应用数学和力学，第16卷 第10期（1995年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

一类四阶边值问题的多解结果

马如云　　马勤生

（西北师范大学数学系，兰州　730070）

（林宗池推荐，1994年10月5日收到）

摘　要

本文研究一类弹性梁方程边值问题

$$y^{(\mathrm{IV})}-\alpha_1 y+\beta_1 y''+g(x,y,y'')=e,\qquad 0<x<1$$

$$y(0)=y''(0)=y'(1)=y'''(1)=0$$

的可解性及多解的存在性。其中 $e\in L^2(0,1)$，而 $g:[0,1]\times \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ 为连续有界函数，特征对 (α_1,β_1)满足

$$\alpha_1+(0+0.5)^2\pi^2\beta_1=(0+0.5)^4\pi^4$$

及

$$\alpha_1+(k+0.5)^2\pi^2\beta_1\neq(k+0.5)^4\pi^4,\qquad \forall k\in \boldsymbol{N}$$

关键词　弹性梁方程　双参数特征值问题　多解结果

一、引　言

一端简单支撑另一端滑动支撑的弹性梁的弯曲可由如下四阶边值问题来描写．

$$y^{(\mathrm{IV})}+f(x)y=e(x),\qquad 0<x<1 \tag{1.1}$$

$$y(0)=y''(0)=y'(1)=y'''(1)=0 \tag{1.2}$$

在[3,4]中，Gupta讨论如下边值问题

$$y^{(\mathrm{IV})}-f(x,y,y',y'',y''')=e(x),\qquad 0<x<1 \tag{1.3}$$

$$y(0)=y''(0)=y'(1)=y'''(1)=0 \tag{1.4}$$

他在假设f满足与线性特征值问题

$$y^{(\mathrm{IV})}-ay=0 \tag{1.5}$$

$$y(0)=y''(0)=y'(1)=y'''(1)=0 \tag{1.6}$$

及

$$y^{(\mathrm{IV})}+\beta y''=0 \tag{1.7}$$

$$y(0)=y''(0)=y'(1)=y'''(1)=0 \tag{1.8}$$

有关的条件下，获得几个存在性定理．

本文考察非线性边值问题

$$y^{(\mathrm{IV})}-\alpha_1 y+\beta_1 y''+g(x,y,y'')=e,\qquad 0<x<1 \tag{1.9}$$

$$y(0)=y''(0)=y'(1)=y'''(1)=0 \tag{1.10}$$

其中，$e\in L^2(0,1)$，$g:[0,1]\times\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$是一个连续有界函数，$(\alpha_1,\beta_1)$满足

$$\alpha_1+(0+0.5)^2\pi^2\beta_1=(0+0.5)^4\pi^4 \tag{1.11}$$

和

$$\alpha_1+(k+0.5)^2\pi^2\beta_1\neq(k+0.5)^4\pi^4, \qquad \forall k\in\boldsymbol{N} \tag{1.12}$$

我们给出(1.9)～(1.10)的解的不存在性、存在性及多解存在性结果，本文的主要方法是Lyapunov-Schmidt过程及参数化紧向量场的解集连通理论。

在第二节中我们讨论两参数特征值问题

$$y^{(\mathrm{IV})}-\alpha y+\beta y''=0, \qquad 0<x<1 \tag{1.13}$$

$$y(0)=y''(0)=y'(1)=y'''(1)=0 \tag{1.14}$$

该问题是(1.5)～(1.6)及(1.7)～(1.8)的推广。在第三节中我们将陈述主要结果，而在第四节中我们将给出证明。

二、两参数特征值问题

首先，我们讨论(1.13)～(1.14)的可解性。若数对(α,β)使得(1.13)～(1.14)有非平凡解，则称(α,β)为特征值对；相应地，非平凡解称为特征函数。

命题2.1 (α,β)为(1.13)～(1.14)的特征值对的充要条件是存在$k\in\boldsymbol{N}\cup\{0\}$，使

$$\alpha+(k+0.5)^2\pi^2\beta^2=(k+0.5)^4\pi^4 \tag{2.1}$$

证明 定义线性算子$F:D(F)\to L^2(0,1)$如下：

取

$$D(F)=\{u\in L^2(0,1)\mid u,u'\in AC[0,1],\ u''\in L^2(0,1),\ u(0)=u'(1)=0\} \tag{2.2}$$

对$\forall u\in D(F)$，令

$$F(u)=u'' \tag{2.3}$$

(这里$AC[0,1]$表$[0,1]$上的绝对连续函数空间)则存在$r_1,r_2\in\boldsymbol{C}$，使

$$y^{(\mathrm{IV})}+\beta y''-\alpha y=(F+r_1)(F+r_2)y$$

易见如果(1.13)～(1.4)有非平凡解，则要么$r_1=(k+0.5)\pi$要么$r_2=(k+0.5)\pi, k\in\boldsymbol{N}\cup\{0\}$。不管哪种情形，$\sin(k+0.5)\pi x$总是(1.13)～(1.14)的一个非平凡解。将该解代入(1.13)式，即得(2.1)。反之，如果(2.1)成立，则显然$\sin(k+0.5)\pi x$是(1.13)～(1.14)的一个非平凡解。 □

其次，对于$j\in\boldsymbol{N}\cup\{0\}$，令

$$L_j=\{(\alpha,\beta)\mid \alpha+(j+0.5)^2\pi^2\beta=(j+0.5)^4\pi^4\} \tag{2.4}$$

据命题2.1，我们称L_j为(1.13)～(1.14)的特征线。注意：一个特征值对(α,β)至多属于两条特征线。如果(α,β)仅属于一条特征线L_j，则相应的特征函数为$\sin(j+0.5)\pi x$。如果(α,β)属于$L_j\cap L_k$，则相应的特征子空间由$\sin(k+0.5)\pi x$及$\sin(j+0.5)\pi x$张成。

假设数对$(\alpha_1,\beta_1)\in L_0\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}L_n$。定义线性算子$L:D(L)\subset L^2(0,1)\to L^2(0,1)$如下：取

$$D(L)=\left\{u\in L^2(0,1)\,\middle|\,\begin{array}{l}u',u'',u'''\in AC[0,1],u^{(\mathrm{IV})}\in L^2(0,1)\\ u(0)=u''(0)=u'(1)=u'''(1)=0\end{array}\right\} \tag{2.5}$$

对$\forall y\in D(L)$，令

$$Ly=y^{(\mathrm{IV})}-\alpha_1y+\beta_1y'' \tag{2.6}$$

则$H=L^2(0,1)$可以直和分解为$H=V\oplus V^{\perp}$，其中$V=\ker(L)=\mathrm{span}\{\sin(\pi x/2)\}$而$V^{\perp}=$

Range(L)。记

$$\phi(x)=\sqrt{2}\sin\frac{\pi x}{2}, \qquad 0<x<1 \tag{2.7}$$

则$\|\phi\|_H=1$且对给定的$y\in D(L)$及$e\in H$，我们有$y=s\phi+w$及$e=t\phi+h$。以P和Q分别记到V及$V^{\perp}$上的直交投影。

现在，由Fredholm抉择可知：边值问题

$$y^{(IV)}-\alpha_1 y+\beta_1 y''=b(x), \qquad 0<x<1 \tag{2.8}$$

$$y(0)=y''(0)=y'(1)=y'''(1)=0 \tag{2.9}$$

对每个$b\in V^{\perp}$有唯一解$\hat{y}\in V^{\perp}$。进一步，该解可Fourier展开成

$$\hat{y}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k\sin(k+0.5)\pi x}{(k+0.5)^4\pi^4-\alpha_1-(k+0.5)^2\pi^2\beta_1} \tag{2.10}$$

其中

$$b(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin(k+0.5)\pi x \tag{2.11}$$

我们还可得到

$$\hat{y}''(x)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k(k+0.5)^2\pi^2\sin(k+0.5)\pi x}{(k+0.5)^4\pi^4-\alpha_1-(k+0.5)^2\pi^2\beta_1} \tag{2.12}$$

从(2.11)及(2.12)不能看出算子$A,B:V^{\perp}\to V^{\perp}$

$$A(b)=\hat{y},\ B(b)=\hat{y}'' \tag{2.13}$$

均为紧线性算子。这里$\hat{y}\in V^{\perp}$即为(2.8)～(2.9)相应于$b\in V^{\perp}$的唯一解。A和B的范数分别为

$$\|A\|=\max_{k\in N}\frac{1}{|(k+0.5)^4\pi^4-\alpha_1-(k+0.5)^2\pi^2\beta_1|} \tag{2.14}$$

$$\|B\|=\max_{k\in N}\frac{(k+0.5)^2\pi^2}{|(k+0.5)^4\pi^4-\alpha_1-(k+0.5)^2\pi^2\beta_1|} \tag{2.15}$$

三、主 要 结 果

设$e\in L^2(0,1)$，$g:[0,1]\times\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$连续。

定理3.1 假设

(H1) g是一个有界函数，即存在常数$M>0$，使

$$|g(x,y,z)|\leqslant M, \qquad \forall x\in[0,1],\ y,z\in\boldsymbol{R} \tag{3.1}$$

(H2) 存在一个常数$y_1>0$使

$$g(x,y_1,z)<0 \qquad \forall x\in[0,1],\ z<0 \tag{3.2}$$

(H3) $g(x,y,z)\leqslant 0 \qquad \forall x\in[0,1],\ y>0,\ z<0,$

$g(x,y,z)\geqslant 0 \qquad \forall x\in[0,1],\ y<0,\ z>0.$

(H4) $\lim\limits_{y^2+z^2\to\infty} g(x,y,z)=0$

对$x\in[0,1]$一致成立

(H5) 存在正常数a和b使

$$a\max_{k\in\boldsymbol{N}}\frac{1}{|(k+0.5)^4\pi^4-\alpha_1-(k+0.5)^2\pi^2\beta_1|}+b\max_{k\in\boldsymbol{N}}\frac{(k+0.5)^2\pi^2}{|(k+0.5)^4\pi^4-\alpha_1-(k+0.5)^2\pi^2\beta_1|}<1 \tag{3.3}$$

并且

$$|g(x,\bar{y},\bar{z})-g(x,y,z)|\leqslant a|\bar{y}-y|+b|\bar{z}-z| \tag{3.4}$$

对$\forall x\in[0,1]$，$\bar{y}$，y，$\bar{z}$，$z\in\boldsymbol{R}$成立。

则存在$-\infty<\tau_1<0$及$0\leqslant\tau_2<+\infty$，使(1.9)～(1.10)有解的充要条件为$t\in[\tau_1,\tau_2]$。

进一步，若$t\in(\tau_1,0)\cup(0,\tau_2)$，则(1.9)～(1.10)至少有两个不同的解。

例　取$(\alpha_1,\beta_1)=(\pi^4/2^4,0)$，则

$$\|A\|=\frac{1}{5\pi^4},\quad \|B\|=\frac{9}{20\pi^2}$$

取g_0为

$$g_0(x,y,z)=\frac{z}{1+y^2+z^2} \tag{3.5}$$

则对$y,z,\bar{y},\bar{z}\in\boldsymbol{R}$，我们有

$$|g_0(x,\bar{y},\bar{z})-g_0(x,y,z)|\leqslant|\bar{y}-y|+3|\bar{z}-z|$$

从而可知g_0满足(H5)．显见g_0满足(H1)～(H4)．故这里已经给出一个可应用定理3.1的实例．

四、定理的证明

在给出定理3.1的证明之前我们先给出几个预备结果．如下引理请参见Costa和Goncalves[1,定理0]，它在本文中起着相当重要的作用．

引理4.1　设C是Banach空间X的一个非空有界闭凸集．$K:[\alpha,\beta]\times C\to C$，$(\alpha<\beta)$是一个紧连续映象．则集合

$$S_{\alpha,\beta}=\{(s,x)\in[\alpha,\beta]\times C\,|\,K(s,x)=x\} \tag{4.1}$$

包含一支连结$\{\alpha\}\times C$与$\{\beta\}\times C$的连通分支$C_{\alpha,\beta}$．　□

定义一个非线性映象$G:D(L)\subset H\to H$

$$(Gy)(x)=g(x,y(x),y''(x)),\qquad x\in[0,1] \tag{4.2}$$

则G一致有界且连续[4,3]．因此，(1.9)～(1.10)能够写成H中的如下方程：

$$Ly+G(y)=t\phi+h,\qquad y\in D(L) \tag{4.3}$$

现在求解(4.3)只需求解系统

$$w+AQG(s\phi+w)=Ah \tag{4.4}$$

$$PG(s\phi+w)=t\phi\qquad (s\in\boldsymbol{R},\ w\in D(L)\cap V^{\perp}) \tag{4.5}$$

就够了．记$S\subset\boldsymbol{R}\times V^{\perp}$为(4.4)的解集，即

$$S=\{(s,w)\in\boldsymbol{R}\times V^{\perp}\,|\,w\in D(L),\ w=A[h-QG(s\phi+w)]\} \tag{4.6}$$

显然$S=\bigcup_{s\in\boldsymbol{R}}(\{s\}\times F_s)$，这里$F_s$为映象$K_s=K_{\{s,h\}}:V^{\perp}\to V^{\perp}$，$K_s(w)=A[h-QG(s\phi+w)]$，的不动点集．由$A$的紧性及$G$的一致有界性可知：$K_s$也为紧映象且将$V^{\perp}$映入球$\bar{B}=\bar{B}_\rho(0)=\{w\in V^{\perp}\,|\,\|w\|_H\leqslant\rho\}$．其中

$$\rho=\|A\|(\|h\|+\sqrt{\pi}\sup|g(u)|) \tag{4.7}$$

故由Schauder不动点定理知，对$\forall s\in\boldsymbol{R}$，$F_s$非空，从而$\mathrm{Proj}_{\boldsymbol{R}}S=\boldsymbol{R}$．事实上$S\subset\boldsymbol{R}\times\bar{B}_\rho$．

现在(4.4)～(4.5)等价于在S中求解$\Phi(s,w)=t$。其中映象$\Phi:\boldsymbol{R}\times(D(L)\cap V^{\perp})\to\boldsymbol{R}$定义为

$$\Phi(s,w)=\int_0^1 g\left(x,s\phi+w,-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\phi+w''\right)\phi dx \tag{4.8}$$

显然Φ连续且有界。于是得到

引理4.2 问题(1.9)～(1.10)等价于在S中求解$\Phi(s,w)=t$。 □

引理4.3 假设(H1)和(H5)成立，则对每一个$s\in\boldsymbol{R}$，K_s仅有一个不动点。

证明 从A和B的定义可知，(4.4)等价于系统

$$w=AQ\left[h-g\left(x,s\phi+w,-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\phi+w''\right)\right] \tag{4.9}$$

$$w''=BQ\left[h-g\left(x,s\phi+w,-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\phi+w''\right)\right] \tag{4.10}$$

仅设K_s在$V^{\perp}$中有两个不同的不动点$w_1\neq w_2$，则

$$w_1-w_2=AQ\left[-g\left(x,s\phi+w_1,-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\phi+w_1''\right)+g\left(x,s\phi+w_2,-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\phi+w_2''\right)\right] \tag{4.11}$$

$$w_1''-w_2''=BQ\left[-g\left(x,s\phi+w_1,-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\phi+w_1''\right)+g\left(x,s\phi+w_2,-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\phi+w_2''\right)\right] \tag{4.12}$$

由(3.4)我们得到

$$\|w_1-w_2\|\leqslant\|A\|\{a\|w_1-w_2\|+b\|w_1''-w_2''\|\} \tag{4.13}$$

$$\|w_1''-w_2''\|\leqslant\|B\|\{a\|w_1-w_2\|+b\|w_1''-w_2''\|\} \tag{4.14}$$

结合(4.13)，(4.14)及(3.3)，推得$\|w_1-w_2\|=\|w_1''-w_2''\|=0$。矛盾！

由引理4.3及引理4.1立即推得如下

推论4.4 假设(H1)和(H5)成立。则S是一个连通集。 □

现在定义W为S在$V^{\perp}$上的投影，即

$$W=\{w\mid(s,w)\in S\text{对某}s\in\boldsymbol{R}\}$$

引理4.5 假设(H1)成立，则W是$C^3[0,1]$中的一个有界集。

证明 对每一个$w\in W$，由W的定义可知存在$(s,w)\in S$，使

$$w^{(4)}-\alpha_1 w+\beta_1 w''=h-g\left(x,s\phi+w,-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\phi+w''\right) \tag{4.15}$$

(4.15)等价于系统

$$w=AQ\left[h-g\left(x,s\phi+w,-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\phi+w''\right)\right] \tag{4.16}$$

$$w''=BQ\left[h-g\left(x,s\phi+w,-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\phi+w''\right)\right] \tag{4.17}$$

结合条件(3.1)及A和B的紧性推知：存在C_1，C_2使

$$\|w\|_H\leqslant C_1 \qquad \forall w\in W \tag{4.18}$$

$$\|w''\|_H\leqslant C_2 \qquad \forall w\in W \tag{4.19}$$

由(4.18)、(4.19)、(3.1)及(4.15)知：存在常数$C_3>0$，使

$$\|w^{(4)}\|_H\leqslant C_3 \qquad \forall w\in W \tag{4.20}$$

因$w\in D(L)\cap V^{\perp}$，故

$$w(0)=w''(0)=w'(1)=w'''(1)=0$$

进而

$$w'''(x)=w'''(x)-w'''(1)=\int_0^x w^{(N)}(s)ds, \qquad 0<x<1$$

利用(4.20)推得

$$\|w'''\|_{C[0,1]}\leqslant C_3 \tag{4.21}$$

从(4.21)及

$$w''(x)=w''(x)-w''(0)=\int_0^x w'''(s)ds$$

得 $\|w''\|_{C[0,1]}\leqslant C_3$

同理

$$\|w'\|_{C[0,1]}\leqslant C_2,\ \|w\|_{C[0,1]}\leqslant C_2$$

于是

$$\|w\|_{C^3[0,1]}\leqslant 2(C_3+C_2)$$ □

推论4.6 存在$\beta>0$使对$\forall s\geqslant\beta$，$w\in W$，$x\in[0,1]$，有

$$\left.\begin{aligned}&s\phi+w(x)\geqslant 0,\ -s\phi+w(x)\leqslant 0\\&s\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\phi+w(x)\geqslant 0,\quad -s\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\phi+w(x)\leqslant 0\end{aligned}\right\} \tag{4.22}$$

证明 对$\forall w\in W$，定义$\hat{w}:[0,2]\to\mathbf{R}$

$$\hat{w}(x)=\begin{cases}w(x) & x\in[0,1]\\ w(2-x) & x\in(1,2]\end{cases} \tag{4.23}$$

则$\hat{w}\in C_0^1[0,2]$，现在利用[6]中的著名估计式(16)，得

$$|\hat{w}(x)|\leqslant\max|\hat{w}'(x)|\sin\frac{\pi x}{2}\leqslant\frac{C_2}{\sqrt{2}}\phi, \qquad \forall x\in[0,2] \tag{4.24}$$

同理

$$|w''(x)|\leqslant\frac{C_3}{\sqrt{2}}\phi \tag{4.25}$$

推论4.7 假设(H1)，(H2)，及(H3)成立．则存在$\beta_1>0$使$\Phi(s,w)<0$，$\Phi(-s,w)\geqslant 0$对$\forall s\geqslant\beta_1$及$w\in W$成立．

证明 设$\beta>0$即为推论4.6中的β．选取β_0使$\beta_0\max\phi-C>y_1$，其中

$$C=\sup_{w\in W}\|w\|_{C[0,1]}$$

令$\beta_1=\beta+\beta_0$，我们有

$$s\phi+w(x)\geqslant\beta_0\phi(x)\geqslant 0$$

$$-s\phi+w(x)\leqslant-\beta_0\phi(x)\leqslant 0$$

$$s\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\phi+w''(x)\geqslant\beta_0\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\phi(x)\geqslant 0$$

$$-s\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\phi+w''(x)\leqslant-\beta_0\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\phi(x)\leqslant 0$$

对$\forall s\geqslant\beta_1$，$w\in W$及$x\in[0,1]$成立．因此由(H3)，

$$\Phi(s,w)=\int_0^1 g\left(x,s\phi+w,\ -s\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\phi+w''\right)\phi dx\leqslant 0 \tag{4.26}$$

$$\Phi(-s,w)=\int_0^1 g\left(x,-s\phi+w,\ s\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\phi+w''\right)\phi dx\geqslant 0 \tag{4.27}$$

对$\forall s\geqslant\beta_1$，$w\in W$成立。

下证(4.24)中的严格不等式成立。由于对$\forall s\geqslant\beta_1$及$w\in W$，函数$s\phi(x)+w(x)$在 $x=0$的值为0，又

$$s\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{2}+w(1)\geqslant\beta_0\max\phi-C>y_1$$

故存在$x_+\in(0,1)$使$s\phi(x_+)+w(x_+)=y_1$。于是

$$g\left(x_+,\ s\phi(x_+)+w(x_+),\ -s\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\phi(x_+)+w''(x_+)\right)$$

$$=g\left(x_+,y_1,-s\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\phi(x_+)+w''(x_+)\right)<0 \qquad \square$$

定理3.1的证明 据引理4.2，(1.9)～(1.10)等价于在S中求解

$$\Phi(s,w)=t$$

故(1.9)～(1.10)至少有一个解当且仅当$t\in\Phi(S)$。

令$\tau_1=\inf\Phi(S)$，$\tau_2=\sup\Phi(S)$。因g有界，故$\Phi(S)$有界。这表明

$$-\infty<\tau_1\leqslant\tau_2<+\infty$$

由引理4.4知，$\Phi(S)$为连通集。

其次，推论3.7指出：存在$\beta_1>0$，使

$$\Phi(s,w)<0\qquad\forall(s,w)\in S,\ s\geqslant\beta_1 \tag{4.28}$$

且

$$\Phi(s,w)\geqslant 0\qquad\forall(s,w)\in S,\ s\leqslant-\beta_1 \tag{4.29}$$

由此推知：$0\in\Phi(S)$，$-\infty<\tau_1<0\leqslant\tau_2<+\infty$。

现在，由(H4)及推论4.6可知

$$\lim_{\substack{|s|\to\infty\\(s,w)\in S}}\Phi(s,w)=0 \tag{4.30}$$

结合(4.28)，(4.29)及(4.30)，我们得到

$$\Phi(S)=[\tau_1,\tau_2] \tag{4.31}$$

因此，我们只须证明：当$t\in(\tau_1,\tau_2)\backslash\{0\}$时，(1.9)～(1.10)至少有两个不同的 解。下面仅讨论$t\in(\tau_1,0)$的情形；$t\in(0,\tau_2)$的情形同理可证。

设$t\in(\tau_1,0)$，设$\Phi(s_0,w_0)=\tau_1$。其中$(s_0,w_0)\in S$。结合(4.28)、(4.30)及推论4.4 推得：存在常数s_1,s_2：$s_1<s_0<s_2$使

$$\Phi(s_i,w_{s_i})=t,\qquad(i=1,2)$$

其中$(s_i,w_{s_i})\in S$。于是$s_1\phi+w_{s_1}$和$s_2\phi+w_{s_2}$即为(1.9)～(1.10)的两个不同的解。

参 考 文 献

[1] D. G. Gosta and J. V. A. Goncalves, Existence and multipicity results for a class of nonlinear elliptic boundary value problems at resonance, *J. Math. Anal. Appl.*, **84** (1981), 328—338.

[2] M. A. Delpino and R. F. Manasevich, Existence for a fourth-order boundary value problem under a two-parameter nonresonance condition, *Proc. Amer.*

Math. Soc., **112** (1991), 81—86.

[3] C. P. Gupta, Existence and uniqueness theorem for the bending of an elastic beam equation, *Applicable Analysis*, **26** (1988), 289—304.

[4] C. P. Gupta, Existence and uniqueness theorems for some fourth-order fully quasilinear boundary value problems, *Applicable Analysis*, **36** (1991), 157—169.

[5] 马如云，弹性梁方程共振问题的几个多解存在定理，应用数学和力学，**14**(2) (1993), 181—188.

[6] J. Mawhin, J. R. Ward and M. Willem, Necessary and sufficent conditions of a nonlinear two-point boundary value problems, *Proc. Amer. Math. Soc.* **93** (1985), 667—674.

[7] R. A. Usmini, A uniqueness theorem for a boundary value problem, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **77** (1979), 329—335.

[8] Y. Yang, Fourth-order two-point boundary value problems, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **104** (1988), 175—180.

Multiplicity Results for a Fourth-Order Boundary Value Problem

Ma Ruyun Ma Qinsheng

(*Department of Mathematics, Northwest Normal University, Lanzhou* 730070, *P. R. China*)

Abstract

This paper deals with multiplicity results for nonlinear elastic equations of the type

$$y^{(IV)}-\alpha_1 y+\beta_1 y''+g(x,y,y'')=e,\quad 0<x<1$$
$$y(0)=y''(0)=y'(1)=y'''(1)=0$$

where $e\in L^2(0,1)$, $g:[0,1]\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ is a bounded continuous function, and the pair (α_1,β_1) satisfies

$$\alpha_1+(0+0.5)^2\pi^2\beta_1=(0+0.5)^4\pi^4$$

and

$$\alpha_1+(k+0.5)^2\pi^2\beta_1\neq(k+0.5)^4\pi^4\qquad\text{for all } k\in N$$

Key words elastic beam, two-parameter eigenvalue problem, multiplicity result