应用数学和力学，第16卷 第12期（1995年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

四边形单元h-收敛误差估计的探讨*

段 梅[1,2] 宫本裕[1] 周本宽[2] 陈大鹏[2]

（1995年3月2日收到）

摘 要

本文证明了四边形单元的h-收敛性，给出了相应的引理和定理，讨论了误差估计问题，为四边形单元h-收敛自适应有限元分析准备了基础。

关键词 有限元 四边形单元 h-收敛 误差估计

一、引 言

与其他数值解法（有限差分法、有限条法、边界元法等）相比，有限元方法在单元选择方面最为灵活。它的诞生，为偏微分方程近似解的理论研究和工程应用，开拓了更广泛的前景。迄今，在对问题区域的三角划分方面，解的h-收敛的误差估计工作，已形成一整套数学理论[1~3]，并在自适应有限元分析工作中得到了广泛的应用。但实际问题常将求解域进行四边形单元划分。例如，在区域内部，采用四边形单元（特别是矩形单元）往往比用三角形单元更好。因为，这样做，采用的单元数目较少，而精度却较高。另外，引用杂交/混合有限元求解问题时，通常多选择四边形单元。为此，研究四边形单元划分时h-收敛的误差估计，是十分必要的。本文将对四边形单元的h-收敛性进行理论上的证明。

二、基 本 概 念

虽然四边形单元和三角形单元在几何形状上有一定的关系，即连接四边形单元的至少一组对角形，就可使它变成三角形单元，但因两种单元的类型不同，故插值函数以及对单元本身几何性质的要求也有所不同。再者，有限元和参考有限元之间的变换，也因单元不同而有所区别。因之，误差估计的研究内容亦将有所不同。

定义1 形式为$x_i=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\hat{x}_j+b_i$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，$\det(a_{ij})\neq 0$ 的变换（其中：$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$为原坐标系中的点，$\hat{x}=(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\cdots,\hat{x}_n)\in R^n$ 为变换后坐标系中的点）。

i) $b_i=0$ $(i=1,2,\cdots,n)$时，称为线性变换。

---

* 国家自然科学基金和博士点基金资助项目

1 岩手大学，日本盛冈；2 西南交通大学，成都 610031。

ii）若至少存在一个i_0，使得$b_{i_0}\neq 0$，则称为仿射变换。

定义2　k-线性形式$D^k u(x)$的范数为：

$$\|D^k u(x)\| = \sup_{\substack{\|\xi_i\|\leqslant 1\\ 1\leqslant i\leqslant k}}\{|D^k u(x)(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k)|\}$$

定义3　对于仿射（或等参）变换F，若成立：$\Omega=F(\hat{\Omega})$，$\Sigma=F(\hat{\Sigma})$，$\Psi=\hat{\Psi}\circ F^{-1}$(其中，$\Omega$，$\hat{\Omega}$是$R^n$的两个开子集，它们内部非空且有Lipschtz连续的边界，Σ和$\hat{\Sigma}$表示有限元的自由度，Ψ和$\hat{\Psi}$表示有限元的基函数空间)，则称有限元(Ω，Σ，Ψ）和有限元（$\hat{\Omega}$，$\hat{\Sigma}$，$\hat{\Psi}$）为仿射（或等参）等价。

定义4　设Ω和$\hat{\Omega}$为R^n中的两个开子集。若存在一个可逆仿射变换：$F:\hat{x}\in\hat{\Omega}\to F(\hat{x})=T\hat{x}+b\in\Omega$，使得$\Omega=F(\hat{\Omega})$，则称$\Omega$和$\hat{\Omega}$是仿射等价的。

定义5　如果一个有限元族中的所有有限元均等价于一个单一的有限元，则称这单一的有限元为这族有限元的参考有限元。

定义6　若有限元族$(\Omega_e,\Sigma_e,\Psi_e)_{e\in N}$满足条件：

i）是一个仿射族，即它的所有有限元都（仿射）等价于一个参考有限元；

ii）存在常数$k>0$，使得$h_e/\rho_e\leqslant k$，$\forall e\in N$成立；

iii）$h_e\to 0$；

（其中：$h_e=\mathrm{diam}(\Omega_e)$，$\rho_e=\sup\{\mathrm{diam}(s)$，$s$是包含在$\Omega_e$中的球$\}$)，则称（$\Omega_e$，$\Sigma_e$，$\Psi_e)_{e\in N}$是正则的。

定义7　若四边形有限元族$(\Omega_e,\Sigma_e,\Psi_e)_{e\in N}$对等参变换$F$满足：

i）存在常数$M>0$，使得$h_e/\rho_e\leqslant M\quad\forall e\in N$；

ii）各边中点偏差$\|i-\tilde{i}\|=O(h^2)$，其中，$\tilde{i}=F(i)$，$i=5,6,7,8$；

则称这样的等参变换是正则的。

在下文中，将用到符号P_k,Q_k（k为自然数），这里，

P_k——表示关于n个变量x_1，x_2，…，x_n的所有阶次之和$\leqslant k$的多项式的全体，

Q_k——表示关于n个变量x_1，x_2，…，x_n的每个变量阶次$\leqslant k$的多项式的全体。

三、四边形等参有限元插值的误差估计

3.1　等参变换$F\in(P_1)^2$，h-收敛的误差估计

这时的等参变换F是仿射变换；$F(\hat{x})=T\hat{x}+b$。若给定一四边形单元的正则族(Ω，Σ，Ψ)，($\hat{\Omega}$,$\hat{\Sigma}$,$\hat{\Psi}$)是一参考有限元，其中$\hat{\Omega}$是正方形参考有限单元，Ω为凸四边形单元，且成立：

i）$W^{k+1,p}(\hat{\Omega})\hookrightarrow C^0(\hat{\Omega})$，

ii）$W^{k+1,p}(\hat{\Omega})\hookrightarrow W^{m,q}(\hat{\Omega})$，

iii）$\rho_k\subset\hat{\Psi}\subset W^{m,q}(\hat{\Omega})$，

（因为Ω为凸四边形正则单元，所以$|J_F|\neq 0$恒成立)，则由文献[1]得：存在一常数C（广义常数，下同)，使得每一向量$v\in W^{k+1,p}(\Omega)$和族中所有的有限元，有

$$|v-\Pi_k v|_{m,q,\Omega}\leqslant C(h_k^n)^{(1/q-1/p)}h_k^{k+1-m}|v|_{k+1,p,\Omega}$$

所以，对$k+1\geqslant m$，有

$$|v-\Pi_k v|_{0,\Omega}\leqslant C h_k^{k+1}|v|_{k+1,\Omega}$$

$$|v-\Pi_k v|_{1,\Omega}\leqslant Ch_k^k|v|_{k+1,\Omega}$$

……

$$|v-\Pi_k v|_{m,\Omega}\leqslant Ch_k^{k+1-m}|v|_{k+1,\Omega}$$

故

$$\|v-\Pi_k v\|_{m,\Omega}\leqslant Ch_k^{k+1-m}|v|_{k+1,\Omega} \tag{3.1}$$

若$a(u,v)$是V-椭圆的，则由Céa定理[2]得：存在与v_h无关的常数C，有

$$\|u-u_h\|\leqslant C\inf_{v_h\in V_h}\|u-v_h\|\leqslant C\|u-\Pi_h u\|=C\sum_{k\in V_h}\|u-\Pi_k u\|$$

故

$$\|u-u_h\|_{m,\Omega}\leqslant C\sum_{k\in V_h}\|u-\Pi_k u\|_{m,k}\leqslant Ch^{k+1-m}|u|_{k+1,\Omega} \tag{3.2}$$

综上所述，可以得到以下定理：

定理1 设(q_h)是C^0类的四边形剖分正则族，等参变换$F_1\in(P_1)^2$，$(\hat{K},\hat{\Sigma},\hat{\Psi})$是一个参考有限元，其中$\hat{K}$是正方形单元，

1）如果存在整数$k\geqslant 1$，使得$P_k\subset\hat{\Psi}\subset H^1(\hat{K})$，则当$u\in H^k(\Omega)$时，存在与$h$，$u$无关的常数$C$，使得

$$\|u-\Pi_h u\|_{1,\Omega}\leqslant Ch^{k-1}|u|_{k,\Omega}$$

2）如果u，u_h分别为变分问题$a(u,v)=f(v)$，$u\in H^k(\Omega)$的解和有限元解，且存在$\alpha>0$，使得$\alpha\|u\|_k^2\leqslant a(u,u)$，$\forall u\in H^k(\Omega)$，且$f(v)$是$H^k(\Omega)$上的有界线性泛函，则

$$\|u-u_h\|_{1,\Omega}\leqslant Ch^{k-1}|u|_{k,\Omega}$$

证明 因为$V_h\subset C^0(\Omega)$，$P_k\subset H^1(\hat{K})$，所以$V_h\subset H^1(\Omega)$。由嵌入定理得：$H^k(\hat{K})\hookrightarrow C^0(\hat{K})$，从而$\Pi_h u$存在，故根据前面的推导，定理得证。 □

3.2 等参变换$F\in(Q_1)^2$，h-收敛的误差估计

定义8 如果对区域Ω的四边形剖分(q_h)，存在常数$\sigma_0>0$，使得$h_e/\rho_e\leqslant\sigma_0$ $\forall e\in(q_h)$（其中$h_e=\mathrm{diam}(\Omega_e)$，$\rho_e=\sup\{\mathrm{diam}(s)$，$s$是包含在$\Omega_e$中的圆$\}$），则称这样的剖分为正则的，其中的每个单元为正则四边形单元。

现考虑四边形四节点单元。

引理1 设$(\hat{K},\hat{\Sigma},\hat{p})$和$(K,\Sigma,p)$是两个等参等价有限元，其中，$K$是凸四边形正则单元，$\hat{K}$是正方形参考有限元，$\Sigma=\{p(a_i),\ 1\leqslant i\leqslant 4\}$。若对任意充分光滑的函数$v:K\to R$和$\hat{v}:\hat{K}\to R$；以及$x=F(\hat{x})$，有$v(x)=\hat{v}(\hat{x})$，则插值算子$\Pi$和$\hat{\Pi}$成立：$\widehat{\Pi v}=\hat{\Pi}\hat{v}$。

证明 因为$\Sigma=\{p(a_i),\ 1\leqslant i\leqslant 4\}$，所以，$\forall v\in K$，由等参等价有限元的定义得：

$$\Pi v(x)=\sum_{i=1}^{4}v(a_i)p_i(x)=\sum_{i=1}^{4}\hat{v}(\hat{a}_i)p_i(x)$$

$$=\sum_{i=1}^{4}\hat{v}(\hat{a}_i)\hat{p}_i(F^{-1}(x))=\sum_{i=1}^{4}\hat{v}(\hat{a}_i)\hat{p}_i(\hat{x})$$

$$=\hat{\pi}\hat{v}(\hat{x}),\qquad \forall v\in K$$

故 $\widehat{\Pi v}=\hat{\Pi}\hat{v}$ □

设$k\geqslant m$，Ω的边界是Lipschitz连续的曲面，$\Pi\in L(H^k(\Omega),\ H^m(\Omega))$是一个满足$\Pi p=p$ $\forall p\in P_k$的算子，则由Sobolev空间的嵌入定理得：$H^k(\Omega)\hookrightarrow H^m(\Omega)$，且$\|u\|_{H^m(\Omega)}\leqslant$

$C\|u\|_{H^k(\Omega)}$，其中C为常数。

由文献[1]的定理得：存在常数$C(\Omega)$，使下式成立：

$$|u-\Pi u|_{m,\Omega}\leqslant C(\Omega)\|I-\Pi\|_{L(H^k(\Omega),H^m(\Omega))}|u|_{k,\Omega} \tag{3.3}$$

引理2 设Ω和$\hat{\Omega}$是R^n中两个等参等价的开子集，其中，Ω为凸四边形正则单元，$\hat{\Omega}$为正方形参考有限元，则存在一个常数$C(n)$，使得：

i) $|\hat{v}|_{0,p,\hat{\Omega}}\leqslant|J_F^{-1}|_{0,\infty,\Omega}^{1/p}|v|_{0,p,\Omega} \qquad \forall v\in L^p(\Omega)$

ii) $|\hat{v}|_{1,p,\hat{\Omega}}\leqslant C(n)|J_F^{-1}|_{0,\infty,\Omega}^{1/p}|F|_{1,\infty,\hat{\Omega}}|v|_{1,p,\Omega} \qquad \forall v\in W^{1,p}(\Omega)$

iii) $|\hat{v}|_{2,p,\hat{\Omega}}\leqslant C(n)|J_F^{-1}|_{0,\infty,\Omega}^{1/p}(|F|_{1,\infty,\hat{\Omega}}^2|v|_{2,p,\Omega}+|F|_{2,\infty,\hat{\Omega}}|v|_{1,p,\Omega})$
$\qquad \forall v\in W^{2,p}(\Omega)$

iv) $|v|_{3,p,\Omega}\leqslant C(n)|J_F^{-1}|_{0,\infty,\Omega}^{1/p}(|F^{-1}|_{1,\infty,\Omega}^2|\hat{v}|_{3,p,\hat{\Omega}}$
$\quad +|F^{-1}|_{1,\infty,\Omega}|F^{-1}|_{2,\infty,\Omega}|\hat{v}|_{2,p,\hat{\Omega}}$
$\quad +|F^{-1}|_{3,\infty,\Omega}|\hat{v}|_{1,p,\hat{\Omega}}) \qquad \forall v\in W^{3,p}(\Omega)$

其中，J_F^{-1}表示F^{-1}的雅可比行列式，

$$|F|_{l,\infty,\hat{\Omega}}=\sup_{\hat{x}\in\hat{\Omega}}\|D^lF(\hat{x})\|,\quad |F^{-1}|_{l,\infty,\Omega}=\sup_{x\in\Omega}\|D^lF^{-1}(x)\|$$

证明 由Ω是凸四边形正则单元得：J_F^{-1}存在，所以F是Ω和$\hat{\Omega}$之间的可逆变换。根据文献[1]中的定理，将其中的v，J_F，F^{-1}分别换为$\hat{v}$，J_F^{-1}，F，则得本引理的结论。 □

引理3 设已给一族正则的凸四边形四节点等参元，$\hat{K}$为参考正方形单元，则

$|F|_{1,\infty,\hat{K}}\leqslant Ch_k$，$|F|_{2,\infty,\hat{K}}\leqslant Ch_k^2$，$|F|_{3,\infty,\hat{K}}=0$

$|F^{-1}|_{1,\infty,K}\leqslant Ch_k^{-1}$，$|F^{-1}|_{2,\infty,K}\leqslant Ch_k^{-1}$，$|J_F|_{0,\infty,\hat{K}}\leqslant Ch_k$

$|J_F^{-1}|_{0,\infty,K}\leqslant Ch_k^{-1}$

其中，$h_k=\mathrm{diam}(K)$。

证明 由四边形四节点元的等参变换

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}=F(\hat{x})=\begin{Bmatrix} F_1(\hat{x}) \\ F_2(\hat{x}) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^4\varphi_i(\hat{x})x_i \\ \sum_{i=1}^4\varphi_i(\hat{x})y_i \end{Bmatrix}$$

展开后可写成：$F(\hat{x})=(T\hat{x}+b)+Q(\hat{x})$

其中：

$$T=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -x_1+x_2+x_3-x_4 & -x_1-x_2+x_3+x_4 \\ -y_1+y_2+y_3-y_4 & -y_1-y_2+y_3+y_4 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x}=\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix},\quad b=\frac{1}{4}\begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^4 x_i \\ \sum_{i=1}^4 y_i \end{Bmatrix},\quad Q(\hat{x})=\begin{Bmatrix} (x_1-x_2+x_3-x_4)\xi\eta/4 \\ (y_1-y_2+y_3-y_4)\xi\eta/4 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} Q_1(\hat{x}) \\ Q_2(\hat{x}) \end{Bmatrix}$$

这里，$T\hat{x}+b$ 是仿射变换。由[1]得：$\|T\|\leqslant h_k/\hat{\rho}\leqslant Ch_k$。由正则单元定义：$h_k/\rho_k\leqslant\sigma_0$（常数），进而有$\|T^{-1}\|=\hat{h}/\rho_k\leqslant Ch_k^{-1}$，所以，$DF(\hat{x})=T+DQ(\hat{x})$，其中

$$DQ(\hat{x})=\begin{bmatrix}(x_1-x_2+x_3-x_4)\eta/4 & (x_1-x_2+x_3-x_4)\xi/4\\(y_1-y_2+y_3-y_4)\eta/4 & (y_1-y_2+y_3-y_4)\xi/4\end{bmatrix}\tag{3.4}$$

因为，

$$\begin{aligned}\sup_{\hat{x}\in\hat{K}}\|DQ(\hat{x})\|&\leqslant\sup_{\hat{x}\in\hat{K}}[\|DQ_1(\hat{x})\|+\|DQ_2(\hat{x})\|]\\&=\sup_{(\xi,\eta)\in\hat{K}}\Big[\sup_{\|e_1\|\leqslant1}\Big|((x_1-x_2+x_3-x_4)\eta/4\quad(x_1-x_2+x_3-x_4)\xi/4)\begin{Bmatrix}e_{11}\\e_{12}\end{Bmatrix}\Big|\\&\quad+\sup_{\|e_2\|\leqslant1}\Big|((y_1-y_2+y_3-y_4)\eta/4\quad(y_1-y_2+y_3-y_4)\xi/4)\begin{Bmatrix}e_{21}\\e_{22}\end{Bmatrix}\Big|\Big]\\&=\sup_{(\xi,\eta)\in\hat{K}}[\sup_{\|e_1\|\leqslant1}|((x_1-x_2+x_3-x_4)\eta e_{11}/4\quad(x_1-x_2+x_3-x_4)\xi e_{12}/4)|\\&\quad+\sup_{\|e_2\|\leqslant1}|((y_1-y_2+y_3-y_4)\eta e_{21}/4\quad(y_1-y_2+y_3-y_4)\xi e_{22}/4)|]\\&<C[|x_1-x_2|+|x_3-x_4|+|y_1-y_2|+|y_3-y_4|]\leqslant Ch_k\end{aligned}$$

所以，

$$|F|_{1,\infty,\hat{K}}=\sup_{\hat{x}\in\hat{K}}\|DF(\hat{x})\|\leqslant\|T\|+\sup_{\hat{x}\in\hat{K}}\|DQ(\hat{x})\|\leqslant Ch_k$$

又

$$\begin{aligned}\sup_{\hat{x}\in\hat{K}}\|D^2Q(\hat{x})\|&\leqslant\sup_{\hat{x}\in\hat{K}}[\|D^2Q_1(\hat{x})\|+\|D^2Q_2(\hat{x})\|]\\&=\sup_{(\xi,\eta)\in\hat{K}}\Big\{\sup_{\substack{\|e_i\|\leqslant1\\(i=1,2)}}\Big\|\begin{bmatrix}0 & x_1-x_2+x_3-x_4\\x_1-x_2+x_3-x_4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_{11} & e_{21}\\e_{12} & e_{22}\end{bmatrix}\Big\|\\&\quad+\sup_{\substack{\|e_j\|\leqslant1\\(j=3,4)}}\Big\|\begin{bmatrix}0 & y_1-y_2+y_3-y_4\\y_1-y_2+y_3-y_4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_{31} & e_{41}\\e_{32} & e_{42}\end{bmatrix}\Big\|\Big\}\\&=\sup_{\substack{\|e_i\|\leqslant1\\(i=1,2)}}\begin{Vmatrix}(x_1-x_2+x_3-x_4)e_{12} & (x_1-x_2+x_3-x_4)e_{22}\\(x_1-x_2+x_3-x_4)e_{11} & (x_1-x_2+x_3-x_4)e_{21}\end{Vmatrix}\\&\quad+\sup_{\substack{\|e_j\|\leqslant1\\(j=3,4)}}\begin{Vmatrix}(y_1-y_2+y_3-y_4)e_{32} & (y_1-y_2+y_3-y_4)e_{42}\\(y_1-y_2+y_3-y_4)e_{31} & (y_1-y_2+y_3-y_4)e_{41}\end{Vmatrix}\\&<C[(x_1-x_2+x_3-x_4)^2+(y_1-y_2+y_3-y_4)^2]\\&\leqslant C[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(x_3-x_4)^2+(y_3-y_4)^2]\\&\leqslant Ch_k^2\end{aligned}$$

以及

$$D^2F(\hat{x})=D^2Q(\hat{x})$$

所以

$$|F|_{2,\infty,\hat{K}}=\sup_{\hat{x}\in\hat{K}}\|D^2F(\hat{x})\|=\sup_{\hat{x}\in\hat{K}}\|D^2Q(\hat{x})\|\leqslant Ch_k^2$$

因为$F\in Q_1^2$，所以$D^3F(\hat{x})=0$，$|F|_{3,\infty,\hat{K}}=0$。

由文献[4]得：

$$DF(\hat{x})=T(I+T^{-1}DQ(\hat{x}))\tag{3.5}$$

因为四边形单元是凸四边形正则的，所以$|J_F|\neq0$；而$DF(\hat{x})=J_F(\hat{x})$，因此 $DF(\hat{x})$可逆；

又T^{-1}可逆，故$(I+T^{-1}DQ(\hat{x}))$可逆，且存在常数C，使得

$$\sup_{\hat{x}\in\hat{K}}\|(I+T^{-1}DQ(\hat{x}))^{-1}\|\leqslant C,\quad DF^{-1}(x)=(DF(\hat{x}))^{-1}=(I+T^{-1}DQ(\hat{x}))^{-1}T^{-1}$$

所以 $$|F^{-1}|_{1,\infty,K}=\sup_{x\in K}\|DF^{-1}(x)\|\leqslant\sup_{\hat{x}\in\hat{K}}\|(I+T^{-1}DQ(\hat{x}))^{-1}\|\|T^{-1}\|\leqslant Ch_k^{-1}$$

对于任意向量ξ_1和ξ_2，由

$$D^2F^{-1}(x)(DF(\hat{x})\xi_1,\ DF(\hat{x})\xi_2)=-DF^{-1}(x)(D^2F(\hat{x})(\xi_1,\xi_2))$$

得

$$D^2F^{-1}(x)(\xi_1,\xi_2)=-DF^{-1}(x)(D^2F(\hat{x})(DF^{-1}(x)\xi_1,\ D^{-1}F(x)\xi_2))$$

于是

$$\|D^2F^{-1}(x)\|=\sup_{\substack{\|\xi_i\|\leqslant 1\\ i=1,2}}\|D^2F^{-1}(x)(\xi_1,\xi_2)\|\leqslant\|D^2F(\hat{x})\|\|DF^{-1}(x)\|^3$$

进而

$$|F^{-1}|_{2,\infty,\Omega}=\sup_{x\in K}\|D^2F^{-1}(x)\|\leqslant|F|_{2,\infty,\hat{K}}|F^{-1}|^3_{1,\infty,K}\leqslant Ch_k^{-1}$$

由(3.5)得：

$$J_F(\hat{x})=|DF(\hat{x})|=|T||I+T^{-1}DQ(\hat{x})|$$

因此，

$$|J_F|_{0,\infty,\hat{K}}=\sup_{\hat{x}\in\hat{K}}J_F(\hat{x})<C|T|\leqslant Ch_k$$

$$|T|=J_F(\hat{x})|(I+T^{-1}DQ(\hat{x}))^{-1}|$$

故

$$|J_F^{-1}|_{0,\infty,K}=\sup_{x\in K}J_F^{-1}(x)\leqslant C/|T|\leqslant Ch_k^{-1}$$

由以上引理，可推得下列结论：

$$|u-\Pi u|_{0,K}\overset{p=2}{\underset{[1]}{\leqslant}}|J_F|^{1/2}_{0,\infty,\hat{K}}|\widehat{u-\Pi u}|_{0,\hat{K}}\overset{\text{Lemma1}}{=}|J_F|^{1/2}_{0,\infty,\hat{K}}|\hat{u}-\hat{\Pi}\hat{u}|_{0,\hat{K}}$$

$$\overset{(3)}{\leqslant}C|J_F|^{1/2}_{0,\infty,\hat{K}}|\hat{u}|_{m,K}\qquad(m=0,1,2,3)$$

当$m=2$时，

$$|u-\Pi u|_{0,K}\overset{\text{Lemma2}}{\leqslant}C|J_F|^{1/2}_{0,\infty,\hat{K}}|J_F^{-1}|^{1/2}_{0,\infty,K}(|F|^2_{1,\infty,\hat{K}}|u|_{2,K}$$
$$+|F|_{2,\infty,\hat{K}}|u|_{1,K})\overset{\text{Lemma3}}{\leqslant}C(h_k^2|u|_{2,K}+h_k^2|u|_{1,K})$$
$$=Ch_k^2(|u|_{2,K}+|u|_{1,K})$$

所以，对变分问题$a(u,v)=f(v)$的有限元解的误差估计为：

$$\|u-u_h\|_{0,\Omega}\leqslant C\|u-\Pi_h u\|_{0,\infty}\leqslant C\sum_{k\in V_h}\|u-\Pi_k u\|_{0,K}$$
$$\leqslant C\sum_{k\in V_h}h_k^2(|u|_{2,K}+|u|_{1,K})\leqslant Ch^2(|u|_{2,\Omega}+|u|_{1,\Omega})$$
$$h=\max\{h_k,k\in V_h\}$$

当$m=3$时，

$$|u-\Pi u|_{0,K}\leqslant C|J_F|^{1/2}_{0,\infty,\hat{K}}|J_F^{-1}|^{1/2}_{0,\infty,K}(|F|^3_{1,\infty,\hat{K}}|u|_{3,K}$$
$$+|F|_{1,\infty,\hat{K}}|F|_{2,\infty,\hat{K}}|u|_{2,K}+|F|_{3,\infty K},|u|_{1,K})$$
$$\leqslant Ch_k^3(|u|_{3,K}+|u|_{2,K})$$

同理得： $\|u-u_h\|_{0,\Omega}\leqslant Ch^3(|u|_{3,\Omega}+|u|_{2,\Omega})$

当$m=0,1$时，同理得

$$\|u-u_h\|_{0,\Omega}\leqslant C|u|_{0,\Omega},\quad \|u-u_h\|_{0,\Omega}\leqslant Ch|u|_{1,\Omega}$$

又 $|u-\Pi_u|_{1,K}\leqslant C|J_F|^{1/2}_{0,\infty,K}|F^{-1}|_{1,\infty,K}|\hat{u}|_{m,\hat{K}}$ $(m=1,2,3)$

当$m=1$时， $\|u-\Pi u\|_{1,K}\leqslant C|u|_{1,K}$

$$\|u-u_h\|_{1,\Omega}\leqslant C|u|_{1,\Omega}$$

当$m=2$时， $\|u-\Pi u\|_{1,K}\leqslant Ch_k(|u|_{2,K}+|u|_{1,K})$

$$\|u-u_h\|_{1,\Omega}\leqslant Ch(|u|_{2,\Omega}+|u|_{1,\Omega})$$

当$m=3$时， $\|u-\Pi u\|_{1,K}\leqslant Ch_k^2(|u|_{3,K}+|u|_{2,K})$

$$\|u-u_h\|_{1,\Omega}\leqslant Ch^2(|u|_{3,\Omega}+|u|_{2,\Omega})$$

类似地，有

$$\|u-\Pi u\|_{2,K}\leqslant C(|u|_{2,K}+|u|_{1,K})$$
$$\|u-\Pi u\|_{2,K}\leqslant Ch_k(|u|_{3,K}+|u|_{2,K})$$
$$\|u-u_h\|_{2,\Omega}\leqslant C(|u|_{2,\Omega}+|u|_{1,\Omega})$$
$$\|u-u_h\|_{2,\Omega}\leqslant Ch(|u|_{3,\Omega}+|u|_{1,\Omega})$$

综上不等式得：

$$\|u-\Pi u\|_{n,K}\leqslant Ch_k^{m-n}(|u|_{m,K}+|u|_{m-1,K})\qquad 0\leqslant n\leqslant m\quad (m=2,3)$$
$$\|u-\Pi u\|_{n,K}\leqslant Ch_k^{m-n}|u|_{m,K}\qquad 0\leqslant n\leqslant m\quad (m=0,1)$$
$$\|u-u_h\|_{n,\Omega}\leqslant Ch^{m-n}(|u|_{m,\Omega}+|u|_{m-1,\Omega})\qquad 0\leqslant n\leqslant m\quad (m=2,3)$$
$$\|u-u_h\|_{n,\Omega}\leqslant Ch^{m-n}|u|_{m,\Omega}\qquad 0\leqslant n\leqslant m\quad (m=0,1)$$

从而得到以下定理：

定理2 设(q_n)是C^0类的正则凸四边形网格划分，等参变换$F\in(Q_1)^2$，$(\hat{K},\ \hat{\Sigma},\ \hat{\Psi})$是一个参考有限元，其中$\hat{K}$是正方形单元。

1) 如果存在整数$m\geqslant 1$，使得$P_m\subset\hat{\Psi}\subset H^1(\hat{K})$，则当$u\in H^m(\Omega)$时，存在与$h$和$u$无关的常数$C$，使得

$$\|u-\Pi_h u\|_{1,\Omega}\leqslant Ch^{m-1}(|u|_{m,\Omega}+|u|_{m-1,\Omega})\qquad (m=2,3);$$

2) 如果u和u_h分别为变分问题$a(u,v)=f(v)$，$(u\in H^m(\Omega))$的精确解和有限元解，且存在$\alpha>0$，使得$\alpha\|u\|^2_m\leqslant a(u,u)$，$\forall u\in H^m(\Omega)$，且$f(v)$是$H^m(\Omega)$上 有界线性泛函，则

$$\|u-u_h\|_{1,\Omega}\leqslant Ch^{m-1}(|u|_{m,\Omega}+|u|_{m-1,\Omega}),\qquad (m=2,3)$$

由定理1和定理2可见，满足一定条件的四边形单元剖分的有限元解是收敛的。

参 考 文 献

[1] P. G. Cialet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam (1978).

[2] G. Strang and G. F. Fix, *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1973).

[3] I. Babuska and A. K. Aziz, Survey lecture on the mathematical foundation of the finite element method, in *The Mathematical Foundations of the FEM with Applications to Partial Differential Equations*, Ed. A. K. Aziz, Academic Press, N. Y. (1972), 3—382.

[4] M. K. Georges and M. S. Shephard, Automated adaptive two-dimensional system for the hp-version of the finite element method, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 32(4) (1991).

[5] I. Babuska, R. B. Kellogy and J. Pitkarante, Direct and inverse error estimates for finite element with mesh refinements, *Numer. Math.*, 33 (1979), 447—471.

[6] W. Gui and I. Babuska, The h,p and h-p version of the finite element method in one dimention, Part Ⅱ——the adaptive h-p version, *Numer. Math.*, 49 (1988), 659—684.

[7] I. Babuska and M. Vogelius, Feedback and adaptive finite element solution of one-dimensional boundary value problems, *Numer. Math.*, 44 (1984), 75—102.

[8] D. W. Wang, I. N. Katz and B. A. Szabo, h- and p-version finite element analysis of a rhombic plate, *Int. J. Num. Eng.*, 20 (1984), 1399—1405.

[9] J. Z. Zhu and O. C. Zienkiewicz, Adaptive techniques in the finite element method, *Commun. Appl. Numer. Meth.*, 4 (1988), 197—204.

On the Error Estimate of h-Convergence in Quadrilateral Elements

Duan Mei

(*Southwest Jiaotong University, Chengdu* 610031, *P. R. China*; *Iwate University, Morioka, Japan*)

Miyamoto Yutaka

(*Iwate University, Morioka, Japan*)

Zhou Benkuan Chen Dapeng

(*Southwest Jiaotong University, Chengdu* 610031, *P. R. China*)

Abstract

To provide a theoretical basis for h-type finite elemnet analysis with quadrilateral elements, in the present paper, the h-convergence of quadrilateral elements is established, whose related lemmas and theorems being presented, and therefore, the error estimate problems are investigated.

Key words finite element, quadrilateral element, h-convergence, error estimate