应用数学和力学，第16卷 第10期（1995年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

# 离散型Lurie控制系统绝对稳定的充分必要条件*

张 继 业

（西南交通大学应用力学研究所 成都 610031）

（李骊推荐，1994年10月5日收到）

摘 要

本文研究了离散型 Lurie 控制系统

$$\left.\begin{array}{l} x(n+1)=Ax(n)+bf[\sigma(n)] \\ \sigma(n)=c^Tx(n) \end{array}\right\} \quad (1)$$

在非线性函数$f(\sigma)$满足

$$f(0)=0,\ \sigma f(\sigma)>0 \qquad (\sigma\neq 0) \quad (2)$$

或

$$f(0)=0,\ 0\leqslant k_1\leqslant f(\sigma)/\sigma\leqslant k_2<+\infty \qquad (\sigma\neq 0) \quad (3)$$

时，零解的绝对稳定性。给出了系统(1)在满足条件(2)时零解绝对稳定的构造性充要条件，并得到了系统(1)的简化系统在满足条件(3)时，绝对稳定的充分及充要判据。

**关键词** 离散型 绝对稳定性 充要条件 Lurie 问题

## 一、引 言

40多年前，（原）苏联学者 A. I. Lurie 在分析飞机自动驾驶仪的稳定性中，提出了非线性控制系统中带有普遍意义的 Lurie 控制系统及 Lurie 问题[1]。之后，国内外学者对以各种形式描述的 Lurie 系统进行了广泛深入的研究[2～5]，但一般只能得到系统绝对稳定的充分条件，或具有某种特殊形式的系统的充要条件[6～8]。对于以各种方式描述的 Lurie 系统绝对稳定的充要性方面，至今尚无完整的构造性结论。

文[9～11]中考虑了如下形式的离散 Lurie 型控制系统

$$\left.\begin{array}{l} x(n+1)=Ax(n)+bf[\sigma(n)] \\ \sigma(n)=c^Tx(n) \end{array}\right\} \quad (1.1)$$

的零解的绝对稳定性，这里$A=(a_{ij})_{m\times m}\in R^{m\times m}$，$x$，$b$，$c\in R^m$，非线性函数$f(\sigma)$满足

$$f(0)=0,\ \sigma f(\sigma)>0 \qquad (\sigma\neq 0) \quad (1.2)$$

或

$$f(0)=0,\ 0\leqslant k_1\leqslant f(\sigma)/\sigma\leqslant k_2<+\infty, \qquad (\sigma\neq 0) \quad (1.3)$$

* 1994年7月5日第一次收到。

在文[9]中，廖晓昕教授用部分变元绝对稳定的观点得到了当$f(\sigma)$满足条件(1.2)（在此称为无限扇形角）或条件(1.3)（在此称为有限扇形角）时，系统（1.1）绝对稳定的充要条件，并得到了一些充分性代数判据．这些代数判据对有限扇形角下是有效的，但在无限扇形角下，除十分特殊的情况外，是无效的．文[10,11]中的判据也有类似的问题．

本文首先建立一个降维原理，并用此原理得到了系统在无限扇形角下，零解绝对稳定的显式充要条件，并得到了在有限扇形角下的充分性代数判据，及一类特殊情况下的充要条件．

## 二、无限扇形角下，系统(1.1)绝对稳定的充分必要条件

我们首先建立降维原理．仿[12]，不难得到以下引理．

**引理1** 如果 $\mathrm{Rank}[c,\ A^Tc,\cdots,(A^{m-1})^Tc]=m_1$，则存在非奇异变换$x=My$，使系统(1.1)变为

$$\left.\begin{aligned}&y(n+1)=\bar{A}y(n)+\bar{b}f(\sigma(n))\\&\sigma(n)=\bar{c}^Ty(n)\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

其中

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}\bar{A}_{11}&0\\\bar{A}_{21}&\bar{A}_{22}\end{bmatrix},\quad \bar{b}=\begin{bmatrix}\bar{b}_1\\\bar{b}_2\end{bmatrix},\quad \bar{c}=\begin{bmatrix}\bar{c}_1\\0\end{bmatrix},\quad y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$$

$\bar{A}_{11}\in R^{m_1\times m_1}$，$\bar{A}_{22}\in R^{m_2\times m_2}$，$\bar{b}_1$，$\bar{c}_1$，$y_1\in R^{m_1}$，$\bar{b}_2$，$y_2\in R^{m_2}$，$m_1+m_2=m$，且

$$\mathrm{Rank}[\bar{c}_1,\ \bar{A}_{11}^T\bar{c}_1,\cdots,\ (\bar{A}_{11}^{m_1-1})^T\bar{c}_1]=m_1$$

**定理1** 若$A$为 Schur 稳定的，即$A$的谱半经$R(A)<1$，则系统(1.1)的零解的绝对稳定性与系统(2.1)的子系统

$$\left.\begin{aligned}&y_1(n+1)=\bar{A}_{11}y_1(n)+\bar{b}_1f(\sigma(n))\\&\sigma(n)=\bar{c}_1^Ty_1(n)\end{aligned}\right\}\tag{2.2}$$

的零解的绝对稳定性等价．

**证明** 由于变换$x=My$为非奇异的，故系统(1.1)与(2.1)的绝对稳定性等价．不难看出，若系统(2.1)绝对稳定，一定有系统(2.2)绝对稳定．由文[10,11]中证法，容易证明若系统(2.2)绝对稳定，也一定有系统(2.1)绝对稳定，即系统(1.1)绝对稳定．证毕．

由引理1与定理1即构成降维原理．很明显，降维原理在有限扇形角下也成立．与文[11]相比，本文的降维原理更直接，使用上更方便．

在$m_1$维系统(2.2)中，因

$$\mathrm{Rank}[\bar{c}_1,\ \bar{A}_{11}^T\bar{c}_1,\cdots,\ (\bar{A}_{11}^{m_1-1})^T\bar{c}_1]=m_1$$

故存在非奇异变换[12] $z_1=N^{-1}y_1$，使系统(2.2)变为以下形式

$$\left.\begin{aligned}&z_1(n+1)=\alpha z_1(n)+\beta f(\sigma)\\&\sigma=e^Tz_1(n)\end{aligned}\right\}\tag{2.3}$$

其中

$$N^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & a_{m_1-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & a_3 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{m_1-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{c}_1^T\bar{A}_{11}^{m_1-1} \\ \bar{c}_1^T\bar{A}_{11}^{m_1-2} \\ \vdots \\ \bar{c}_1^T\bar{A}_{11} \\ \bar{c}_1^T \end{bmatrix}$$

$$a=N^{-1}\bar{A}_{11}N=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{m_1-1} \end{bmatrix}$$

$$\beta=N^{-1}\bar{b}_1=(\beta_0,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{m_1-1})^T,\quad e=\bar{c}_1^TN=(0,0,0,\cdots,0,1)^T$$

这里 $a_i(i=0,1,2,\cdots,m_1-1)$是矩阵$\bar{A}_{11}$的特征多项式

$$\det(\lambda I-\bar{A}_{11})=\lambda^{m_1}+a_{m_1-1}\lambda^{m_1-1}+\cdots+a_0$$

的各项系数，$I$为单位阵。

**引理2** 满足条件(1.2)时，系统(2.3)的零解绝对稳定的必要条件为

$$\beta_i=0\qquad(i=0,1,\cdots,m_1-1)$$

即系统(2.2)的零解绝对稳定的必要条件为$\bar{b}_1=0$。

**证明** 在系统(2.3)中，令$f(\sigma)=k\sigma$，$k>0$为任意正数。令

$$F(k)=a+k\beta e^T$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0+k\beta_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1+k\beta_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2+k\beta_2 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{m_1-1}+k\beta_{m_1-1} \end{bmatrix}$$

若系统(2.3)绝对稳定，那么对满足条件(1.2)的线性函数$f(\sigma)=k\sigma(k>0)$，系统(2.3)的零解应为全局渐近稳定，即$F(k)$对于任意$k>0$应为 Schur 稳定的。$F(k)$的特征方程为

$$\det[\lambda I-F(k)]=\lambda^{m_1}+(a_{m_1-1}-k\beta_{m_1-1})\lambda^{m_1-1}+\cdots+(a_0-k\beta_0)=0 \tag{2.4}$$

在方程(2.4)中，特征根$\lambda_i$应满足$|\lambda_i|<1(i=1,2,\cdots,m_1)$。

由根与系数的关系

$$\sum_{i=1}^{m_1}\lambda_i=-(a_{m_1-1}-k\beta_{m_1-1})$$

$$\sum_{\substack{i,j=1\\(i<j)}}^{m_1}\lambda_i\lambda_j=a_{m_1-2}-k\beta_{m_1-2}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\prod_{i=1}^{m_1}\lambda_i=(-1)^{m_1}(a_0-k\beta_0)$$

故$(\alpha_i-k\beta_i)$ $(i=0,1,\cdots,m_1-1)$应为有界数.再由$k$的任意性知，$\beta_i=0(i=0,1,2,\cdots,m_1-1)$。由系统(2.2)与(2.3)的关系，可知$\bar{b}_1=0$。证毕。

从以上讨论可看出，对于系统(1.1)，若其零解是绝对稳定的，则经过非奇异变换一定能转换为以下形式

$$\left.\begin{aligned}&\begin{bmatrix}y_1(n+1)\\ y_2(n+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{A}_{11} & 0\\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1(n)\\ y_2(n)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \bar{b}_2\end{bmatrix}f(\sigma)\\ &\sigma=[\bar{c}_1^T,\ 0]\begin{bmatrix}y_1(n)\\ y_2(n)\end{bmatrix}\end{aligned}\right\}\tag{2.5}$$

用证明定理1同样的方法可以证明，若$\bar{A}_{11}$，$\bar{A}_{22}$为 Schur 稳定，系统(2.5)零解的绝对稳定性与线性系统

$$y_1(n+1)=\bar{A}_{11}y_1(n)\tag{2.6}$$

的零解的渐近稳定性等价．综上所述，可以得到以下结论．

**定理2**　若$A$为 Schur 稳定的，在满足条件(1.2)下，系统(1.1)的零解绝对稳定的充分必要条件是存在非奇异变换$x=Ty$，使系统(1.1)变换成系统(2.5)．

下面我们给出一个在使用上更为方便的结论．

**定理3**　若$A$为 Schur 稳定的，在满足条件(1.2)下，系统(1.1)的零解绝对稳定的充要条件为

$$c^TA^ib=0\qquad(i=0,1,2,\cdots,m-1)$$

**证明**　*必要性*　由系统(1.1)的零解绝对稳定，则系统(2.2)、(2.3)也绝对稳定，故$\beta_i=0(i=0,1,\cdots,m_1-1)$即$\beta=0$，$\bar{b}_1=N\beta=0$，由矩阵知识知

$$c^TA^ib=\bar{c}\bar{A}^i\bar{b}=\bar{c}_1^T\bar{A}_{11}^i\bar{b}_1=0\qquad(i=0,1,2,\cdots,m-1)$$

*充分性*　系统(1.1)与系统(2.1)的零解的绝对稳定性等价，又

$$c^TA^ib=\bar{c}^T\bar{A}^i\bar{b}=\bar{c}_1^T\bar{A}_{11}^i\bar{b}_1=0\qquad(i=0,1,\cdots,m_1-1)$$

$$[\bar{c}_1,\ \bar{A}_{11}^T\bar{c}_1,\ \cdots,\ (\bar{A}_{11}^{m_1-1})^T\bar{c}_1]^T\bar{b}_1=0$$

而且　$\mathrm{Rank}[\bar{c}_1,\ \bar{A}_{11}^T\bar{c}_1,\cdots,\ (\bar{A}_{11}^{m_1-1})^T\bar{c}_1]=m_1$

即　$\det[\bar{c}_1,\ \bar{A}_{11}^T\bar{c}_1,\ \cdots,\ (\bar{A}_{11}^{m_1-1})^T\bar{c}_1]\neq0$

这样就得到$\bar{b}_1=0$。故系统(2.1)具有系统(2.5)的形式．由定理2知定理3结论成立．

由于在无限角下，系统(1.1)的零解绝对稳定时具有十分特殊的结构，所以通过构造 Lyapunov 函数法不易得到其绝对稳定的有效判据．在上面的证明中，实际上还证明了在此特殊情况下，Aizerman 猜想是成立的，即系统(1.1)的零解的绝对稳定性与其线性化系统$x(n+1)=(A+kbc^T)x(n)$ $(k>0)$的零解的渐近稳定性等价．在连续型 Lurie 系统中，当$c^Tb=0$，$c^TAb=0$（文[14]中指出$A$为单位阵时），文[5]中的判据失效，但用本文的方法可以使问题得到解决．

## 三、有限扇形角下系统(1 1)零解的绝对稳定性

不妨设$b_m\neq0$（否则，变换方程和变量的次序使$b_m\neq0$）．若$c^Tb\neq0$，做如下变换[2]

$$\begin{bmatrix} x^{(1)} \\ \sigma \end{bmatrix} = Lx \tag{3.1}$$

其中 $x^{(1)} = \mathrm{col}(x_1^{(1)},\ x_2^{(1)}, \cdots,\ x_{m_1-1}^{(1)})$

$$L = \begin{pmatrix} b_m & 0 & \cdots & 0 & -b_1 \\ 0 & b_m & \cdots & 0 & -b_2 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & b_m & -b_{m-1} \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{m-1} & c_m \end{pmatrix}$$

通过变换(3.1)，系统(1.1)可变为

$$\left.\begin{aligned} &x^{(1)}(n+1) = Bx^{(1)}(n) + h\sigma(n) \\ &\sigma(n+1) = g^T x^{(1)}(n) + p\sigma(n) - \rho f[\sigma(n)] \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

其中 $h = \mathrm{col}(h_1, \cdots, h_{m-1}),\ g = \mathrm{col}(g_1, \cdots, g_{m-1})$

$$\begin{bmatrix} B & h \\ g^T & p \end{bmatrix} = LAL^{-1} \overset{\Delta}{=} A^{(1)},\ B = (b_{ij})_{(m-1)\times(m-1)}$$

系统(3.2)称为系统（1.1）的简化系统。这个简化系统具有以下优点：(i) 所需的变换(3.1)是简单的，(ii) 除要求$c^Tb \neq 0$外，无其他限制；(iii) 消除了额外变量（$m$个差分方程只有$m$个变量），且非线性项的系数列阵为最简单。

仿文[9]定理4，不难得到以下结论。

**定理4** 若存在常数$t_i > 0\ (i = 1, 2, \cdots, m)$使

$$\max_{1 \le j \le m-1} \left\{ \sum_{i=1}^{m-1} \frac{t_i}{t_j} |b_{ij}| + \frac{t_m}{t_j} |g_i| \leqslant 1 \right.$$

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{t_j}{t_m} |h_j| + \max_{k = k_1, k_2} |p - \rho k| \leqslant \mu < 1$$

则系统(3.2)的零解绝对稳定。

**定理5** 在系统(3.2)中，若$b_{ij} \geqslant 0$，$h_i \geqslant 0$，$g_i \geqslant 0$，则系统(3.2)的零解绝对稳定的充要条件为$I - A^{(2)}$的主子式为正，其中$I$为单位阵，

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} B & h \\ g^T & p - \rho k \end{bmatrix} \quad (\rho > 0\text{时},\ k = k_1, \rho < 0\text{时},\ k = k_2)$$

**证明** 必要性 令$f(\sigma) = k\sigma\ (k_1 \leqslant k \leqslant k_2)$，则系统(3.2)的线性化系统

$$\begin{bmatrix} x^{(1)}(n+1) \\ \sigma(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & h \\ g^T & p - \rho k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(1)}(n) \\ \sigma(n) \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

为 Schur 稳定的。由文[13]中定理9.16知，$I - A^{(2)}$的主子式为正。

充分性 由条件知，存在$t = \mathrm{col}(t_1, \cdots, t_m)\ (t_i > 0, i = 1, 2, \cdots, m)$ 使 $A^{(2)}t < t$，即满足定理4的条件，故定理5成立。

感谢舒仲周教授的指导，洪景丰研究员的热情帮助及与李骊教授所做的有益讨论！

## 参 考 文 献

[1] A. M. Letov, *Stability of Nonlinear Control Systems* (1955) (in Russian);

English transl. of 1st. ed., Princeton University Press, Princeton (1961).

[2] 舒仲周, 《运动稳定性》, 西南交通大学出版社, 成都 (1989).

[3] 廖晓昕, 《稳定性的数学理论与应用》, 华中师范大学出版社, 武汉 (1988).

[4] 秦元勋等, 《运动稳定性理论与应用》, 科学出版社, 北京 (1981).

[5] 朱思铭, 直接控制系统的绝对稳定性准则, 中山大学学报, (3) (1979), 20—28.

[6] 谢惠民, 一类三阶控制系统绝对稳定性的充分必要条件, 中国科学 (A), (9) (1981), 1165—1175.

[7] 张继业、舒仲周, 直接控制系统绝对稳定的充要性准则, 应用数学和力学, 15(3) (1994), 245—251.

[8] 裘晓钢、舒仲周, 控制系统第二标准型的绝对稳定性准则, 应用数学和力学, 7(9) (1986), 785—800.

[9] 廖晓昕, 论离散型 Лурье 控制系统绝对稳定的充要条件, 数学年刊, 10(A)(5) (1989), 628—635.

[10] Lj. T. Grujic and D. D. Siljak, Exponential stability of large-scale direct systems, *Int. J. Control.*, 19(3) (1974), 481—491.

[11] 肖淑贤, 离散型 Лурье 控制系统的降维原理和应用, 华中理工大学学报, 20 (增刊)(1992), 97—101.

[12] Chen Chitsong, *Linear System Theory and Design*, 2nd, Holt, Rinehart and Winston, New York (1984).

[13] J. P. La Salle, *The Stability of Dynamical Systems*, SIAM, Philadelphia (1976).

[14] 李森林, 几类直接控制系统绝对稳定的充分及必要条件, 应用数学学报, 6(4) (1983), 458—467.

# Necessary and Sufficient Conditions for the Absolute Stability of Discrete Type Lurie Control System

Zhang Jiye

*(Research Institute of Applied Mechanics, Southwest Jiaotong University, Chengdu. 610031, P. R. China)*

**Abstract**

In this paper, it is discussed that the absolute stability for zero solution of the discrete type Lurie control system

$$\left.\begin{aligned} &x(n+1)=Ax(n)+bf[\sigma(n)] \\ &\sigma(n)=c^{T}x(n) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

in which the nonlinear function $f(\sigma)$ satisfying conditions as follows

$$f(0)=0,\ \sigma f(\sigma)>0 \qquad (\sigma\neq 0) \tag{2}$$

or

$$f(0)=0,\ 0\leqslant k_1\leqslant f(\sigma)/\sigma\leqslant k_2<+\infty \qquad (\sigma\neq 0) \tag{3}$$

It gives the necessary and sufficient conditions for the absolute stability for system (1) under conditions (2). We also obtain the sufficient criteria for absolute stability of the simlified systems of (1) under conditions (3).

**Key words** discrete type, absolute stability, necessary and sufficient condition, Lurie problem