应用数学和力学，第16卷 第12期（1995年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

高维Liénard型方程的调和解

董勤喜[1]　　黄先开[2]

（樊大钧推荐，1994年7月4日收到）

摘　　要

本文运用重合度理论，在阻尼可负的条件下，得到Liénard型系统

$$\ddot{x}=\frac{d}{dt}\mathrm{grad}F(x)+\mathrm{grad}G(x)=p(t)$$

存在调和解的若干新判据。

关键词　Liénard系统　调和解　重合度

本文讨论如下n维Liénard型方程

$$\ddot{x}+\frac{d}{dt}\mathrm{grad}F(x)+\mathrm{grad}G(x)=p(t) \tag{1}$$

的调和解。以下恒假定 $x\in R^n$，$F\in C^2(R^n,\ R)$，$G\in C^1(R^n,R)$，$p\in C^1(R,R^n)$，$p(t+T)=p(t)$，$T>0$。

关于高维Liénard型方程(1)的调和解，早期Mawhin等把(1)中 $\mathrm{grad}G(x)$ 换为一般的 $g(x)$ 时，对$g(x)$附加较强的限制条件下证明了(1)存在调和解。1982 年，丁伟岳[1]在阻尼为正，即 $\partial^2F(x)/\partial x^2\geqslant a(a>0)$ 时，并对 $G(x)$ 附加适当条件下同样证明(1)存在调和解。近年来，葛渭高[2,3]进一步改进了文[1]的结果，并且通过把$G(x)$，$F(x)$联系起来，得到 (1) 仍存在调和解的结论（见文献[2]中定理2）。

本文采用文[2,3]中的方法，在不要求阻尼为正的条件下，通过建立$G(x)$与$F(x)$的关系式，得到(1)存在调和解的两个充分条件。

记　　$m=\max\limits_{t\in[0,T]}|p(t)|$，$m_1=\max\limits_{t\in[0,T]}|\dot{p}(t)|$

定理1　假设存在常数α，β，γ，$a>m_1$，$b\geqslant m$及$R>0$，非奇异常数阵A，满足

(a)　当$x\in R^n$，$|x|>R$时，$(Ax)^T\mathrm{grad}G(x)>0$

(b)　$|\mathrm{grad}G(x)|\leqslant\alpha\mathrm{grad}G(x)+\beta|x|+\gamma$，$\forall x\in R^n$

(c)　当$|x|>R$时，$\mathrm{grad}^TF(x)\mathrm{grad}G(x)\geqslant a|x|+b|\mathrm{grad}F(x)|$

则方程(1)存在调和解。

定理2　假设存在常数α，β，γ，$a\geqslant m_1$，$b>m$及$R>0$，非奇异常数阵A，满足

(a)　当$|x|>R$时，$(Ax)^T\mathrm{grad}G(x)>0$

(b)　$|\mathrm{grad}G(x)|\leqslant\alpha\mathrm{grad}G(x)+\beta|\mathrm{grad}F(x)|+\gamma$　　$\forall x\in R^n$

1 北京理工大学应用力学系，北京 100081；
2 北京商学院数学教研室，北京 100037。

(c) 当$|x|>R$时，$\mathrm{grad}^T F(x)\mathrm{grad}G(x)\geqslant a|x|+b|\mathrm{grad}F(x)|$

则方程(1)存在调和解.

例 考虑如下方程

$$\ddot{x}+\cos x\dot{x}+x=\exp[\sin t] \tag{2}$$

上述方程可改写为

$$\ddot{x}+\frac{d}{dt}(5+\sin x)+x=\exp[\sin t] \tag{3}$$

这里 $\mathrm{grad}F(x)=5+\sin x$，$\mathrm{grad}G(x)=x$，易证定理1的条件均满足，因此方程(2)存在调和解. 但这里阻尼$f(x)=\cos x$非正，且

$$\int_0^{2\pi}\exp[\sin t]dt\neq 0$$

因此不能用Mawhin及文献[1,2,3]中的方法判定其调和解的存在性.

定理的证明 仅证定理1，定理2可类似讨论. 对$\forall x\in R^n$，定义 $|x|=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$. 令

$$X=\{x\in C^1(R,R^n)\,|\,x(t+T)=x(t)\}$$

对$\forall x\in X$，定义其模为$\|x\|=\max\limits_{t\in[0,T]}(|x|+|\dot{x}|)$，则$X$为Banach空间，考虑$X$中算子方程

$$Lx=\lambda N(x,\lambda)\qquad \lambda\in[0,1] \tag{4}$$

其中 $$L=\frac{d^2}{dt^2},\quad N(x,\lambda)=-\frac{d}{dt}\mathrm{grad}F(x)-\mathrm{grad}G(x)+\lambda p(t)$$

易验证L是指标为零的Fredholm算子，N在$\bar{\Omega}\times[0,1]$上是L-紧的，其中Ω是X中的有界开集. 另外，定义投影算子

$$P:X\cap\mathrm{Dom}L\to\mathrm{Ker}L,\quad Px=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$$

$$Q:X\to X/\mathrm{Im}L,\quad Qx=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$$

我们要用到如下引理（见[2]）.

引理 设X是Banach空间，L是指标为零的 Fredholm 算子，$N:\bar{\Omega}\times[0,1]\to X$是$L$-紧的，其中$\Omega$是$X$中有界开集，满足

① $Lx\neq\lambda N(x,\lambda)$，$\forall\lambda\in(0,1)$，$\forall x\in\mathrm{Dom}L\cap\partial\Omega$

② $QN(x,0)\neq 0$，$\forall x\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}L$

③ $\deg\{QN(\cdot,0),\ \Omega\cap\mathrm{Ker}L,0\}\neq 0$

则$Lx=N(x,1)$在$\bar{\Omega}$中有解.

下面验证引理的条件成立. 对应(4)有

$$\ddot{x}+\lambda\frac{d}{dt}\mathrm{grad}F(x)+\lambda\mathrm{grad}G(x)=\lambda^2 p(t)\qquad \lambda\in(0,1) \tag{5}$$

设$x=x(t)\in X$是(5)的任一T周期解，(5)式同乘以$\dot{x}(t)$并积分

$$\lambda\int_0^T(\dot{x})^T\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2}\dot{x}dt=\lambda^2\int_0^T(\dot{x})^2 p(t)dt=-\lambda^2\int_0^T(\dot{p}(t))^T x dt$$

即有 $$\int_0^T(\dot{x})^T\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2}\dot{x}dt=-\lambda\int_0^T(\dot{p}(t))^T x dt \tag{6}$$

又(5)式同乘以$\mathrm{grad}F(x)$并积分得

$$-\int_0^T(\dot{x})^T\frac{\partial^2F(x)}{\partial x^2}\dot{x}dt+\lambda\int_0^T\mathrm{grad}^TF(x)\mathrm{grad}G(x)dt=\lambda^2\int_0^T\mathrm{grad}^TF(x)p(t)dt \tag{7}$$

结合(6)、(7)有

$$\int_0^T\mathrm{grad}^TF(x)\mathrm{grad}G(x)dt=\lambda\int_0^T\mathrm{grad}^TF(x)p(t)dt-\int_0^T(\dot{p}(t))^Txdt$$

$$\leqslant m\int_0^T|\mathrm{grad}F(x)|dt+m_1\int_0^T|x|dt \tag{8}$$

记 $$M=\max_{|x|<R}|\mathrm{grad}^TF(x)\mathrm{grad}G(x)|$$

则对$\forall x\in R^n$，有

$$\mathrm{grad}^TF(x)\mathrm{grad}G(x)\geqslant a|x|+b|\mathrm{grad}F(x)|-M$$

因此由(8)式可导出

$$(b-m_1)\int_0^T|x|dt\leqslant MT$$

即 $$\int_0^T|x|dt\leqslant\frac{MT}{b-m_1}\triangleq R_1 \tag{9}$$

又(5)式积分得

$$\int_0^T\mathrm{grad}G(x)dt=\int_0^Tp(t)dt$$

从而 $$\left|\int_0^T\mathrm{grad}G(x)dt\right|\leqslant\int_0^T|p(t)|dt\leqslant mT$$

于是由条件(b)有：

$$\int_0^T|\mathrm{grad}G(x)|dt\leqslant\alpha\int_0^T\mathrm{grad}G(x)dt+\beta\int_0^T|x|dt+\gamma T\leqslant\alpha mT+\beta R_1+\gamma T\triangleq R_2$$

记$x(t)=\bar{x}+\tilde{x}$，其中 $\bar{x}=\frac{1}{T}\int_0^Tx(t)dt$，$\tilde{x}=x-\bar{x}$，则 $\int_0^T\tilde{x}(t)dt=0$，因此存在 $t_i\in[0,T]$，使得$\tilde{x}_i(t_i)=0$，$(i=1,2,\cdots,n)$，于是有

$$|\tilde{x}_i(t)|\leqslant\int_0^T|\dot{x}_i(t)|dt,\quad|\tilde{x}|_\infty=\max_{t\in[0,T]}|x_i(t)|\leqslant\int_0^T|\dot{x}|dt$$

(5)式同乘以$\tilde{x}(t)$并积分得

$$-\int_0^T|\dot{x}|^2dt+\lambda\int_0^T(\tilde{x})^T\mathrm{grad}G(x)dt=\lambda^2\int_0^T(\tilde{x})^Tp(t)dt$$

$$\int_0^T|\dot{x}|^2dt\leqslant|\tilde{x}|_\infty\int_0^T(|\mathrm{grad}G(x)|+|p(t)|)dt$$

$$\leqslant(R_2+m)T\int_0^T|\dot{x}|dt\leqslant(R_2+m)T\cdot\sqrt{T}\left(\int_0^T|\dot{x}|^2dt\right)^{1/2}$$

从而有 $$\int_0^T|\dot{x}|^2dt\leqslant(R_2+m)^2T^3\triangleq R_3 \tag{10}$$

又由条件(c)及(8)知，一定存在$t_0\in[0,T]$，使$|x(t_0)|\leqslant R$，因此

$$|x(t)|\leqslant|x(t_0)|+\int_0^T|\dot{x}|dt\leqslant R+\sqrt{TR_3}\triangleq R_4 \tag{11}$$

进一步易证，存在$R_5>0$，使

$$|\dot{x}(t)| \leqslant R_5 \tag{12}$$

这里$R_i(i=1,2,\cdots,5)$均与λ无关．记 $R_0=R_4+R_5$，取 $\Omega=\{x(t)\in X \mid \|x\|<R_0\}$，则引理条件①满足．由于$\mathrm{Ker}L=R^n$，当$x\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}L=\partial\Omega\cap R^n$时，$x$是常向量，根据条件(a)知

$$QN(x,0)=-\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{grad}G(x)\,dt=-\mathrm{grad}G(x)\neq 0$$

引理条件②满足．同时易证

$$F(\mu,x)=\mu Ax+(1-\mu)\mathrm{grad}G(x)\neq 0 \qquad 0\leqslant\mu\leqslant 1$$

于是

$$\deg(QN(\cdot,0),\ \Omega\cap R^n,0)=\deg(-\mathrm{grad}G,\ \Omega\cap R^n,0)$$
$$=\deg(-A,\ \Omega\cap R^n,0)\neq 0$$

引理条件③满足，因此方程$Lx=N(x,1)$在X中有解，即方程(1)存在调和解.证毕.

参 考 文 献

[1] 丁伟岳，On the existence of periodic solutions for the Liénard systems，数学学报，25(5) (1982)，626—632.

[2] Ge Weigao, On the existence of harmonic solutions of Liénard systems, *Non-linear Analysis, TMA*, 16(2) (1991), 183—190.

[3] 葛渭高，n维Liénard型方程的调和解，数学年刊，11A(3) (1990)，297—307.

On the Existence of Harmonic Solutions for Higher-Order Liénard Systems

Dong Qinxi

(*Department of Applied Mechanics, Beijing Institute of Technology, Beijing* 100081, *P. R. China*)

Huang Xiankai

(*Department of Mathematics, Beijing Institute of Bussiness, Beijing* 100037, *P. R. China*)

Abstract

In this paper, by using of the theory of coincidence degree, we obtain the new conditions which guarantee the existence of harmonic solutions for Liénard systems

$$\ddot{x}=\frac{d}{dt}\mathrm{grad}F(x)+\mathrm{grad}G(x)=p(t)$$

Our results do not require that the damping must be positive.

Key words Liénard systems, harmonic solutions, coincidence degree