应用数学和力学，第16卷 第11期(1995年11月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

半齐次边值问题解的存在性与稳定性

董勤喜　黄先开

(北京理工大学，北京 100081) (北京商学院，北京 100036)

(樊大钧推荐，1994年7月4日收到)

要　摘

本文讨论两类半齐次边值问题的可解性及解的稳定性，推广了文献[1～2]中的有关结果，并得到了若干新的判别准则。

关键词　边值问题　不动点定理　稳定性

在工程技术和力学中的许多问题都归结为微分方程的边值问题，因此，研究边值问题是否可解以及解的稳定性就具有重要意义。

一、

本节考虑如下边值问题

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}=A(t)x+g(t,\ x)\\&Mx(0)+Nx(T)=0\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

其中　$x\in R^n$，$A(t)$是n阶实矩阵且关于t连续，$g\in C^0([0,\ T]\times R^n,\ R^n)$，$M$、$N$是$n$阶实常数阵。记$B=\{x:[0,\ T]\to R^n|Mx(0)+Nx(T)=0,\ x(t)\text{连续}\}$，对$\forall\, x\in B$，定义其模为$\|x\|=\sup\limits_{[0,T]}|x(t)|$，则在通常内积下$B$是Banach空间。

对于如下边值问题

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}=A(t)x+g(t)\\&Mx(0)+Nx(T)=0\end{aligned}\right\}\tag{1.2}$$

设$x(t)$是$\dot{x}=A(t)x$的基本解矩阵，则(1.2)有唯一解的充要条件是$M+Nx(T)$非奇异。我们利用这个结果，通过定义B上的全连续算子T，再根据不动点定理可以证明：

定理1　假设$\dot{x}=A(t)x$的基本解矩阵$x(t)$满足$M+Nx(T)$非退化，且对$t\in[0,\ T]$一致有$\lim\limits_{|x|\to\infty}|g(t,\ x)|/|x|=0$，则边值问题(1.1)有解。

证明　对$\forall\, u(t)\in B$，方程

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}=A(t)x+g(t,\ u(t))\\&Mx(0)+Nx(T)=0\end{aligned}\right\}\tag{1.3}$$

存在唯一解v，记为$Tu=v$，这样定义一个算子$T:B\to B$，我们要证T在B中一个适当集上存在不动点，这个不动点即为(1.1)的解.

为此先证T是相对紧的. 设$u_n(t)\in B$，记$v_n=Tu_n(t)$，$t\in[0,T]$，$\|u_n(t)\|\le d$（d为常数），今证$\{v_n(t)\}$对$t\in[0,T]$是一致有解的. 若不然令$w_n=\max\limits_{[0,L]}|v_n(t)|$，当$n\to\infty$时，$w_n\to\infty$，记

$$z_n=\frac{v_n(t)}{w_n},\quad 则\|z_n(t)\|=1,\quad 且\dot z_n=A(t)z_n+\frac{g(t,\ u_n(t))}{w_n} \tag{1.4}$$

不妨设$w_n\ge 1$，记$\max\limits_{\substack{t\in[0,T]\\|x|<d}}|g(t,\ x)|=c_0$，

$\max\limits_{[0,T]}\|A(t)\|=c_1$

由(1.4)得$|\dot z_n|\le c_1\|z_n(t)\|+c_0=c_1+c_0$

这样$\{z_n(t)\}$是一致有界且等度连续的，根据 Assoli 定理，存在$z(t)\in C[0,T]$，$z_n(t)\xrightarrow{强}z(t)$，由于$Mz_n(0)+Nz_n(T)=0$，故有$Mz(0)+Nz(T)=0$，且$\|z(t)\|=1$，在(1.4)中令$n\to\infty$得

$$\dot z(t)=A(t)z(t),\quad Mz(0)+Nz(T)=0 \tag{1.5}$$

即(1.5)有非平凡解. 事实上，在已知条件下，(1.5)显然只有平凡解$z(t)=0$，矛盾. 这就证明了$\{v_n(t)\}$是一致有界的. 又$v_n(t)$满足方程(1.3)，即有

$$\dot v_n(t)=A(t)v_n+g(t,u_n(t))$$

可见$\{\dot v_n(t)\}$关于$t\in[0,T]$一致有界，从而$\{v_n(t)\}$等度连续，根据 Ascoli 定理，$\{v_n(t)\}$存在收敛子列，即T是相对紧的.

另外，易证T是连续的，即T是全连续算子. 下面再证有当$\|u\|\to\infty$时，$\dfrac{\|Tu\|}{\|u\|}\to 0$.

若不然，存在$c>0$及$\{u_n\}$，当$n\to\infty$时，$\|u_n\|\to\infty$且$\|Tu_n\|\ge c\|u_n\|$. 记$Tu_n=v_n$，令$w_n=\max\limits_{[0,T]}|v_n|$，$z_n=\dfrac{v_n}{w_n}$，当$n\to\infty$时，$w_n\to\infty$. 则：

$$\dot z_n=A(t)z_n+\frac{g(t,\ u_n)}{w_n} \tag{1.6}$$

由于$\lim\limits_{|x|\to\infty}|g(t,\ x)|/|x|=0$，所以对$\forall\varepsilon>0$、$\exists K(\varepsilon)>0$，恒有$|g(t,\ x)|\le\dfrac{\varepsilon}{2}|x|+K(\varepsilon)$.

故有

$$\frac{|g(t,\ u_n)|}{w_n}=\frac{|g(t,\ u_n)|}{\|u_n\|}\cdot\frac{\|u_n\|}{w_n}\le\frac{1}{c}\left(\frac{\varepsilon}{2}+\frac{K(\varepsilon)}{\|u_n\|}\right)\le\frac{\varepsilon}{c}$$

（n充分大）. 同前面类似可证，不妨设有$z_n(t)\to z(t)$且$|z|\ne 0$，在(1.6)中令$n\to\infty$得

$$\dot z(t)=A(t)z(t) \tag{1.7}$$

且$Mz(0)+Nz(T)=0$，这与$|z|\ne 0$矛盾.

今取R充分大，使得当$\|u\|=R$时，$\dfrac{\|Tu\|}{\|u\|}<1$，令$B_R=\{x\in B\,|\,\|x\|\le R\}$，则$T(\partial B_R)\subset B_R$. 根据Rothe定理[3]，$T$在$B_R$中存在不动点，这个不动点即为(1.1)的解，定理得证.

特别地，当$M=E$，$N=-E$（E为单位阵），$A(t)=A$为常数阵时，由定理1知当E

$-x(T)$非奇异时，(1.1)有解，再把这个解按周期T延拓到整个实轴上去，就成为方程

$$\dot{x}=Ax+g(t,\ x) \tag{1.8}$$

的周期解。当A没有形如$\lambda=i\frac{4\pi^2k^2}{T^2}$ $(k=0,\ 1,\ \cdots)$ 的特征根时，$E-x(T)$ 非奇异，此时方程(1.8)至少存在一个T周期解，这就是文[2]中定理1。而当A稳定时，自然 $\lambda(A)\neq i\frac{4\pi^2k^2}{T^2}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$，这时(1.8)也存在T周期解（见[1]定理1.37）。

二

本节讨论边值问题

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}=f(t,\ x)+g(t,\ x)\\&Mx(0)-Nx(T)=0\end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

这里f、$g\in C^0([0,\ T]\times R^n,\ R^n)$，$M$可逆。今假设当$t\in[0,\ T]$时，$|f(t,\ 0)|\leq F$，$F>0$为常数，$p$为$n\times n$正定对称阵，其最小最大特征值分别记为 λ_m，λ_M。又设 $c>0$ 为常数，$\forall v(x)=x^Tpx$，记$G=\max\limits_{\substack{t\in[0,\ T]\\v(x)\leq c}}|g(t,\ x)|$，我们证明：

定理2 假设存在$\delta>0$，使得$M(t,\ x)=p\frac{\partial f}{\partial x}+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^Tp$对所有$(t,\ x)\in[0,\ T]\times R^n$，有如下性质

$|M(t,\ x)-\lambda E|=0$，$\mathrm{Re}\lambda_i(t,\ x)\leq-\delta<0(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$并且存在$c>0$，满足

$$\frac{2\lambda_M\|P\|(F+G)}{\delta}\leq c$$

则当$\frac{\lambda_M}{\lambda_m}\|M^{-1}N\|^2\leq 1$时，问题(2.1)有解。

证明 取$v=x^Tpx$，则当$v(x)\leq c$时有

$$\begin{aligned}\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(2.1)}&=(\dot{x})^Tpx+x^Tp\dot{x}\\&=(f(t,\ x))^Tpx+x^Tpf(t,\ x)+(g(,\ x))^Tpx+x^Tpg(t,\ x)\\&\leq\left[f^T(t,\ 0)+x^T\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x}(t,\ \theta x)d\theta\right]px\\&\quad+x^Tp\left[f(t,\ 0)+\left(\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x}(t,\ \theta x)d\theta\right)x\right]+2\|p\|G|x|\\&=[f^T(t,\ 0)px+x^Tpf(t,\ 0)]+x^T\left[\int_0^1\left(p\frac{\partial f}{\partial x}+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^Tp\right)d\theta\right]x\\&\quad+2\|p\|G|x|\\&=[x^Tpf(t,\ 0)+f^T(t,\ 0)px]+x^T\left(\int_0^1M(t,\ \theta x)d\theta\right)x+2\|p\|G|x|\\&\leq 2\|p\|F|x|-\delta|x|^2+2G\|p\||x|\\&=2(F+G)\|p\||x|-\delta|x|^2\end{aligned}$$

这里$\|p\|=\sup\limits_{|x|=1}|px|$，以下矩阵模均按此定义。

作Poincare映照T：$x_0\to x(T, x_0)$，则T连续。用$x(t, x_0)$表示方程(2.1)当$t=0$时$x=x_0$的解。令$S=M^{-1}NT$，S连续，则S的不动点就是问题(2.1)的解。

令$\Omega=\{x:v(x)\le c\}$

根据文献[1]定理1.37知，Ω是凸闭集，当$x\in\partial\Omega$时，$v(x)=c$，这时有$v(x)\le\lambda_M|x|^2$，

从而$|x|^2\geq\frac{c}{\lambda_M}$，进而有

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt}&\le 2(F+G)\|p\||x|-\delta|x|^2=\delta|x|\left[\frac{2(F+G)\|p\|}{\delta}-|x|\right]\\&\le\delta|x|\left[\frac{2(F+G)\|p\|}{\delta}-\frac{c}{\lambda_M}\right]\\&=\delta\lambda_M|x|\left[\frac{2\lambda_M(F+G)\|p\|}{\delta}-c\right]\le 0\end{aligned}$$

可见由$\partial\Omega$上出发的解均进入Ω内，即有$v(x(T))\le c$。

$$\begin{aligned}&v(M^{-1}Nx(T))=(M^{-1}Nx(T))^Tp(M^{-1}Nx(T))\\&\le\lambda_M\|M^{-1}N\|^2|x(T)|^2\le\frac{\lambda_M}{\lambda_m}\|M^{-1}N\|^2c\le c\end{aligned}$$

所以

$$M^{-1}Nx(T)\in\Omega$$

这样，$S:x_0\to M^{-1}Nx(T)$满足$S(\partial\Omega)\subset\Omega$，由Brouwer不动点定理知$S$存在不动点，即边值问题(2.1)有解。证毕。

定理3 假设方程(2.1)满足初值$x(0)=x_0$的解可延拓到$t\to+\infty$,那么定理2的条件下，如果还有$|g(t, x_1)-g(t, x_2)|\le L|x_1-x_2|$，对$\forall t\in R^+$，$x_1$，$x_2\in R^n$成立，$L>0$为常数，则当$2L\|p\|<\delta$时，边值问题(2.1)的解是稳定的。

证明 由定理2知，问题(2.1)有解，记为$\bar{x}(t)$，

又设$x(t)$是方程(2.1)的任一解，令$y(t)=x(t)-\bar{x}(t)$

则
$$\dot{y}(t)=\int_0^1\frac{\partial f(t, \bar{x}+\theta(x-\bar{x}))}{\partial x}d\theta y+g(t, x)-g(t, \bar{x}) \tag{2.2}$$

令 $v=y^Tpy$，则

$$\begin{aligned}\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(2.2)}&\le-\delta|y|^2+2L\|p\||y|^2\\&=(-\delta+2L\|p\|)|y|^2<0\end{aligned}$$

可见$\lim\limits_{t\to+\infty}|y|=0$，即方程(2.1)的解当$t\to+\infty$时均趋于$\bar{x}(t)$，稳定性得证。

参 考 文 献

[1] R. Reissig, G.Sansone and R.Conti *Nonlinear Differential Equation of Higher-Order*, Noordhoff International Publishing, Leyden(1974).

[2] 王荣良，一类三阶非线性非自治系统周期解的存在性与稳定性，科学通报，20(1986)，1531—1534.

[3] 张石生，《不动点理论及应用》，重庆出版社（1984）.

On the Existence and Stability of Solutions for Semi-Homogeneous Boundary Value Problems

Dong Qinxi

(*Department of Applied Mechanics, Beijing Institute of Technology, Beijing* 100081)

Huang Xiankai

(*Department of Mathematics, Beijing Institute of Business, Beijing* 100036)

Abstract

In this paper, we discuss the existence and stability of the solutions for two semi-homogous boundary value problems. The relative theorems in [1—2] are extended, meanwhile, we obtain some new results.

Key words boundary value problem, fixed point theory, stability.