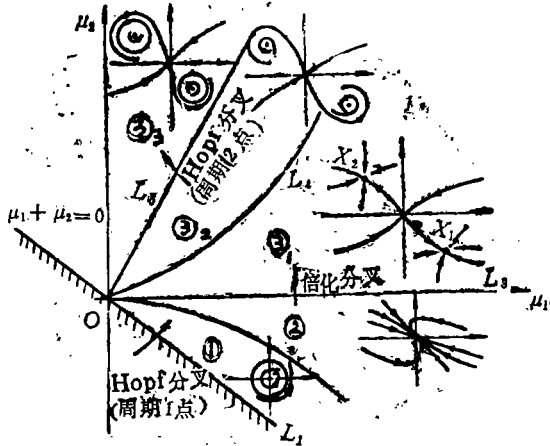


图 6

因为 $b < 0$, 故周期 2 点 X_1, X_2 对 $\mu_2 > 0$ 存在, 且关于原点对称. 周期 1 点与周期 2 点处的线性化矩阵为

$$A_1 = Df(0, \mu) = \begin{pmatrix} -1 + \mu_1 & 1 \\ \mu_2 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$$\text{tr} A_1 = -2 + \mu_1, \quad \det A_1 = 1 - (\mu_1 + \mu_2)$$

$$A_2 = Df^2(X_i, \mu) = \begin{pmatrix} 1 - 2(\mu_1 + \mu_2) & -2 + \mu_1 - \frac{a}{b}\mu_2 \\ 4\mu_2 & 1 + 2\left(-1 + \frac{a}{b}\right)\mu_2 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

$$\text{tr} A_2 = 2 \left[1 - \mu_1 + \left(\frac{a}{b} - 2 \right) \mu_2 \right], \quad \det A_2 = 1 - 2\mu_1 + 2 \left(\frac{a}{b} + 2 \right) \mu_2$$

图 6 中的各区域的边界方程如下:

$$L_1: \det A_1 = 1, \text{ 或 } \mu_1 + \mu_2 = 0;$$

$$L_2: \Delta_1 = (\text{tr} A_1)^2 - 4 \det A_1 = 0, \text{ 或 } \mu_2 = -\frac{1}{4} \mu_1^2 + o(\mu_1^2);$$

$$L_3: \mu_1 > 0, \mu_2 = 0;$$

$$L_4: \Delta_2 = (\text{tr} A_2)^2 - 4 \det A_2 = 0, \text{ 或 } \mu_2 = \frac{1}{4} \mu_1^2 + o(\mu_1^2);$$

$$L_5: \det A_2 = 1, \text{ 或 } \mu_2 = \frac{1}{2 + \frac{a}{b}} \mu_1 + o(\mu_1)$$

通过分析 A_1, A_2 的特征值, 可知当参数经历区域 ① → ② → ③ 变化时, 周期 1 点的类型

经历由稳定焦点→稳定结点→鞍点的变化(图6)。当参数通过 L_3 时,产生周期倍化分叉。当参数经历 $\textcircled{3}_1 \rightarrow \textcircled{3}_2 \rightarrow \textcircled{3}_3$ 变化时,周期2点 $X_1(X_2)$ 经历由稳定结点→稳定焦点→不稳定焦点的变化。而在 L_1 与 L_5 上,分别产生周期1、2点的Hopf分叉。下面以 L_1 上周期1点为例,来验证Hopf分叉定理的条件。

引理 ^{[7],[8]} 设 Φ_ε 是含一个参数的 R^2 上一个微分同胚,假设

- (i) $\Phi_\varepsilon(0, 0) = (0, 0)$ 对所有的 ε 成立;
- (ii) $D\Phi_\varepsilon(0, 0)$ 有两个共轭特征值 $\lambda(\varepsilon), \bar{\lambda}(\varepsilon)$, 满足 $|\lambda(0)| = 1$;
- (iii) $\left. \frac{d|\lambda(\varepsilon)|}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} > 0$;
- (iv) $\lambda^m(0) \neq 1, m=1, 2, 3, 4, 5$;

在假设(i)~(iv)条件下,存在与 ε 相关的坐标变换使

$$\Phi_\varepsilon(x, y) = N\Phi_\varepsilon(x, y) + O(|X|^5) \tag{3.4}$$

在极坐标中

$$N\Phi_\varepsilon = (|\lambda(\varepsilon)|r - f_1(\varepsilon)r^3, \phi + \theta(\varepsilon) + f_3(\varepsilon)r^3) \tag{3.5}$$

如果 $f_1(0) > 0$, 则对 $\varepsilon > 0$, 存在一个稳定的不变圈; 如果 $f_1(0) < 0$, 则对 $\varepsilon < 0$, 存在一个不稳定的不变圈。设 $\Phi_0(x, y)$ 的复数形式为

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) = & \lambda z + \left(\frac{G_{11}}{2} z^2 + G_{12} z \bar{z} + \frac{G_{22}}{2} \bar{z}^2 \right) + \left(\frac{G_{111}}{6} z^3 + \frac{G_{112}}{2} z^2 \bar{z} \right. \\ & \left. + \frac{G_{122}}{2} z \bar{z}^2 + \frac{G_{222}}{6} \bar{z}^3 \right) + O(|z|^4) \end{aligned} \tag{3.6}$$

则

$$f_1(0) = \text{Re} \left[\frac{(1-2\lambda)\bar{\lambda}}{2(1-\lambda)} G_{11} G_{12} \right] + \frac{1}{2} G_{12} \bar{G}_{12} + \frac{1}{4} G_{22} \bar{G}_{22} - \text{Re} \left(\frac{\lambda G_{112}}{2} \right) \tag{3.7}$$

在 L_1 上, 引理中的条件(i), (ii), (iv)均成立。只需验证条件(iii)并计算 $f_1(0)$ 。在区域①中, 不动点的特征值满足

$$|\lambda_1|^2 = |\lambda_2|^2 = 1 - (\mu_1 + \mu_2) = 1 + \varepsilon \tag{3.8}$$

其中 $\varepsilon = -(\mu_1 + \mu_2) \leq 0$ 。所以

$$\left. \frac{d|\lambda(\varepsilon)|}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \frac{1}{2} > 0 \tag{3.9}$$

因此引理中条件(iii)成立。在 L_1 上有, $\varepsilon = -(\mu_1 + \mu_2) = 0$ 。故可令 $\mu_1 = \mu_2 = -\mu$, 则

$$D\Phi_0(0, 0) = \begin{pmatrix} -1+\mu & 1 \\ -\mu & -1 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

$$\Phi_0(x, y) = \begin{pmatrix} -1+\mu & 1 \\ -\mu & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ bx^3 + ax^2y \end{pmatrix} + O(|X|^5) \tag{3.11}$$

通过线性变换, 将(3.11)的线性部分化成标准形式

$$\bar{\Phi}_0(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} -1 + \frac{\mu}{2}, & -\sqrt{\mu - \frac{1}{4}\mu^2} \\ \sqrt{\mu - \frac{1}{4}\mu^2}, & -1 + \frac{\mu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$+ \left(ay_1 y_2^2 + \left(b - \frac{\mu}{2} a \right) y_2^3 / \sqrt{\mu - \frac{1}{4} \mu^2} \right) + O(|Y|^5) \quad (3.12)$$

其复数形式

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_0(z) = & \lambda z + \frac{1}{2} a(z+\bar{z}) \left[\frac{1}{2i} (z-\bar{z}) \right]^2 \\ & + \left(b - \frac{\mu}{2} a \right) \left[\frac{1}{2i} (z-\bar{z}) \right]^3 / \sqrt{\mu - \frac{1}{4} \mu^2} + O(|z|^5) \end{aligned} \quad (3.13)$$

容易算出

$$f_1(0) = -\operatorname{Re} \left(\frac{\lambda G_{112}}{2} \right) = \frac{1}{16} (2a+3b) - \frac{5a}{32} \mu \quad (3.14)$$

由(3.14)知, 当 $2a+3b < 0$ 且 μ 充分小时, 系统存在不稳定的不变圈. 最后由(2.20)、(2.21), 可验证:

当 $z = z_3$ 时, $a = 1.08957$, $b = -5.60422$, $2a+3b = -14.6335 < 0$;

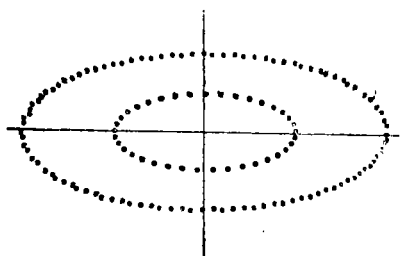
当 $z = z_7$ 时, $a = 3.21558$, $b = -9.75779$, $2a+3b = -22.84221 < 0$;

因此在接近完全弹性碰撞, 频率比在 z_3 , z_7 附近时, 产生亚临界的Hopf分叉.

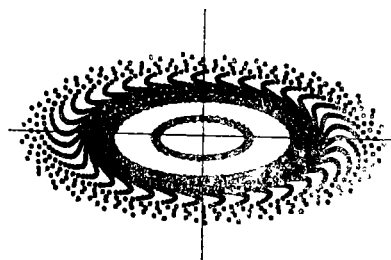
对 L_1 上周期 2 点的Hopf分叉条件的验证是同样的.

四、数值结果

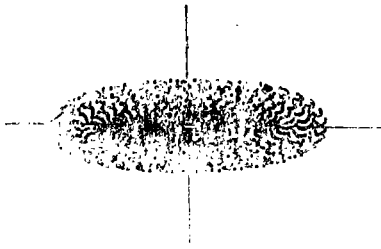
我们就(2.20)式, 对图6进行了数值验证. 其结果如图7各图所示. 图7(g)是根据微机屏幕里示结果, 手工绘制的. 其余各图由绘图仪绘制. 由于技术原因, 绘图仪绘制的图对 x 轴作镜面反射之后, 才给出实际结果. 考虑这一点, 图7中各结果与图6中结果基本吻合. 每图是由两条轨道形成的. 其初始点为 $(x_0^{(1)}, y_0^{(1)})$, $(x_0^{(2)}, y_0^{(2)})$. 各图对平面作 π 角旋转不变. 迭代次数 n 在图中示出. 图7(a)(b), 对应于参数 (μ_1, μ_2) 取在 L_1 上(完全弹性碰撞). 由图7(a)看, 平衡点似乎为中心. 当 n 增加时, 由图7(b)可见平衡点为不稳定焦点. 轨线按逆时针方向盘旋发散的. 由于在不同的矢径上, 每次迭代的幅角增量是不同的, 因此形成了极规则的图形. 图7(d)表示里层的轨线按逆时针方向螺旋式趋于原点, 而外层则按同方式发



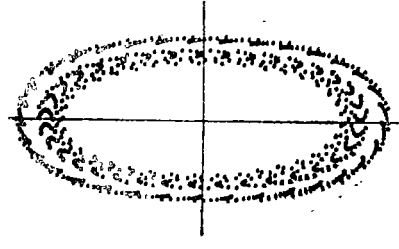
(a) $\mu_1 = 7.071067 \times 10^{-3}$,
 $\mu_2 = -7.071067 \times 10^{-3}$,
 $(x_0^{(1)}, y_0^{(1)}) = (0.01, 0.0)$,
 $(x_0^{(2)}, y_0^{(2)}) = (0.005, 0.0)$,
 $n = 100$



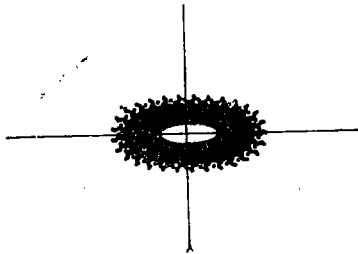
(b) $\mu_1 = 7.071067 \times 10^{-3}$,
 $\mu_2 = -7.071067 \times 10^{-3}$,
 $(x_0^{(1)}, y_0^{(1)}) = (0.01, 0.0)$,
 $(x_0^{(2)}, y_0^{(2)}) = (0.005, 0.0)$,
 $n = 800$



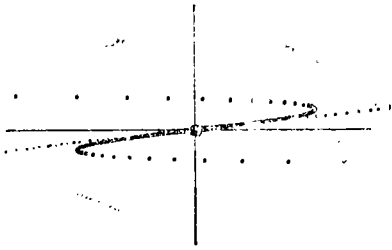
(c) $\mu_1=8.9101 \times 10^{-3}$, $\mu_2=-4.5398 \times 10^{-3}$,
 $(x_0^{(1)}, y_0^{(1)})=(0.02, 0.0)$,
 $(x_0^{(2)}, y_0^{(2)})=(0.0, 0.0305)$, $n=1000$



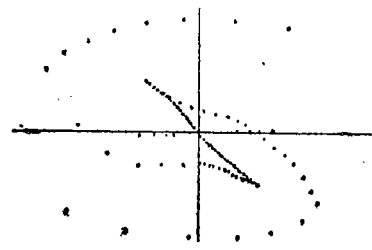
(d) $\mu_1=8.9101 \times 10^{-3}$, $\mu_2=-4.5398 \times 10^{-3}$,
 $(x_0^{(1)}, y_0^{(1)})=(0.0305, 0.0)$,
 $(x_0^{(2)}, y_0^{(2)})=(0.033, 0)$, $n=400$



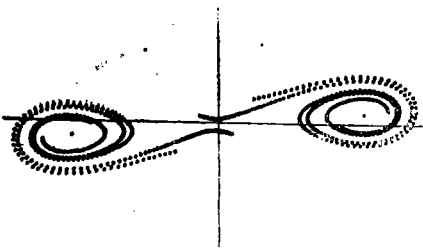
(e) $\mu_1=8.9101 \times 10^{-3}$, $\mu_2=-4.5398 \times 10^{-3}$,
 $(x_0^{(1)}, y_0^{(1)})=(0.0305, 0.0)$,
 $(x_0^{(2)}, y_0^{(2)})=(0.033, 0.0)$, $n=800$



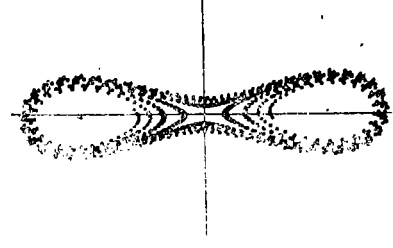
(f) $\mu_1=10^{-1}$, $\mu_2=-2 \times 10^{-3}$,
 $(x_0^{(1)}, y_0^{(1)})=(0.01, 0.0)$;
 $(x_0^{(2)}, y_0^{(2)})=(0.0, 0.01)$, $n=400$



(g) $\mu_1=10^{-1}$, $\mu_2=10^{-3}$,
 $(x_0^{(1)}, y_0^{(1)})=(0.02, 0.0)$;
 $(x_0^{(2)}, y_0^{(2)})=(0.02, 0.02)$, $n=400$



(h) $\mu_1=9.87 \times 10^{-3}$, $\mu_2=1.56 \times 10^{-3}$,
 $(x_0^{(1)}, y_0^{(1)})=(4 \times 10^{-3}, -3 \times 10^{-4})$;
 $(x_0^{(2)}, y_0^{(2)})=(2 \times 10^{-3}, 10^{-4})$, $n=300$



(i) $\mu_1=7.071 \times 10^{-3}$, $\mu_2=7.071 \times 10^{-3}$,
 $(x_0^{(1)}, y_0^{(1)})=(1.8 \times 10^{-2}, -8.5 \times 10^{-4})$;
 $(x_0^{(2)}, y_0^{(2)})=(2 \times 10^{-2}, 4 \times 10^{-4})$, $n=400$

图 7

散。因此不稳定的Hopf不变圈位于内外层轨线之间的间隙中。当 n 增加到800时,比例缩小三倍,得到图7(e)。其中图中内外层间微小间隙可表示Hopf不变圈,它与 x 轴的交点为: $0.0305 < \bar{x} < 0.033$ 。图7(f)是典型的稳定结点。图7(g)是倍化分叉的结果。原点由稳定结点变成了鞍点。失稳后,形成了稳定结点型周期2点 $X_1(X_2)$ 。图7(h)中周期2点为稳定的焦点。图7(i)中的轨线先各自绕 X_1 、 X_2 点旋转,而后突然沿包含 X_1 、 X_2 两点的较大的轨线上运动。由图中可见,存在着同宿轨线。运动对参数的依赖极敏感。极可能在存在Chaos运动。有关理论和数值工作有待进一步研究分析。

致谢 本文蒙承G.Iooss教授、舒仲周教授指导。李骊教授仔细地审阅了初稿,并建议作者进行本文的数值工作。绘图工作得到了西南交通大学振动、冲击与噪声中心的蒋传清、袁向荣两位老师的大力协助。在此谨致衷心的感谢!

参 考 文 献

- [1] S. W. Shaw and P. J. Holmes, A periodically forced piece-wise linear oscillator, *Journal of Sound and Vibration*, 90(1)(1983), 129—155.
- [2] P. C. Tung and S. W. Shaw, The dynamics of an impact print hammer, *Journal of vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, 110(4)(1988), 193—199.
- [3] J. Guckenheimer and P. J. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer—Verlag, New York (1983), 102—116.
- [4] Shu Zhongzhou(舒周仲), Motion types and chaos of multi-body systems vibrating with impacts, *Acta Mechanica Sinica*, 7(4)(1991), 369—375.
- [5] H. Ishihana, Y. Takagi and S. Maezawa, Analysis of impact vibration by Delts—Function Method—care of one Degree-of—Freedom System, first report: perfectly elastic collision, 20th Japan Nat. Congress for Applied Mechanics, Tokyo (1970).
- [6] 谢建华. 冲击式振动落砂机分叉问题研究, 全国第三届运动稳定性与振动学术会议论文集: 《运动稳定性、振动、分叉与混沌的研究》, 中国科学技术出版社, 北京(1992).
- [7] O. E. Lanford, Bifurcation of periodic solution into invariant tori: The work of Ruelle and Takens, *Lecture Notes in Math*, 322, Berlin-Heidelberg Springer Verlag, New York(1973).
- [8] Y. H. Wan, Computations of the stability condition for the Hopf bifurcation of diffeomorphisms on R^2 , *SIAM, J. Appl. Math.*, 34(1)(1978).

Codimension Two Bifurcations and Hopf Bifurcations of an Impacting Vibrating System

Xie Jianhua

(*Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, P.R.China*)

Abstract

In this paper, a spring-mass system impacting against an infinite large plane is analyzed. We have proved that phenomena of codimension two bifurcations exist when coefficient of restitution is near one and ratios of frequency near the same special values. By method of normal forms, we reduced Poincaré maps into normal forms containing two parameters. After studying these normal forms, we obtained period doubling bifurcations and Hopf bifurcations of period-one and period-two. The results have been verified by numerical works.

Key words impact vibration, stability, bifurcation