

连铸中的自由边界问题的边界元解法*

李耀勇¹ 张自立¹

(丁皓江推荐, 1993年6月18日收到, 1994年4月21日收到修改稿)

摘 要

本文应用边界元法求解钢铁生产中连铸工艺出现的自由边界问题。首先, 对较一般的连铸过程的数学模型进行简化并给出相应的边界积分方程, 以及叙述了用边界元法求解该问题的步骤。然后, 我们给出了一个计算实例, 并对该方法的收敛快慢、对初值的敏感性和对区域形状的适应性等问题进行了探讨。最后, 针对一种简化的模型, 将数值解与解析解进行比较, 两者吻合较好。

关键词 边界元法 自由边界问题 连铸 数值解

一、前 言

近几年来, 在国内外的钢铁生产中, 逐渐采用一种新技术——连铸工艺^[1]。连铸就是让精炼好的钢水, 出钢的同时直接凝成板坯, 省去铸锭与初轧两道工序。与传统的炼钢方法相比, 无论从节能观点, 还是提高劳动生产率, 无疑这是技术上的一大进步。

连铸生产线示意图如图1^[2]。精炼好的钢水, 通过盛钢桶倒入中间罐, 经其下部出口注入结晶器, 受到结晶强制冷却凝固成壳, 此谓之一次冷却, 脱离结晶器后继续受到喷水冷却, 直至完全凝固。板坯在拉辊机组的牵引下快速向前, 以提高连铸坯生产率。

连铸生产线是一个典型的分散控制系统^[1]。连铸坯质量的好坏, 如坯内是否有缺陷等, 与冷却过程中的各种参数, 如拉速、凝固层厚度等, 有直接的关系。本文就是对连铸的一个模型, 利用边界元法进行计算, 为连铸过程的控制提供定量的信息。

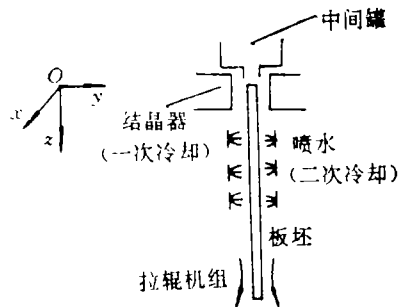


图 1

二、连铸的数学模型

如图1, 设坐标原点位于结晶器的上端中心, x 轴为板厚方向, y 轴沿板宽方向, z 轴沿拉

1 西安交通大学数学系, 西安 710049。

坯方向。利用热量平衡关系, 可得连铸坯中温度 u 的基本微分方程^[2]

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (k(u) \cdot \nabla u) - \rho c v \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.1)$$

这里 ρ , c , $k(u)$ 分别为钢的密度、比热和传热系数, v 为板坯拉速。式(2.1)右端的最后一项就是板坯运动所带走的热量。

假设: 1) 结晶器壁和喷水的温度不随时间变化; 2) 拉坯方向(z 方向)上导热所产生的热传导忽略不计(即 $a \cdot \partial^2 u / \partial z^2$ 忽略); 3) 忽略 y 方向上的传热; 4) 金属的传热性质不受温度影响。

此时, 凝固的进行认为是稳定的, 问题归结为二维稳态问题。如图2所示, 取连铸坯的一半, 记为 $ACEF$, 其中 EF 为沿 z 方向的中轴线, $ACEF$ 为矩形, 曲线 AD 为板坯中固液交界面, 其参数方程为 $x=S(z)$, AB 为一次冷却部分, BC 为二次冷却部分, $ACDA$ (即图2中阴影部分)所围区域 Ω_1 为凝固部分, Ω_2 为钢水部分。在上述假设下, 可得如下的数学模型:

微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{a}{v} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{在 } \Omega_1 \cup \Omega_2 \text{ 中} \quad (2.2)$$

边界条件

$$u|_{AF} = \varphi_0(x) \quad (2.3)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{AB} = h_1(u - u_1) \quad (2.4)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{BC} = h_2(u - u_2) \quad (2.5)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{EF} = 0 \quad (2.6)$$

$$u|_{AD} = u_c \quad (2.7)$$

$$k \left(\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{z=S(z)-0} - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{z=S(z)+0} \right) = \rho L \frac{dS(z)}{dz} \quad (2.8)$$

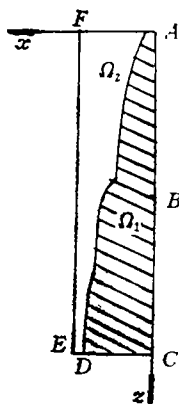


图 2

这里, h_1 , h_2 分别为结晶器壁和二次喷水冷却的传热热阻的倒数, U_c 为钢的凝固温度, L 为钢的凝固热, $a = k/\rho c$, $\varphi_0(x)$ 为钢水从中间罐进入结晶器时的温度。

由于板坯中的固液分界线 AD 的位置是事先未知的, 需要连同板坯中的温度一起求出来, 因此式(2.2)~(2.8)构成数学上的所谓自由边界问题^[3]。

三、边界元法

我们知道^[5], 方程(2.2)的基本解为

$$u^*(x, z; x_0, z_0) = - \frac{1}{[4\pi\alpha|z-z_0|]^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4\alpha|z-z_0|}\right] H(z_0-z) \quad (3.1)$$

$$q^*(x, z; x_0, z_0) = \frac{\partial u^*}{\partial x} = \frac{1}{4[\pi\alpha^3|z-z_0|^3]^{\frac{1}{2}}} u^*(x, z; x_0, z_0) \quad (3.2)$$

其中

$$\alpha = \frac{a}{v}, \quad H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

将 $u^*(x, z; x_0, z_0)$ 乘以(2.2)式两端, 然后分别在区域 Ω_1 和 Ω_2 上积分, 利用分部积分公式和边界条件(2.3)~(2.7), 可得如下的边界积分方程

$$\begin{aligned} & cu(x_0, z_0) - \int_{CD} u^* u dx - \alpha \int_{DA} u^* \frac{\partial u}{\partial x} dz - \alpha \int_{AB} u^* h_1 u dz \\ & + \alpha \int_{AB} q^* u dz - \alpha \int_{BC} u^* h_2 u dz + \alpha \int_{BC} q^* u dz \\ & = \int_{DA} u_c u^* dx - \alpha \int_{DA} q^* u_c dz + \alpha \int_{AB} u^* h_1 u_1 dz + \alpha \int_{BC} u^* h_2 u_2 dz \end{aligned} \quad (x_0, z_0) \in \partial\Omega_1 \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} & cu(x_0, z_0) - \int_{DE} u^* u dx - \alpha \int_{EF} q^* u dz - \alpha \int_{AD} \frac{\partial u}{\partial x} q^* dz \\ & = \int_{FA} u^* \varphi_0 dx - \alpha \int_{AD} q^* u_c dz \quad (x_0, z_0) \in \Omega_2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

其中 $u^* = u^*(x_0, z_0; x, z)$, $q^* = \frac{\partial u^*}{\partial x}(x_0, z_0; x, z)$, $c = \frac{\alpha}{2\pi}$

α 为点 $(x_0, z_0) \in \partial\Omega_1$ (或 $\partial\Omega_2$) 处相对于边界 $\partial\Omega_1$ (或 $\partial\Omega_2$) 的平面角 (即点 (x_0, z_0) 处相反的两切线的夹角)。式(3.3)是 Ω_1 上的边界积分方程, 式(3.4)是 Ω_2 上的边界积分方程。

分别将区域 Ω_1 和 Ω_2 的边界划分为一些小单元, 如图3所示。利用边界有限元方法或边界元配置法, 通过对未知函数的插值和把积分变为在各个小单元上积分之和等步骤, 把边界积分方程(3.3)和(3.4)分别划为下述线性代数方程组

$$A_1 X_1 = F_1 \quad (3.5)$$

$$A_2 X_2 = F_2 \quad (3.6)$$

其中未知函数 X_1, X_2 中包含边界积分方程(3.3), (3.4)的未知函数在节点上的近似值。

用边界元法求解自由边界问题(2.2)~(2.8)的步骤如下:

1) 给定自由边界 (即固液交界面) AD 的初位置 $S_0(z)$, 取定精度 $\varepsilon > 0$ 和迭代因子 $\omega > 0$, 令 $k=0$ 。

2) 对给定的 AD 的位置 $S_k(z)$, 求解由 Ω_1 和 Ω_2 上的边界积分方程(3.3)和(3.4)的离散化而得到的代数方程组(3.5)和(3.6), 由此得到自由边界 $S_k(z)$ 上 Ω_1 侧和 Ω_2 侧的 x 方向的导数

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=S_k(z)-0} \quad \text{和} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=S_k(z)+0}$$

3) 将2)中所求得的导数值

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=S_k(z)-0}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=S_k(z)+0}$$

代入式(2.8)中, 若不等式

$$\left| k \left(\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=S_k(z)-0} - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=S_k(z)+0} \right) - \rho L \frac{dS_k(z)}{dz} \right| < \varepsilon \quad (3.7)$$

在 $S_k(z)$ 上的所有节点处都成立, 则认为 $S_k(z)$ 是自由边界 AD 的位置, 转向4)。否则, 令

$$\begin{aligned} S_{k+1}(z_N) = S_k(z_N) + \omega \left[k \left(\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=S_k(z)-0} - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=S_k(z)+0} \right) \right. \\ \left. - \rho \cdot L \frac{dS_k(z)}{dz} \right]_{z=z} \end{aligned} \quad (3.8)$$

其中 z_N 为 AD 上节点 N 的 z 坐标(它在 AD 的位置进行迭代时不变化),令 $k:=k+1$,返回2)。

4) 利用2)中所得的边界上的函数值 u 及其沿 x 方向的导数值,根据下述公式计算板坯内的任一点 (x_0, z_0) 温度值

$$\begin{aligned} u(x_0, z_0) = & \alpha \int_{AC} q^*(x_0, z_0; 0, z) \cdot u(0, z) dz \\ & + \alpha \int_{AD} q^*(x_0, z_0; S_k(z), z) u(S_k(z), z) dz \\ & - \alpha \int_{AC} u^*(x_0, z_0; 0, z) \frac{\partial u}{\partial x}(0, z) dz \\ & - \alpha \int_{AD} u^*(x_0, z_0; S_k(z), z) \frac{\partial u}{\partial x}(S_k(z), z) dz, \quad (x_0, z_0) \in \Omega_1 \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} u(x_1, z_1) = & \alpha \int_{EF} q^*(x_1, z_1; l, z) \cdot u(l, z) dz \\ & + \alpha \int_{AD} q^*(x_1, z_1; S_k(z), z) u(S_k(z), z) dz \\ & + \int_{FA} u^*(x_1, z_1; x, 0) \cdot \varphi_0(x) dx \\ & - \alpha \int_{AD} u^*(x_1, z_1; S_k(z), z) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(S_k(z), z) dz, \quad (x_1, z_1) \in \Omega_2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

其中 l 为 AF 的长度,见图3。

四、算 例

4.1 本文模型

在计算时,利用了如下的物理数据(采用厘米·克·秒制)和初、边值条件

$$k=0.08, \rho=7.5, c_p=0.16, L=65$$

$$h_1=0.002, h_2=0.001, u_c=1503^\circ\text{C}$$

$$u_1=50^\circ\text{C}, u_2=25^\circ\text{C}, \varphi_0(x)=1530^\circ\text{C}$$

我们取 $ACEF$ 为正方形, $AC=EF=100\text{cm}$, $AF=CE=5\text{cm}$, $AB=50\text{cm}$ 。将 AC , EF 等分为20个单元, AF , CE 等分为5个单元(如图3所示)。取每个单元的中点为节点,在每个单元上,未知函数用常数逼近。

对自由边界 AD 迭代时, AD 上节点的 z 坐标保持不变, x 坐标变动。将 AD 划分为20个单元,其节点的 z 坐标与 AC 上的相同。

我们在IBM PC/AT计算机上,编制Fortran程序进行计算,取精度 $\varepsilon=0.001$,迭代因子 $\omega=1$,自由边界 AD 的初位置为过 A , E 两点的线段,其方程为 $S_0(z)=0.05z(0$

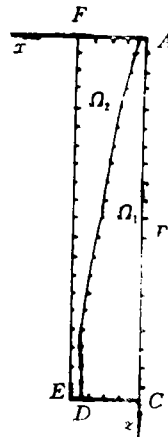


图 3

$0 \leq z \leq 100$), 迭代5次就达到所要求的精度. 各次迭代的结果见表1. (表1中仅列出AD上10个节点处x坐标的迭代值)

表1 自由边界AD上节点处x的计算

迭代次数 \ z值	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
0	0.500	1.000	1.500	2.000	2.500	3.000	3.500	4.000	4.500	5.000
1	0.568	1.083	1.467	1.752	2.214	2.732	3.310	3.752	4.012	4.631
2	0.624	1.046	1.435	1.654	2.012	2.652	3.111	3.670	3.825	4.432
3	0.663	1.072	1.434	1.610	1.936	2.581	3.106	3.584	3.782	4.301
4	0.703	1.081	1.433	1.609	1.830	2.536	3.102	3.507	3.739	4.125
5	0.702	1.080	1.433	1.601	1.826	2.522	3.451	3.451	3.742	4.101

从表1可以看出, 边界元法是很有效的, 迭代几次就能达到满意的精度.

我们又取初始边界AD为AC上的四分之一(或一半)正弦曲线, 方程为 $S_0(z) = 5.0^0 \cdot \sin(\pi z/200)$ (或 $S_0(z) = 5.00 \sin(\pi z/100)$ ($0 \leq z \leq 100$)), 其余数据同上, 迭代5次, 也达到精度要求, 且其节点上x坐标与表1最后一行的值之差的绝对值小于0.001. 这表明我们的算法对自由边界的初始位置是不敏感的.

4.2 更简化的情形

为了将用边界元法求得的数值解与解析解进行比较, 现将模型(2.2)~(2.8)进行简化. 再做如下假设: 1) 从中间罐流出的钢水温度恒定, 等于钢的凝固点温度 u_c ; 2) $h_1 = h_2 = +\infty$. 此时, 问题化为只在凝固区域 Ω_1 上求解下列边值问题

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{a}{v} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{在 } \Omega_1 \text{ 中} \tag{4.1}$$

$$u|_{AB} = u_1 \tag{4.2}$$

$$u|_{BC} = u_2 \tag{4.3}$$

$$u|_{AD} = u_c \tag{4.4}$$

$$k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{z=S(z)} = \rho L \frac{dS(z)}{dz} \tag{4.5}$$

其中 $x = S(z)$ 为AD的参数方程.

取 $u_1 = 1200^\circ\text{C}$, $u_2 = 1100^\circ\text{C}$, 其余的物理和几何数据同上.

容易得到问题(4.1)~(4.5)的Neumann解析解^[3], 其中自由边界AD的位置可以表示为

$$\begin{aligned} x &= 0.25\sqrt{z} & (0 \leq z \leq 50) \\ x &= 1.8 + 0.32 \cdot \sqrt{z-50} & (50 \leq z \leq 100) \end{aligned}$$

我们利用边界元法求问题(4.1)~(4.5)的数值解, 取精度 $\epsilon = 0.0001$, $\omega = 0.5000$, 其余数据同4.1. 数值解与解析解在节点上的比较见表2.

由表2可以看出, 利用边界元法求得的自由边界的位置与由解析方法求得的自由边界的位置是很接近的.

表2 自由边界AD位置的数值解与解析解的比较

节点处 z 值	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	
节点处x值	边界元解	0.5586	1.1174	1.3684	1.5806	1.7670	2.5690	3.0923	3.4426	3.7310	4.0002
	解析解	0.5590	1.1182	1.3691	1.5811	1.7678	2.5696	3.0924	3.4430	3.7312	4.0009

五、总 结

1) 本文的算例表明, 使用边界元法求解连铸中的自由边界问题, 除了具有使问题降低一维、计算量小等边界元法的一般优点外, 对自由边界问题而言, 由于该方法只在边界上(包括自由边界)列方程和进行计算, 因而能够避免有限元法出现的单元畸变、计算失稳等缺点, 能适应任意形状边界。

2) 利用对连铸过程的数值模拟, 可以为连铸机的设计和连铸过程的控制等提供有用的信息。例如, 通过改变 AB , BC 的长度, 能够选择出最优的结晶器和冷凝器的长度; 通过输入不同的 v 值, 确定合理的拉坯速度; 可以将 AC 以曲线 $x=g(z)$ 代替, 对连铸器的几何形状进行优化设计; 还可以将 $\varphi_0(x)$ 做为输入项, 对浇注钢水的最佳温度进行选择。

本文中的自由边界问题的模型和有关物理数据, 作者曾请教于西安交通大学机械工程系的朱尧华教授及其他老师。对于他们的热情帮助, 作者表示衷心的感谢。

参 考 文 献

- [1] 张振忠、徐平、蒋运采、林尤栋, 水平连铸控制系统的现状及其发展趋势, 铸造设备研究, 14(1) (1992), 27—30。
- [2] 吴兴宝, 钢铁生产中的自由边界问题, 应用数学, 1(1~2) (1988), 133—143。
- [3] J. Crank, *Free and Moving Boundary Problems*, Clarendon Press, Oxford (1984)。
- [4] 大中逸雄, 《计算机传热凝固解析入门: 铸造过程中的应用》, 许云祥译, 机械工业出版社, 北京 (1988)。
- [5] C. A. Brebbia, etc., *Boundary Element Techniques: Theory and Application in Engineering*, Springer-Verlag, Berlin (1984)。

Solving the Free Boundary Problem in Continuous Casting by Using Boundary Element Method

Li Yaoyong Zhang Zhili

(Department of Mathematics, Xi'an Jiaotong
University, Xi'an 710049, P. R. China)

Abstract

In this paper, the authors solve the Free Boundary Problem (FBP) in continuous casting by using Boundary Element Method (BEM). First, we simplify the

general mathematical model for continuous casting to a practicable model, and give the boundary integral equations with partial unknown boundary for this model, and describe in detail the steps of calculating this FBP by using the BEM. Next, we present the result of our numerical experiments, and discuss the stability, convergence and application of our method. At last, we simplify the former model so that it has an analytic solution, and we compare its numerical solution resulted from our method with its analytic solution.

Key words continuous casting, free boundary problem, boundary element method, numerical solution