应用数学和力学，第16卷 第10期（1995年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

根据非完整模态信息进行结构动力模型识别*

郑小平　姚振汉　蘧时胜

（清华大学工程力学系，北京 100084）

（黄敦推荐，1994年12月28日收到）

摘　要

对于复杂结构的振动问题，我们很难给出比较准确的数学模型。本文建立了一种利用非完整模态试验数据来确定结构线性动力模型的识别办法。该方法的主要特点是不需要知道系统的全部模态信息，便可同时地唯一地识别出系统的质量矩阵、阻尼矩阵、刚度矩阵及其他相关参数。我们假定系统的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵具有实对称性和正定性，并且系统的部分特征值和相应的特征向量已由实验给出，在此基础上利用最小二乘法及迭代修正技术进行系统矩阵及其他相关参数的识别。为了验证方法的可靠性，文中给出了若干构造性算例。

关键词　动力结构　模型识别　非完整模态信息　最小二乘法　迭代修正技术

一、引　言

随着现代工程结构的日益复杂化，建立准确的数学模型对于预测实际结构的力学行为具有重要意义．虽然目前已有各种各样比较成熟的建模技术，但是由于模型中的一些参数很难准确确定，致使理论分析结果和实测结果存在显著差异．因此我们需要准确地确定出系统的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵，以便进行系统动态响应分析，稳定性分析和振动控制等．

根据试验数据准确地建立复杂结构的数学模型并不是一件很容易的事情，特别当考虑结构具有非比例阻尼时更是如此．近十多年来该领域发展迅速，出现了若干识别方法．Ibrahim[1]利用状态空间概念，将系统的复模态与试验结果相比较，建立了一种确定阻尼矩阵和刚度矩阵的计算方法．Fritzen[2]提出了一种IV方法，该方法根据带测试噪音的试验数据进行系统模型识别．最近Roemer和Mook[3]利用积分方法研究了系统质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵的识别问题．

本文的主要目的在于建立了一种利用非完整模态试验数据，确定结构线性动力系统的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵的识别方法．该方法要求系统的部分复特征值和相应的复特征向量由实验给出，然后利用最小二乘法及迭代修正技术将系统的待定矩阵及其它待定参数同

* 国家自然科学基金资助课题

时识别出来．该方法不需要给出系统的全部模态数据便可唯一地确定系统模型．

二、理 论 公 式

复杂结构的动力学离散模型可以采用各种各样的数值方法来建立，例如有限元法、边界元法等．但事实上直接从这些模型出发对给定结构进行修正设计并不合适，因为在这些离散模型中，对应系统矩阵的规模往往要比试验模态所能达到的规模大得多．比较常用的做法是先通过模型缩减技术[4]对原模型进行缩减处理，在缩减模型只保留那些实验能测出的自由度，消去其它自由度．设经过缩减处理后结构的齐次线性动力方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}+\mathbf{K}\mathbf{X}=0 \tag{2.1}$$

式中$\mathbf{M}$,$\mathbf{C}$和$\mathbf{K}$是$n\times n$实对称正定矩阵，它们分别表示系统的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵，$\mathbf{X}$，$\dot{\mathbf{X}}$和$\ddot{\mathbf{X}}$分别是n阶位移向量、速度向量和加速度向量．方程（2.1）所对应的特征值问题可表示为

$$(\lambda^2\mathbf{M}+\lambda\mathbf{C}+\mathbf{K})\mathbf{X}(\lambda)=0 \tag{2.2}$$

式中λ为问题的特征值，$\mathbf{X}(\lambda)$为相应的特征向量．因为系统矩阵$\{\mathbf{M},\ \mathbf{C},\ \mathbf{K}\}$具有实对称性和正定性，根据文献[5]的讨论知特征值λ和相应特征向量$\mathbf{X}(\lambda)$将全部以下述复共轭形式成对出现

$$\left.\begin{aligned}&\lambda=\mathrm{Re}(\lambda)\pm i\mathrm{Im}(\lambda)=-\zeta\omega\pm i\omega\sqrt{1-\zeta^2}\\&\mathbf{X}=\mathrm{Re}(\mathbf{X})\pm i\mathrm{Im}(\mathbf{X})\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

式中ω和ζ分别为系统的固有频率和阻尼比．我们假设系统的部分复特征值λ_k和相应复特征向量$\mathbf{X}_k$已由试验给出，它们应该满足方程(2.2)，由此得到

$$(\lambda_k^2\mathbf{M}+\lambda_k\mathbf{C}+\mathbf{K})\mathbf{X}_k=0 \tag{2.4}$$

三、识 别 方 法

系统的全部待定识别参数可以用一个m维设计向量$\mathbf{z}$来表示，一般情况下系统矩阵$\{\mathbf{M},\ \mathbf{C},\ \mathbf{K}\}$与$\mathbf{z}$之间具有非线性关系．下边我们对矩阵$\mathbf{M}$，$\mathbf{C}$和$\mathbf{K}$进行Taylor展开，从而得到下述线性表达

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{M}&=\mathbf{M}_0+\Delta\mathbf{M}=\mathbf{M}(\mathbf{z}_0)+\mathbf{L}_z^{(R)}\mathbf{M}(\mathbf{z}_0)\Delta\mathbf{z}\\\mathbf{C}&=\mathbf{C}_0+\Delta\mathbf{C}=\mathbf{C}(\mathbf{z}_0)+\mathbf{L}_z^{(R)}\mathbf{C}(\mathbf{z}_0)\Delta\mathbf{z}\\\mathbf{K}&=\mathbf{K}_0+\Delta\mathbf{K}=\mathbf{K}(\mathbf{z}_0)+\mathbf{L}_z^{(R)}\mathbf{K}(\mathbf{z}_0)\Delta\mathbf{z}\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

式中$\{\mathbf{M}_0,\ \mathbf{C}_0,\ \mathbf{K}_0\}$表示在初始设计水平$\mathbf{z}_0$下的系统矩阵，$\Delta\mathbf{z}$为待定修正向量．符号$\mathbf{L}_z^{(R)}$表示关于设计变量$\mathbf{z}$的右梯度算子（同理符号$\mathbf{L}_z^{(L)}$表示左梯度算子）．将（3.1）代入方程(2.4)，经过整理可以得到

$$[(\lambda_k^2\mathbf{L}_z^{(L)}\mathbf{M}+\lambda_k\mathbf{L}_z^{(L)}\mathbf{C}+\mathbf{L}_z^{(L)}\mathbf{M})\mathbf{X}_k]^{\perp}\Delta\mathbf{z}=-(\lambda_k^2\mathbf{M}_0+\lambda_k\mathbf{C}_0+\mathbf{K}_0)\mathbf{X}_k \tag{3.2}$$

事实上方程（3.2）包含了n个复线性代数方程．结果将(2.3)代入方程(3.2)，再将它们的实部和虚部分开，方程(3.2)就转化为下列$2n$个实线性代数方程

$$\mathbf{A}_k\Delta\mathbf{z}=\mathbf{b}_k \tag{3.3}$$

其中

$$\mathbf{A}_k=\begin{bmatrix}\{\mathbf{L}_z^{(L)}\mathbf{M}\mathrm{Re}(\lambda_k^2\mathbf{X}_k)+\mathbf{L}_z^{(L)}\mathbf{C}\mathrm{Re}(\lambda_k\mathbf{X}_k)+\mathbf{L}_z^{(L)}\mathbf{K}\mathrm{Re}(\mathbf{X}_k)\}^{\perp}\\ \{\mathbf{L}_z^{(L)}\mathbf{M}\mathrm{Im}(\lambda_k^2\mathbf{X}_k)+\mathbf{L}_z^{(L)}\mathbf{C}\mathrm{Im}(\lambda_k\mathbf{X}_k)+\mathbf{L}_z^{(L)}\mathbf{K}\mathrm{Im}(\mathbf{X}_k)\}^{\perp}\end{bmatrix} \tag{3.4}$$

$$\mathbf{b}_k=-\begin{bmatrix}\mathbf{M}_0\mathrm{Re}(\lambda_k^2\mathbf{X}_k)+\mathbf{C}_0\mathrm{Re}(\lambda_k\mathbf{X}_k)+\mathbf{K}_0\mathrm{Re}(\mathbf{X}_k)\\ \mathbf{M}_0\mathrm{Im}(\lambda_k^2\mathbf{X}_k)+\mathbf{C}_0\mathrm{Im}(\lambda_k\mathbf{X}_k)+\mathbf{K}_0\mathrm{Im}(\mathbf{X}_k)\end{bmatrix} \tag{3.5}$$

在方程(3.3)中$\mathbf{A}_k$为$2n\times m$阶矩阵，$\mathbf{b}_k$为$2n$维向量。也就是说每个特征对$\{\lambda_k, \mathbf{X}_k\}$就可以产生$2n$个实线性代数方程。

设从模态试验中给出的特征值和相应特征向量共有l对。另外记$\mathbf{A}$为由全体$\mathbf{A}_k$组装成的矩阵，$\mathbf{b}$为由全体$\mathbf{b}_k$组装成的向量，具体表达如下

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_1\\ \cdots\\ \mathbf{A}_l\end{pmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}\mathbf{b}_1\\ \cdots\\ \mathbf{b}_l\end{pmatrix} \tag{3.6}$$

使用方程(3.3)l次，便可得到

$$\mathbf{A}\Delta\mathbf{z}=\mathbf{b} \tag{3.7}$$

式中$\mathbf{A}$为$2nl\times m$阶矩阵。由此可知，为了保证待定向量$\Delta\mathbf{z}$能唯一确定，只要l满足不等式$2nl>m$即可，所以在实际操作中不必给出系统的全部模态信息。线性代数方程(3.7)可以用最小二乘法来求解，这样

$$\Delta\mathbf{z}=(\mathbf{A}^{\perp}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\perp}\mathbf{b} \tag{3.8}$$

直接从方程(3.8)计算$\Delta\mathbf{z}$需要求$m\times m$阶对称矩阵$(\mathbf{A}^{\perp}\mathbf{A})$的逆，所以在实际计算中提出了许多有效方法，例如LU因子分解法、QR解法等。

四、迭代修正过程

在复杂结构的建模过程中由于受模型中的一些非线性设计参数影响，初始设计模型与真实结构之间往往存在明显差异，所以只通过一次计算很难准确确定系统矩阵。为了得到真实可靠的结构模型，我们建立了下述迭代修正过程：

（1） 选取迭代初值$\mathbf{z}_0$；

（2） 计算下列公式中的影响矩阵

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{M}^{(j+1)}&=\mathbf{M}^{(j)}+\Delta\mathbf{M}^{(j)}=\mathbf{M}(\mathbf{z}_j)+\mathbf{L}_z^{(B)}\mathbf{M}(\mathbf{z}_j)\Delta\mathbf{z}^{(j)}\\ \mathbf{C}^{(j+1)}&=\mathbf{C}^{(j)}+\Delta\mathbf{C}^{(j)}=\mathbf{C}(\mathbf{z}_j)+\mathbf{L}_z^{(B)}\mathbf{C}(\mathbf{z}_j)\Delta\mathbf{z}^{(j)}\\ \mathbf{K}^{(j+1)}&=\mathbf{K}^{(j)}+\Delta\mathbf{K}^{(j)}=\mathbf{K}(\mathbf{z}_j)+\mathbf{L}_z^{(B)}\mathbf{K}(\mathbf{z}_j)\Delta\mathbf{z}^{(j)}\end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

再根据方程(3.4)和(3.5)分别计算当前第j步的总体矩阵和$\mathbf{A}^{(j)}$总体向量$\mathbf{b}^{(j)}$；

（3） 按照下列公式计算当前第j步的误差修正向量$\Delta\mathbf{z}^{(j)}$

$$\Delta\mathbf{z}^{(j)}=\{[\mathbf{A}^{(j)}]^{\perp}\mathbf{A}^{(j)}\}^{-1}[\mathbf{A}^{(j)}]^{\perp}\mathbf{b}^{(j)} \tag{4.2}$$

（4） 进行收敛性判断

$$\|\Delta\mathbf{z}_j\|/\|\mathbf{z}_j\|<\varepsilon \tag{4.3}$$

式中ε为事先选定的误差控制参数。如果当前解满足上述条件便可输出计算结果，否则继续下一步骤(5)；

（5） 修改当前设计变量

$$\mathbf{z}^{(j+1)}=\mathbf{z}^{(j)}+\Delta\mathbf{z}^{(j)} \tag{4.4}$$

返回到步骤(2)，重复上述过程直到满足精度要求为止。

这里应该指出的是，当系统矩阵{M，C，K}随设计变量线性变化时，特别是设计变量是由系统矩阵的元素本身组成时，不必进行过多的修正计算只需一次迭代便可得到比较准确的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵。

五、数 值 算 例

文献[6]讨论了多自由度集中参量系统的非比例阻尼矩阵识别问题，并且给出了一个构造性算例。我们将该算例作一些改动，用它来说明本文方法的各种应用。表1给出了该问题的全部系统矩阵，表2只给出了它的前两阶复特征值和对应的复特征向量。在下边的讨论中我们还特别假定系统的质量矩阵是对角矩阵，讨论分下述两方面进行。

表1 系统的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵

M				C				K			
0.10	0.00	0.00	0.00	0.40	−0.10	−0.10	−0.10	4.00	−1.00	−1.00	0.00
0.00	0.20	0.00	0.00	−0.10	0.30	−0.10	−0.10	−1.00	2.00	−1.00	0.00
0.00	0.00	0.10	0.00	−0.10	−0.10	0.40	−0.20	−1.00	−1.00	3.00	−1.00
0.00	0.00	0.00	0.20	−0.10	−0.10	−0.20	0.40	0.00	0.00	−1.00	1.00

5.1 系统矩阵识别

我们假设系统部分矩阵按表1给定，其它矩阵需要用本文方法来识别.利用表2的给出前两阶模态信息，只通过一步求解来识别这些未知矩阵。对于5种不同情形，表3给出了本文识别结果与精确值的误差比较情况，其中

表2 前两阶复特征值和复特征向量

k	1	2
$\mathbf{X}_k$	$-0.0531-0.1375i$ $0.0069+0.0063i$ $-0.0025+0.0964i$ $0.0003-0.0074i$	$0.0041-0.1128i$ $0.0319+0.0672i$ $-0.0673-0.1714i$ $0.0155+0.0425i$
λ_k	$-2.4442+6.3258i$	$-1.9854+5.05630$

表3 5种不同情形下的误差比较

情况	已知	识别	m	$\Vert E_z\Vert$	$\Vert E_\lambda\Vert$
1	C,K	M	4	0.0152×10^{-12}	0.1403×10^{-13}
2	M,K	C	10	0.1431×10^{-12}	0.3047×10^{-13}
3	M,C	K	10	0.0674×10^{-12}	0.1731×10^{-13}
4	K	M,C	14	0.1037×10^{-12}	0.2850×10^{-13}
5	C	M,K	14	0.0935×10^{-12}	0.2095×10^{-13}

$$\left.\begin{aligned}\Vert E_z\Vert&=\frac{\Vert\mathbf{z}-\mathbf{z}_{exact}\Vert}{\Vert\mathbf{z}_{exact}\Vert}\\ \Vert E_\lambda\Vert&=\sum_{k=1}^{l}\frac{\Vert\lambda_k(\mathbf{z})-\lambda_k(\mathbf{z}_{exact})\Vert}{\Vert\lambda_k(\mathbf{z}_{exact})\Vert}\end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

由此可知二者几乎没有差别，其中由$\Vert E_z\Vert$和$\Vert E_\lambda\Vert$所显示的最大误差分别为0.1431×10^{-12}和

0.3047×10^{-13}。

5.2 非线性参数识别

这里我们假设所有系统矩阵的非对角元素是按表1给定的，而对角线元素需要用本文方法来识别，并且人为地规定这些对角线元素按下述非线性关系变化：

$$\left.\begin{aligned} M_{22}&=2.00M_{11}=2.00M_{33}=1.00M_{44}=8z_1^2\\ C_{22}&=0.75C_{11}=0.75C_{33}=0.75C_{44}=\ln(z_2)\\ K_{33}&=0.75K_{11}=1.50K_{22}=3.00K_{44}=\exp[z_3]\end{aligned}\right\}\tag{5.2}$$

其中$z_i(i=1,2,3)$是3个非线性设计参数。表4给出了这些非线性设计参数的收敛过程，从中可以看出经过5步迭代之后3个设计参数都稳定地收敛到精确值。

表4　　3个非线性设计参数的收敛过程

j	0	1	2	3	4	5	精确值
z_1	1.0000	0.5123	0.2806	0.1846	0.1601	0.1582	0.1581
z_2	1.0000	1.3002	1.3490	1.3495	1.3498	1.3499	1.3499
z_3	1.0000	1.1035	1.0980	1.0985	1.0986	1.0986	1.0986

六、结　语

本文建立了一种利用非完整模态试验数据，确定结构线性动力系统模型的识别方法。和已有识别方法相比，该方法的主要特点是不需要给出系统的全部模态信息便可唯一地识别出系统的质量矩阵、阻尼矩阵、刚度矩阵以及与此相关的各种非线性设计参数。我们希望在今后的工作中，通过和有限元模型减缩技术相结合，将该方法应用到一些重要的结构工程问题中去。

参 考 文 献

[1] S.R.,Ibrahim,Dynamic modeling of structures from measured complex modes, *AIAA Journal*, 21 (1983), 888—891.

[2] C.P. Fritzen, Identification of mass, damping, and stiffness matrices of mechanical system,*ASME Journal of Vibration,Acoustics,Stress,and Reliability in Design*, 108 (1986), 9—16.

[3] M.J. Roemer and D. J. Mook, Mass, stiffncess,and damping matrix identification: an integrated approach, *ASME Journal of Vibration, Acoustics*, 114 (1992), 358—363.

[4] R.J. Guyan, Reduction of stiffness and mass matrices, *AIAA Journal*, 14 (1965), 1627—1628.

[5] D.J. Ewins,*Modal Testing:Theory and Practice*, Research Studies Press Ltd. England (1986).

[6] C. Minas and D. J. Inman, Identification of a nonproportional damping matrix from incomplete modal information, *ASME Journal of Vibration, Acoustics*, 113 (1991), 219—224.

A Model Identification Method of Vibrating Structures from Incomplete Modal Information

Zheng Xiaoping Yao Zhenhan Qu Shisheng

(Department of Engineering Mechanics, Qinghua University, Beijing 100084, *P.R.China)*

Abstract

The accurate mathematical models for complicated structures are very difficult to construct. The work presented here provides an indentification method for estimating the mass, damping, and stiffness matrices of linear dynamical systems from incomplete experimental data. The mass, stiffness, and damping matrices are assumed to be real, symmetric, and posititve definite. The partial set of experimental complex eigenvalues and corresponding eigenvectors are given. In the proposed method the least squares algorithm is combined with the iteration technique to determine system's indentified matrices and corresponding design parameters. Several illustrative examples, are presented to demonstrate the reliability of the proposed method. It is emphasized that the mass, damping and stiffness matrices can be identified simultaneously.

Key words vibrating structures, model identification, incomplete experimental modal data, the least squares method, iteration technique