应用数学和力学，第17卷 第1期(1996年1月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

边界层型问题的插值摄动解法*

袁镒吾[1]

（钱伟长推荐，1994年10月3日收到）

摘　要

本文在文[1]的基础上用插值摄动法研究了最高阶导数乘以小参数的二阶常微分方程的定解问题。算例表明，本文方法计算过程简单，其精度甚至比多重尺度法的一级近似结果的精度还稍高一些。

关键词　边界层型问题　插值　奇异摄动法

一、引　言

非线性振动问题中的小参数形式的二阶非线性微分方程的定解问题，为了消去长期项，常用奇异摄动法求解。本文作者在文[1]中采用一种新的奇异摄动法——插值摄动法求解，获得了很好的结果。

力学中（例如一维非扩散稳定流的热传导方程[3]，弹簧上轻质点的脉冲运动微分方程，…），还常遇到最高阶导数乘以小参数的二阶常微分方程，这类问题，具有所谓的“边界层”，一般用匹配法或多尺度法求解。本文试探用插值摄动法求解这类问题。其大要为：用正则摄动法求外部解，然后用插值摄动法求内部解（用内部变量表示），最后，将内部解和外部解相加即得所求解。其中的积分常数由问题的边界条件及内部解的外部极限为零的条件确定。文中有两个算例。算例表明，本文方法的精度相当高，甚至比多重尺度法的一级近似结果的精度还稍高一些。而计算过程则十分简单。

二、常系数二阶线性常微分方程

兹考察下列最高导数乘以小参数的二阶微分方程的定解问题

$$\begin{cases} \varepsilon y''+y'+y=0 & (2.1)\\ y(0)=0 & (2.2)\\ y(1)=1 & (2.3)\end{cases}$$

式中标号“′”表示对x求导，ε为小参数。

我们令式(2.1)～(2.3)的解为

$$y=y^o+y^i \tag{2.4}$$

其中　$y^o(x)$为外部解，它用正则摄动法去求取，但放弃内部边界条件而仅满足外部边界条件，即只满足条件(2.3)。y^i 为内部解，它用插值摄值摄动法去求取，但需满足条件[3]

1　中南工业大学建筑工程系，长沙　410083。

$$y^i(\infty)=0 \tag{2.5}$$

此外，由式（2.4）得到的y值，应当满足边界条件(2.2)及(2.3)。

1. 外部解

准确至$O(\varepsilon)$，令

$$y^o=\hat{y}_0+\varepsilon y_1 \tag{2.6}$$

将式（2.6）代入式(2.1)，令ε的同次幂的系数相等，得

$$\begin{cases} \hat{y}'_0+\hat{y}_0=0 & (2.7)\\ y'_1+y_1=-\hat{y}''_0 & (2.8)\end{cases}$$

边界条件为

$$\begin{cases} \hat{y}_0(1)=1 & (2.9)\\ y_1(1)=0 & (2.10)\end{cases}$$

满足式（2.9）时，式（2.7）的解为

$$\hat{y}_0=\exp[1-x] \tag{2.11}$$

将式（2.11）代入式(2.8)，并利用边界条件(2.10)，解得y_1，最后求得外部解为

$$y^o=\exp[1-x]+\varepsilon(1-x)\exp[1-x] \tag{2.12}$$

显然，外部解不满足条件(2.2)。

2. 内部解

令

$$\xi=x/\varepsilon \tag{2.13}$$

则式（2.1）可变为

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}+\frac{dy}{d\xi}+\varepsilon y=0 \tag{2.14}$$

把式（2.14）改写成

$$-\frac{dy}{d\xi}=\frac{d^2y}{d\xi^2}+\varepsilon y \tag{2.15}$$

由于ε为小量，故上式中$\frac{d^2y}{d\xi^2}$和$\left(\frac{d^2y}{d\xi^2}+\varepsilon y\right)$很接近。我们设定一个新的函数$y(\xi)$，称为插值函数，它和$\frac{d^2y}{d\xi^2}$及$\left(\frac{d^2y}{d\xi^2}+\varepsilon y\right)$的接近程度相同，即设[1]

$$\begin{cases} y-\frac{d^2y}{d\xi^2}=K\frac{d^2y}{d\xi^2} & (2.16)\\ \frac{d^2y}{d\xi^2}+\varepsilon y-Y=K\left(\frac{d^2y}{d\xi^2}+\varepsilon y\right) & (2.17)\end{cases}$$

由式(2.16)、(2.17)得

$$K=\varepsilon y\Big/\left(2\frac{d^2y}{d\xi^2}+\varepsilon y\right) \tag{2.18}$$

准确至$O(\varepsilon)$上式可写成

$$K=\varepsilon y_0\Big/\left(2\frac{d^2y_0}{d\xi^2}\right)+O(\varepsilon^2) \tag{2.19}$$

式中 y_0为$\varepsilon=0$时的y值，即

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}+\frac{dy}{d\xi}=0$$

的解，上式的解为

$$y_0=C_1\cdot\exp[-\xi]+C_2 \tag{2.20}$$

式中 C_1，C_2为积分常数。

将上式代入式（2.19）得

$$K=\varepsilon(C_1\exp[-\xi]+C_2)/(2C_1\exp[-\xi]) \tag{2.21}$$

由式(2.16)，并注意到$K=O(\varepsilon)$，我们得

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}=\frac{Y}{1+K}\approx Y(1-K) \tag{2.22}$$

准确至$O(\varepsilon)$，式（2.17）可改写成

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}+\varepsilon y_0-Y=K\frac{d^2y_0}{d\xi^2}$$

将式（2.22）代入上式得

$$Y=\frac{1}{K}\cdot\varepsilon y_0-\frac{d^2y_0}{d\xi^2}$$

将式(2.20)、(2.21)代入上式得

$$Y=C_1\exp[-\xi] \tag{2.23}$$

由于$K=O(\varepsilon)$，故式（2.16）可改写成

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}=Y-K\frac{d^2y_0}{d\xi^2}+O(\varepsilon^2)$$

将式(2.20)、(2.21)、(2.23)代入上式得

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}=C_1\exp[-\xi]-\frac{1}{2}\varepsilon(C_1\exp[-\xi]+C_2)$$

积分两次得

$$y^i=C_1\exp[-\xi]-\frac{1}{2}\varepsilon\left(C_1\exp[-\xi]+\frac{1}{2}C_2\xi^2\right)+C_3\xi+C_4 \tag{2.24}$$

式中C_3，C_4均为积分常数。由条件（2.5）得

$$C_2=C_3=0$$

故式（2.24）成为

$$y^i=C_1\exp[-\xi]-\frac{1}{2}\varepsilon C_1\exp[-\xi]+C_4$$

将上式及式（2.12）代入式(2.4)，最后得式(2.1)、(2.2)、(2.3)的解为

$$y=\exp[1-x]+\varepsilon(1-x)\exp[1-x]+C_1\exp[-x/\varepsilon]-\frac{1}{2}\varepsilon C_1\exp[-x/\varepsilon]+C_4 \tag{2.25}$$

其中积分常数C_1，C_2由边界条件（2.2）及（2.3）求得为

$$\left.\begin{aligned}C_1&=\frac{-e(1+\varepsilon)}{\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon\right)(1-\exp[-1/\varepsilon])}\\C_4&=(1+\varepsilon)\cdot\frac{\exp[1-1/\varepsilon]}{1-\exp[-1/\varepsilon]}\end{aligned}\right\} \tag{2.26}$$

如取$\varepsilon=0.1$，则$C_1=-3.1476$，$C_4=0.00014$。

文[2]的第87页的式（1.2）中，令$\alpha=0$，$\beta=1$，$\varepsilon=0.1$，则得精确解为

$$y=\frac{-1}{0.32386}(\exp[-8.8730x]-\exp[-1.1270x]) \tag{2.27}$$

如取$\alpha=0$，$\beta=1$，$\varepsilon=0.1$，则文[4]的第231页的式（28）成为

$$y=\exp[1-x]-\exp[1+x-10x]+O(\varepsilon^2) \tag{2.28}$$

它是用多重尺度法求得的式(2.1)～(2.3)的一级近似解。

为了检验本文结果的可靠性，在表1中，我们把式（2.25）和准确结果式（2.27）以及多重尺度法的一级近似结果式（2.28）做了比较。从表1可见，本文近似结果($\varepsilon=0.1$)的精度是令人满意的，它甚至比多重尺度法的一级近似解的精度还要稍高一些，计算过程又十分简单。

三、变系数二阶线性常微分方程

现考察下列二阶变系数线性常微分方程的定解问题

$$\begin{cases}\varepsilon y''+(2x+1)y'+2y=0 & (3.1)\\ y(0)=0,\quad y(1)=1 & (3.2)\end{cases}$$

1. 外部解

令

$$y=\hat{y}_0+\varepsilon y_1$$

代入式（3.1）可得

$$\begin{cases}(2x+1)\hat{y}_0'+2\hat{y}_0=0\\ (2x+1)y_1'+2y_1=-\hat{y}_0''\end{cases} \tag{3.3}$$

边界条件为

$$\begin{cases}\hat{y}_0(1)=1\\ y_1(1)=0\end{cases} \tag{3.4}$$

解之得

$$y^o=\hat{y}_0+\varepsilon y_1=\frac{3}{2x+1}-\left[\frac{2}{3(2x+1)}-\frac{6}{(2x+1)^3}\right]\cdot\varepsilon \tag{3.5}$$

2. 内部解

令 $$\xi=x/\varepsilon \tag{3.6}$$

且 $$y^i(\infty)=0 \tag{3.7}$$

将式（3.6）代入式（3.1）得

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}+(2\varepsilon\xi+1)\frac{dy}{d\xi}+2\varepsilon y=0$$

将上式改写成

$$-(2\varepsilon\xi+1)\frac{dy}{d\xi}=\frac{d^2y}{d\xi^2}+2\varepsilon y \tag{3.8}$$

令

$$\begin{cases} Y_1-\dfrac{d^2y}{d\xi^2}=K_1\dfrac{d^2y}{d\xi^2} & (3.9)\\[2ex] \dfrac{d^2y}{d\xi^2}+2\varepsilon y-Y_1=K_1\left(\dfrac{d^2y}{d\xi^2}+2\varepsilon y\right) & (3.10)\end{cases}$$

式中 $Y_1(\xi)$，$K_1(\xi)$ 均为待求的未知函数。

由式(3.9)、(3.10)得

$$K_1=\frac{2\varepsilon y}{2\dfrac{d^2y}{d\xi^2}+2\varepsilon y}=\frac{\varepsilon y_0}{\dfrac{d^2y_0}{d\xi^2}}+O(\varepsilon^2) \tag{3.11}$$

式中 y_0为$\varepsilon=0$时的y值，即$\varepsilon=0$时，式（3.8）的解，即

$$-\frac{dy}{d\xi}=\frac{d^2y}{d\xi^2}$$

的解。解之得

$$y_0=C_6\exp[-\xi]+C_7 \tag{3.12}$$

将上式代入式（3.11）得

$$K_1=\varepsilon(C_6\exp[-\xi]+C_7)/(C_6\exp[-\xi]) \tag{3.13}$$

代入式（3.9）得

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}=\frac{Y_1}{1+K_1}\approx Y_1(1-K_1)$$

将上式代入式（3.10）得

$$-K_1Y_1+2\varepsilon y_0=K_1\frac{d^2y}{d\xi^2}$$

将式(3.12)、(3.13)代入上式得

$$Y_1=C_6\exp[-\xi] \tag{3.14}$$

由式（3.9）有

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}=Y_1-K_1\frac{d^2y_0}{d\xi^2}$$

将式(3.12)、(3.13)、(3.14)代入上式得

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}=C_6\exp[-\xi](1-\varepsilon)-\varepsilon\cdot C_7$$

积分两次得

$$y^i=C_6(1-\varepsilon)\exp[-\xi]-\frac{1}{2}\varepsilon\cdot C_7\xi^2+C_8\xi+C_9 \tag{3.15}$$

由条件（3.7）得

$$C_7=C_8=0$$

故得

$$y^i=C_6(1-\varepsilon)\exp[-\xi]+C_9 \tag{3.16}$$

于是，得式(3.1)、(3.2)的解为

$$\begin{aligned} y=y^o+y^i=&\frac{3}{2x+1}-\left[\frac{2}{3(2x+1)}-\frac{6}{(2x+1)^3}\right]\cdot\varepsilon\\ &+C_6(1-\varepsilon)\cdot\exp[-\xi]+C_9 \end{aligned} \tag{3.17}$$

其中积分常数C_6、C_9由边界条件（3.2）确定为

$$C_6=\frac{3+\frac{16}{3}\varepsilon}{(1-\varepsilon)\left(\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\right]-1\right)} \tag{3.18}$$

$$C_9=\frac{3+\frac{16}{3}\varepsilon}{\exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]-1} \tag{3.19}$$

文[2]用推广的多重尺度法也得到了这一问题的一级近似解。如取$\alpha=0$，$\beta=0$，则文[2]的第191页的式（4.32）成为

$$y=\frac{3}{1+2x}-3\exp\left[\frac{-(x^2+x)}{\varepsilon}\right]-\varepsilon\left[\frac{2}{3(1+2x)}-\frac{6}{(2+2x)^3}\right.$$

$$\left.+\frac{16}{3}\exp\left[\frac{-(x^2+x)}{\varepsilon}\right]\right]+O(\varepsilon^2) \tag{3.20}$$

取$\varepsilon=0.1$，在表2中我们把本文用插值摄动法求解式(3.1)、(3.2)所得到的结果式(3.17)和文[2]中用推广的多重尺度法所得到的相应结果式（3.20）做了比较，从表1可见，二者相当接近。

表 1 （$\varepsilon=0.1$）

x	y 本文式(2.25)	y 精确解式(2.27)	y 多尺度法式(2.28)
0	0	0	0
0.08	1.3967	1.3032	1.1862
0.1	1.5811	1.4872	1.3544
0.2	1.9990	1.9411	1.7762
0.3	2.0060	1.9864	1.8311
0.4	1.8768	1.8785	1.7478
0.5	1.7112	1.7210	1.6185
0.6	1.5542	1.5552	1.4795
0.7	1.3878	1.3967	1.3449
0.8	1.2450	1.2508	1.2194
0.9	1.1160	1.1187	1.1043
1.0	1	1	1

表 2 （$\varepsilon=0.1$）

x	y 本文式(3.17)	y 推广的多尺度法式(3.20)
0	0	0
0.08	1.3256	1.4239
0.1	1.4919	1.6155
0.2	1.8359	1.9934
0.3	1.8041	1.9083
0.4	1.6680	1.7194
0.5	1.5180	1.5400
0.6	1.3811	1.3894
0.7	1.2626	1.2656
0.8	1.1613	1.1623
0.9	1.0747	1.0749
1.0	1	1

步步仿效本文第三段的解题过程，可以得到任意变系数二阶线性常微分方程定解问题的解答。

用插值摄动法也可求解非线性变系数二阶常微分方程（最高阶导数乘以小参数）的定解问题，其解题步骤也和本文第三段的基本相同，只是在用正则摄动法求外部解时可能会遇到一些困难。

总之，本文方法对求解边界层型问题，具有很好的通用性，计算过程简单，精度高。

参 考 文 献

[1] 袁镒吾，求一类非线性振动微分方程的近似解的新方法，力学与实践，1(1990)。

[2] 钱伟长主编，《奇异摄动理论及其在力学中的应用》，科学出版社，(1981)。

[3] A.H.奈弗，《摄动方法》(王辅俊等译)，上海科学技术出版社（1984)，150，158.
[4] A.H.奈弗，《摄动方法习题集》(宋家骕、戴世强译)，上海翻译出版公司(1990).

Interpolation Perturbation Method for Solving the Boundary Layer Type Problems

Yuan Yiwu

(Central South University of Technology, Changsha 410083, *P.R. China)*

Abstract

In this paper, on the basis of Ref.[1], the author studies the boundary-value problems of the second-order differential eqs., the highest order derivation of which contaisn the small parameter. Numerical examples show that the calculating process of this paper is quite simple and its accuracy is even higher than that of the multiple scales method (first order approximation).

Key words boundary layer type problem, interpolation, singular perturbation method