应用数学和力学，第16卷 第11期(1995年11月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

论约束的力学性质

韦 扬 梁立孚 梁忠伟

(哈尔滨工程大学，哈尔滨150001)
(钱伟长推荐，1994年6月6日收到)

摘 要

研究约束的力学性质是一个非常重要而又实际的问题．本文在研究非定常的完整约束的力学性质的基础上，进一步研究了非完整约束的力学性质．内容复盖了 Vacco 动力学和 Chetaev动力学各类运动分方程中约束反力的性质．

关键词 约束 约束反力 完整系统 非完整系统

一、引 言

力学上约束的全面含义应包含两个方面；其一是对运动可能状态的限定，这里又分为完整约束和非完整约束两类．对这一方面，一般文献均有论述．其二是对约束反力性质的限定，对这第二方面，大多数文献中，尤其是在有关非完整约束的章节中，常常避而不谈[1]．本文的宗旨就是研究这第二方面的事情．本文研究三个部分：1.研究完整约束的约束反力及其性质，这里仅研究一般人认为较为复杂的非定常的完整约束的力学性质．2.研究应用 Chetaev 条件[2][3]的非完整约束的约束反力及其性质．内容复盖了非完整系统分析动力学的各类运动微分方程约束反力及其性质．3.研究不应用 Chetaev 条件的非完整约束的约束反力及其性质．

二、完整约束的力学性质

考虑一个动力学系统，该系统由 Lagrange 函数$L(q_s,\dot{q}_s,t)$和理想的完整约束的独立方程

$$F_\beta(q_s,\ t)=0 \tag{2.1}$$

来描述，其边界条件为

$$q_s=\bar{q}_{s0}\quad (t=t_0);\qquad q_s=\bar{q}_{s1}\quad (t=t_1) \tag{2.2}$$

这里 q_s和$\dot{q}_s\equiv\dfrac{d}{dt}q_s$分别为 Lagrange 坐标和广义速度，$t$是时间．$s=1,2,\cdots,n$；$\beta=1,2,\cdots,g$；$g<n$．Hamilton 原理的泛函为

$$\Pi=\int_{t_0}^{t_1}L(q_s,\dot{q}_s,t)\,dt \tag{2.3}$$

其约束条件为(2.1),(2.2)

将Π变分，并令$\delta\Pi=0$，则得

$$\delta\Pi=\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\delta q_s+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\delta\dot{q}_s\right)\right]dt=0 \tag{2.4}$$

其约束件条变换为

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial F_\beta}{\partial q_s}\delta q_s=0 \tag{2.5}$$

$$\delta q_s=0\qquad (t=t_0\text{或}t=t_1) \tag{2.6}$$

应用文[4]所指 Lagrange 乘子法，引入Lagrange 乘子μ_β，将约束条件(2.5)纳入泛函(2.4)中，经分部积分，并考虑到边界条件(2.6)，可得

$$\delta\Pi=\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\frac{\partial F_\beta}{\partial q_s}\right)\delta q_s\right]dt=0 \tag{2.7}$$

由于引入 Lagrange 乘子，使得δq_s相互独立，故由(2.7)式可得

$$\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{d}{\partial \dot{q}_s}+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\frac{\partial F_\beta}{\partial q_s}=0 \tag{2.8}$$

可见，方程(2.8)与其约束条件(2.1)、(2.2)一起，构成一组适定的微分方程组。

在方程(2.8)中，第三项为约束力分量，记为

$$R_s=\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\frac{\partial F_\beta}{\partial q_s} \tag{2.9}$$

将n维矢量$\boldsymbol{R}$（约束力）和n维矢量$\delta\boldsymbol{q}$（虚位移）点乘，则有

$$\boldsymbol{R}\cdot\delta\boldsymbol{q}=\sum_{s=1}^{n}R_s\delta q_s=\sum_{s=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\frac{\partial F_\beta}{\partial q_s}\delta q_s=\sum_{\beta=1}^{s}\mu_\beta\sum_{s=1}^{s}\frac{\partial F_\beta}{\partial q_s}\delta q_s \tag{2.10}$$

将(2.5)式代入(2.10)式，可得

$$\boldsymbol{R}\cdot\delta\boldsymbol{q}=\sum_{s=1}^{n}R_s\delta q_s=0 \tag{2.11}$$

(2.11)式表明，约束力$\boldsymbol{R}$和虚位移$\delta\boldsymbol{q}$是正交的。

我们知道，$F_\beta(q_s,t)=0$是随时间t变化的超曲面，$\delta\boldsymbol{q}$在超曲面的瞬时切平面内，$\boldsymbol{R}$与$\delta\boldsymbol{q}$正交，说明$\boldsymbol{R}$与超曲面的瞬时切平面正交，即$\boldsymbol{R}$指向超曲面的法线方向。(2.11)式表明，约束力在虚位移上所做虚功为零，这类约束是理想约束。

三、非完整约束的力学性质

1. 应用 Chetaev 条件

考虑一个动力学系统，该系统由 Lagrange 函数$L(q_{1s},\dot{q}_{1s},t)$和理想的非完约束的独立方程

$$f_\beta(q_{1s},\dot{q}_{1s},t)=0 \tag{3.1}$$

来描述，其边界条件为

$$q_{1s}=\bar{q}_{s0} \qquad (t=t_0), \qquad q_{1s}=\bar{q}_{s1} \qquad (t=t_1) \tag{3.2}$$

q_{1s}和$\dot{q}_{1s}\equiv\dfrac{d}{dt}q_{1s}$分别为Lagrange坐标和广义速度，$t$是时间。$s=1,2,\cdots,n$；$\beta=1,2,\cdots,g$；$g<n$。

Hamilton 原理的泛函为

$$\Pi_1=\int_{t_0}^{t_1}L(q_{1s},\ \dot{q}_{1s},\ t)\,dt \tag{3.3}$$

其约束条件为(3.1)和(3.2)式

将Π_1变分，并令$\delta\Pi_1=0$，则有

$$\delta\Pi_1=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{1s}}\delta q_{1s}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{1s}}\delta\dot{q}_{1s}\right)dt=0 \tag{3.4}$$

其约束条件变换为

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_{1s}}\delta q_{1s}=0 \qquad (\text{Chetaev 条件}) \tag{3.5}$$

$$\delta q_{1s}=0 \qquad (t=t_0\ \text{或}\ t=t_1) \tag{3.6}$$

引入 Lagrange 乘子μ_β，将约束条件(3.5)式纳入泛函(3.4)中，经分部积分，并考虑到(3.6)，则有

$$\delta\Pi_1=\int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{t_0}^{t_1}\left[\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{1s}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{1s}}+\sum_{\beta=1}^{s}\mu_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_{1s}}\right)\delta q_{1s}\right]dt=0 \tag{3.7}$$

由于引入 Lagrange 乘子，使得δq_{1s}相互独立，故由(3.7)式可得

$$\frac{\partial L}{\partial q_{1s}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{1s}}+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_{1s}}=0 \tag{3.8}$$

可见，(3.8)式与其约束条件一起，构成封闭的微分方程组，文献[5][6]称(3.8)为真实轨道方程。

在真实轨道方程(3.8)中，第三项为约束力，记为

$$R_{1s}=\sum_{\beta=1}^{q}\mu_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_{1s}} \tag{3.9}$$

将n维矢量R_1（约束力）和n维矢量$\delta\boldsymbol{q}_1$（虚位移）点乘，

$$\boldsymbol{R}_1\cdot\delta\boldsymbol{q}_1=\sum_{s=1}^{n}R_{1s}\delta q_{1s}=\sum_{s=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{s}\mu_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_{1s}}\delta q_{1s}$$

$$=\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_{1s}}\partial q_{1s} \tag{3.10}$$

由 Chetaev 条件可知

$$\boldsymbol{R}_1\cdot\delta\boldsymbol{q}_1=\sum_{s=1}^{n}R_{1s}\delta q_{1s}=0 \tag{3.11}$$

(3.11)式表明，约束力$\boldsymbol{R}_1$与虚位移$\delta\boldsymbol{q}_1$正交。

我们知道，$f_\beta(q_1,\ \dot{q}_1,\ t)=0$是随时间变化的超曲面，$\delta\boldsymbol{q}_1$在该超曲面的瞬时切平面中，$\boldsymbol{R}_1$与$\boldsymbol{q}_1$正交，说明$\boldsymbol{R}_1$与超曲面的瞬时切平面正交，即$\boldsymbol{R}_1$指向超曲面的法线方向.(3.11)式表明，约束力在虚位移上所做虚功为零，这类约束称为理想约束.

当 Jacobi 行列式$\dfrac{D(f_1,\ f_2,\cdots,f_g)}{D(\dot{q}_{1\varepsilon+1},\cdots,\dot{q}_{1n})}\neq 0$时，则由$f_\beta(q_1,\ \dot{q}_1,\ t)=0$可以推得

$$\dot{q}_{1\varepsilon+\beta}=\phi_\beta(q_{1s},\ \dot{q}_{1\sigma},\ t)\quad(\sigma=1,\ 2,\cdots,\varepsilon;\ \varepsilon=n-g)\tag{3.1$'$}$$

应用 Chetaev 条件，(3.1)$'$式变换为

$$\delta q_{1\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\phi_\beta}{\partial\dot{q}_{1\sigma}}\delta q_{1\sigma}\tag{3.12}$$

引入 Lagrange 乘子μ_β，将(3.12)纳入泛函(3.4)中，经分部积分，并考虑到(3.6)式，则有

$$\delta\Pi_1=\int_{t_0}^{t_1}\Big[\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\Big(\frac{\partial L}{\partial q_{1\sigma}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{1\sigma}}-\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\frac{\partial\phi_\beta}{\partial\dot{q}_{1\sigma}}\Big)\delta q_{1\sigma}$$

$$+\sum_{\beta=1}^{g}\Big(\frac{\partial L}{\partial q_{1\varepsilon+\beta}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_{1\varepsilon+\beta}}+\mu_\beta\Big)\delta q_{1\varepsilon+\beta}\Big]dt=0\tag{3.13}$$

由于引入 Lagrange 乘子，使得$\delta q_{1\sigma}$，$\delta q_{1\varepsilon+\beta}$相互独立，故由(2.13)式可得

$$\frac{\partial L}{\partial q_{1\sigma}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_{1\sigma}}-\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\frac{\partial\phi_\beta}{\partial\dot{q}_{1\sigma}}=0\tag{3.14}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_{1\varepsilon+\beta}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{1\varepsilon+\beta}}+\mu_\beta=0\tag{3.15}$$

在(3.14)和(3.15)中，约束力分别表示为

$$R_{1\sigma}=-\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\frac{\partial\phi_\beta}{\partial\dot{q}_{1\sigma}}\tag{3.16}$$

$$R_{1\varepsilon+\beta}=\mu_\beta\tag{3.17}$$

将n维矢量$\boldsymbol{R}_1$（约束力）和n维矢量$\delta\boldsymbol{q}_1$（虚位移）点乘，

$$\boldsymbol{R}\cdot\delta\boldsymbol{q}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}R_{1\sigma}\delta q_{1\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}R_{1\varepsilon+\beta}\delta q_{1\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\Big(-\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\frac{\partial\phi_\beta}{\partial\dot{q}_{1\sigma}}\Big)\delta q_{1\sigma}$$

$$+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\delta q_{1\varepsilon+\beta}=\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\Big(\delta q_{1\varepsilon+\beta}-\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\phi_\beta}{\delta\dot{q}_{1\sigma}}\delta q_{1\sigma}\Big)\tag{3.18}$$

考虑到 Chetaev 条件(3.12)，则上式变换为

$$\boldsymbol{R}\cdot\delta\boldsymbol{q}_1=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}R_{1\sigma}\delta q_{1\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}R_{1\varepsilon+\beta}\delta q_{1\varepsilon+g}=0\tag{3.19}$$

(3.19)式说明，约束力$\boldsymbol{R}_1$与虚位移$\delta\boldsymbol{q}_1$正交，类似于前面的分析，同样可知，约束力在虚位移上所做虚功为零，这类约束称为理想约束.

由(3.4)和(3.5)式推出 Maggi 方程，进而可推出 Чаплыгин 方程，Mas-Millan方

程和 Appell 方程，在(3.14)和(3.15)中引入 Nelsen 乘子，还可推出广义 Nelsen 方程。而方程(3.8)实为 Routh 方程，可见，以上对非完整约束力学性质的分析，不失一般性。

2. 不应用 Chetaev 条件

考虑一个动力学系统，该系统由 Lagrange 函数 $L(q_2,\ \dot{q}_2,\ t)$ 和非完整约束的独立方程

$$f_\beta(q_{2s},\ \dot{q}_{2s},\ t)=0 \tag{3.20}$$

来描述。其边界条件为

$$q_{2s}=\bar{q}_{s0}\ \ (t=t_0);\ \ q_{2s}=\bar{q}_{s1}\ \ (t=t_1) \tag{3.21}$$

q_{2s} 和 $\dot{q}_{2s}\equiv\frac{d}{dt}q_{2s}$ 分别为 Lagrange 坐标和广义速度，t 是时间。$s=1,2,\cdots,g$；$g<n$。Hamilton 原理的泛函为

$$\Pi_2=\int_{t_0}^{t_1}L(q_{2s},\ \dot{q}_{2s},\ t)dt \tag{3.22}$$

其约束条件为(3.20)和(3.21)。

将 Π_2 变分，令 $\delta\Pi_2=0$，则有

$$\delta\Pi_2=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{2s}}\delta q_{2s}+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{2s}}\delta\dot{q}_{2s}\right)dt=0 \tag{3.23}$$

其约束条件变换为

$$\delta f_\beta=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_{2s}}\delta q_{2s}+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{2s}}\delta\dot{q}_{2s}\right)=0 \tag{3.24}$$

$$\delta q_{2s}=0\qquad\qquad (t=t_0\text{或}t=t_1) \tag{3.25}$$

引入 Lagrange 乘子，将约束条件(3.24)纳入泛函 (3.23) 中[4]，经分部积分，并考虑到(3.25)式则有

$$\delta\Pi_2=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_{2s}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{2s}}+\sum_{\beta=1}^{s}\mu_\beta\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_{2s}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_{2s}}\right)\right.$$
$$\left.-\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\mu}_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_{2s}}\right]\delta q_{2s}dt=0 \tag{3.26}$$

由于引入 Lagrange 乘子，使得 δq_{2s} 相互独立，故由(3.26)可得

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{2s}}-\frac{\partial L}{\partial q_{2s}}-\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_{2s}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_{2s}}\right)+\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\mu}_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_{2s}}=0 \tag{3.27}$$

可见(3.27)式与其约束条件一起，构成封闭的微分方程组。文献 [5]、[6] 称为测地轨道方程。

在测地轨道方程(3.27)中，表示约束力的诸项可以记为

$$R_{2s}=-\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_{2s}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_{2s}}\right)+\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\mu}_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_{2s}} \tag{3.28}$$

n 维矢量 $\boldsymbol{R}_2$（约束力）和 n 维矢量 $\delta\boldsymbol{q}_2$（虚位移）点乘，可得

$$\boldsymbol{R}\cdot\delta\boldsymbol{q}_2=\sum_{s=1}^{n}R_{2s}\,\delta q_{2s}=\sum_{s=1}^{n}\Big[-\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\Big(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_{2s}}-\frac{d}{dt}\,\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_{2s}}\Big)+\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\mu}_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_{2s}}\Big]\delta q_{2s}\tag{3.29}$$

由(3.24)式可知

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial q_{2s}}\,\delta q_{2s}=-\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_{2s}}\,\partial\dot{q}_{2s}\tag{3.30}$$

将(3.30)代入(3.29)，则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_2\cdot\delta\boldsymbol{q}_2&=\sum_{\beta=1}^{g}\sum_{s=1}^{n}\Big[\mu_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_{2s}}\,\delta\dot{q}_{2s}+\mu_\beta\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_{2s}}\Big)\delta q_{2s}+\dot{\mu}_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_{2s}}\delta q_{2s}\Big]\\&=\sum_{\beta=1}^{\varepsilon}\sum_{s=1}^{n}\frac{d}{dt}\Big(\mu_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_{2s}}\delta q_{2s}\Big)\\&=\sum_{\beta=1}^{g}\frac{d}{dt}\sum_{s=1}^{n}\Big(\mu_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_{2s}}\delta q_{2s}\Big)=\sum_{\beta=1}^{g}\frac{d}{dt}\mu_\beta\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_{2s}}\delta q_{2s}\end{aligned}\tag{3.31}$$

$$\boldsymbol{R}\cdot\delta\boldsymbol{q}_2\neq 0\tag{3.32}$$

由(3.32)可见，一般说来$\boldsymbol{R}$即约束力$\boldsymbol{R}_2$与虚位移$\delta\boldsymbol{q}_2$不正交。

我们知道，$f_\beta(q_2,\dot{q}_2,t)=0$是随时间变化的超曲面，虚位移$\boldsymbol{q}_2$在该超曲面的瞬时切平面中，$\boldsymbol{R}_2$与$\delta\boldsymbol{q}_2$不正交，说明$\boldsymbol{R}_2$与瞬时切平面不正交，即$\boldsymbol{R}_2$不指向超曲面的法线方向。(3.32)式表明，一般说来

$$\boldsymbol{R}_2\cdot\delta\boldsymbol{q}_2=\sum_{s=1}^{n}R_{2s}\delta q_{2s}\neq 0\tag{3.33}$$

即约束力在虚位移上所做虚功不为零，这类约束称为非理想约束。

为了使这类非理想约束理想化，可使

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_{2s}}\delta q_{2s}=0\tag{3.34}$$

(3.34)式不是别的，正是 Chetaev 条件。

对于如前所述的非完整系统，当 Jacobi 行列式$\dfrac{D(f_1,f_2,\cdots,f_g)}{D(\dot{q}_{2\varepsilon+1},\dot{q}_{2\varepsilon+2},\cdots,\dot{q}_{2n})}\neq 0$时，由(2.1)式可以解得

$$\dot{q}_{2\varepsilon+\beta}=\phi_\beta(q_{2s},\ \dot{q}_{2\sigma},\ t)\qquad(\sigma=1,2,\cdots,\varepsilon;\ \varepsilon=n-g)\tag{3.35}$$

将(3.35)变分，可得

$$\delta\dot{q}_{2\varepsilon+\beta}=\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_{2s}}\,\delta q_{2s}+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\dot{q}_{2\sigma}}\delta\dot{q}_{2\sigma}\tag{3.36}$$

引入 Lagrange 乘子μ_β，将(3.36)纳入泛函(3.23)中，经分部积分，并考虑到(3.25)式，

则有

$$\delta\Pi_2=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left[\frac{\partial L}{\partial q_{2\sigma}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{2\sigma}}+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\left(\frac{\partial\phi_\beta}{\partial q_{2\sigma}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\phi_\beta}{\partial\dot{q}_{2\sigma}}\right)\right.\right.$$

$$\left.-\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\mu}_\beta\frac{\partial\phi_\beta}{\partial\dot{q}_{2\sigma}}\right]\delta q_{2\sigma}+\sum_{\beta=1}^{g}\left(\frac{\partial L}{\partial q_{2\varepsilon+\beta}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{2\varepsilon+\beta}}\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial\varepsilon_{2\varepsilon+\beta}}+\dot{\mu}_\beta\right)\delta q_{2\varepsilon+\beta}\right\}dt=0 \tag{3.37}$$

由于引入 Lagrange 乘子，使得$\delta q_{2\sigma}$，$\delta q_{2\varepsilon+\beta}$相互独立，故由(3.37)式可得

$$\frac{\partial L}{\partial q_{2\sigma}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{2\sigma}}+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\left(\frac{\partial\phi_\beta}{\partial q_{2\sigma}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\phi_\beta}{\partial\dot{q}_{2\sigma}}\right)-\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\mu}_\beta\frac{\partial\phi_\beta}{\partial\dot{q}_{2\sigma}}=0 \tag{3.38}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_{2\varepsilon+\varepsilon}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_{2\varepsilon+\beta}}+\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_{2\varepsilon+\beta}}+\dot{\mu}_\beta=0 \tag{3.39}$$

在(3.38)和(3.39)中，约束力分别表示为

$$R_{2\sigma}=\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\left(\frac{\partial\phi_\beta}{\partial q_{2\sigma}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\phi_\beta}{\partial\dot{q}_{2\sigma}}\right)-\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\mu}_\beta\frac{\partial\phi_\beta}{\partial\dot{q}_{2\sigma}} \tag{3.40}$$

$$R_{2\varepsilon+\beta}=\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_{2\varepsilon+\beta}}+\dot{\mu}_\beta \tag{3.41}$$

将n维矢量$\boldsymbol{R}_2$（约束力）和n维矢量$\delta\boldsymbol{q}_2$（虚位移）点乘，

$$\boldsymbol{R}_2\cdot\delta\boldsymbol{q}_2=\sum_{\beta=1}^{g}R_{2\varepsilon+\beta}\delta q_{2\varepsilon+\beta}+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}R_{2\sigma}\delta q_{2\sigma}$$

$$=\sum_{\beta=1}^{g}\left(\sum_{\beta=1}^{q}\mu_\beta\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial q_{2\varepsilon+\beta}}+\dot{\mu}_\beta\right)\delta q_{2\varepsilon+\beta}$$

$$+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\left[\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\left(\frac{\partial\phi_\beta}{\partial q_{2\sigma}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\phi_\beta}{\partial\dot{q}_{2\sigma}}\right)-\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\mu}_\beta\frac{\partial\phi_\beta}{\partial\dot{q}_{2\sigma}}\right]\delta q_{2\sigma} \tag{3.42}$$

由(3.36)式可知

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\phi_\beta}{\partial q_{2s}}\delta q_{2s}=\delta\dot{q}_{2\varepsilon+\beta}-\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\phi_\beta}{\partial\dot{q}_{2\sigma}}\delta\dot{q}_{2\sigma} \tag{3.43}$$

将(3.43)代入(3.42)，可得

$$\boldsymbol{R}_2\cdot\delta\boldsymbol{q}_2=\sum_{\beta=1}^{g}\left[\dot{\mu}_\beta\delta q_{2\varepsilon+\beta}+\mu_\beta\delta\dot{q}_{2\varepsilon+\beta}-\mu_\beta\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\phi_\beta}{\partial\dot{q}_{2\sigma}}\delta\dot{q}_{2\sigma}\right.$$

$$\left.-\mu_\beta\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{d}{dt}\frac{\partial\phi_\beta}{\partial\dot{q}_{2\sigma}}\delta q_{2\sigma}-\dot{\mu}_\beta\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\phi_\beta}{\partial\dot{q}_{2\sigma}}\delta q_{2\sigma}\right]$$

$$=\sum_{\beta=1}^{g}\frac{d}{dt}\mu_\beta\left(\delta q_{2\varepsilon+\beta}-\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\phi_\beta}{\partial\dot{q}_{2\sigma}}\delta q_{2\sigma}\right) \tag{3.44}$$

由(3.44)可见，一般说来，

$$\boldsymbol{R}_2\cdot\delta\boldsymbol{q}_2=\sum_{\beta=1}^{g}R_{2\varepsilon+\beta}\delta q_{2\varepsilon+\beta}+\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}R_{2\sigma}\delta q_{2\sigma}\neq 0 \tag{3.45}$$

即约束力$\boldsymbol{R}$在虚位移$\delta\boldsymbol{q}_2$上所做虚功不为零，这类约束称为非理想约束.

为了使这类非理想约束理想化，可使

$$\delta q_{2\varepsilon+\beta}=\sum_{\sigma=1}^{\varepsilon}\frac{\partial\phi_\beta}{\partial\dot{q}_{2\sigma}}\partial q_{2\sigma} \tag{3.46}$$

可见(3.46)式不是别的，正是 Chetaev 条件.

通过如上的分析，使得我们能够更加全面深刻的交待约束，这对解决非完整系统分析动力学中的许多有待进一步澄清和发展的问题是有利的.

参 考 文 献

[1] L. F. Liang, Variational problem of genenal displacements in nonholonomic systems, *Acta Mechanica Solida Sinica*, 6(4)(1993).

[2] Н. Г. Четаев, О ирпциие Гаусса, *Изв. Физ-Матем. об-ва при Казон. Гос.* yn-me в 1932—1933г.

[3] Н. Г. Четаев, Одно видоизменение принципа Гаусса, *Прикладная Математика и Механика*, 5(1941).

[4] L. F. Liang, On a problem of analytial dynamics of non-holonomic systems, *Applied Mechanics*, Edited by Z. M. Zheng, Pergamon Press 1(1989).

[5] В. В., Гумянчев О принчипе гашильгона для неголоноц ных систем, *Прикладная Матеиатика и Механика*, 42, (1978)

[6] В. В. Гумянцев, Об интегральних принципах для нелолономнш систем, *Прикладная Математика и Механика*, 46, (1982).

On Mechanical Property of Constraint

Wei Yang Liang Lifu Liang Zhongwei

(*Harbin Engineering University, Harbin* 1510001)

Abstract

In this paper, the mechanical properties of holonomic systems and non-holonomic systems are studied. This is an important and urgent problem.

Key words constraint, constraint force, holonomic system, non-holonomic system.