

广义二阶流体管内轴向流动*

何光渝 黄军旗

(西安石油学院, 西安 710061) (北京师范大学, 北京 100875)

刘 慈 群

(中科院渗流流体力学所, 廊坊 102801)

摘 要

在流体的本构关系中引入分数阶导数运算, 对于介于粘性与弹性之间的流体的描述更具有合理性. 本文将这种关系引入二阶流体, 研究其管内轴向流动. 我们先求出了 $1/2$ 阶导数的解析解, 用以验证Laplace数值反演的CRUMP方法的有效性. 然后用CRUMP法分析二阶流体管内轴向流动的特征. 分析表明粘弹性特征越明显的流体, 其速度与应力对分数导数的阶数越具有敏感性.

关键词 二阶流体 轴向流动 积分变换

一、引 言

采油工程, 高分子化学工程以及管道工程需要研究非牛顿粘弹性流体在管内的不定常流动. 1988年, 韩式方^[1], 伍岳庆^[2]相继用Kantorovich变分法和差分法求解了二阶流体圆管内不定常流动方程, 初步得出反映非牛顿流体流动特征的一些结果. 刘慈群和黄军旗^[3]在1989年用积分变换法获得该问题的解析解, 导出了便于工程应用的解析公式, 更准确地展示了非牛顿管流的流动特征. 在这些研究报告中, 所引用的本构关系具有下述形式:

$$\tau(t) = E_0 \varepsilon(t) + E_1 \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon(t) \quad (1.1)$$

这里 τ 为切应力, ε 为切应变, E_0 和 E_1 是常数. 方程 (1.1) 是一种线性关系, 它是由唯象理论导出的, 目的是近似反映流体的应力应变关系. 从六十年代末开始 Slonimsky^[4], Bagley^[5], Rogers^[6] 及 Friedrich^[7] 等相继将分数导数的概念引入流变学, 研究分析了不同的问题. 对于许多介于牛顿流体和弹性固体之间的流体材料, 这种方法更精确些. 李健和江体乾^[8] 将这种本构关系用于田菁胶和黄原胶的实验数据分析, 获得了较满意的结果.

一般地, 粘弹性二阶流体本构关系可用如下方程描述:

* 1994年12月13日收到.

$$\tau(t) = E_0 \varepsilon(t) + E_1 \cdot D^\alpha [\varepsilon(t)] \quad (1.2)$$

上式可与方程(1.1)对应, 其中 D^α 是分数阶导数算子, 定义如下^[5]:

$$D^\alpha [y(t)] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{y(z)}{(t-z)^\alpha} dz \quad (0 < \alpha < 1) \quad (1.3)$$

式中, $\Gamma(\cdot)$ 是Gamma函数. 在方程(1.2)中, 当 $\alpha=1$ 时可简化成(1.1)的线性关系, 当 $\alpha=1$ 时, 本构关系对应完全的牛顿流体. 其实式(1.2)中, $E_0 \varepsilon(t)$ 是弹性部份的贡献, $E_1 D^\alpha [\varepsilon(t)]$ 则是粘弹性项.

本文研究管内轴向流动, 我们对流动方程作Laplace和Hankell积分变换, 从而解出像函数. 当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时, 我们给出了严格的解析解, 它与用Crump数值反演法获取的结果吻合甚好. 对于 α 在0和1之间的任何值, 用Crump^[6]法反演可以获得满意的结果. 这对工程应用和实验分析是极有帮助的. 我们在文中还考查了这种非线性本构关系模型的基本特征及对有关参数的敏感性.

二、管流模型及解

1. 基本方程

我们讨论圆管内的轴向流动, 作如下假设:

- (1) 流体不可压缩,
- (2) 流动关于管轴对称,
- (3) 管轴方向的压力梯度是常量.

在以上假设之下, 我们建立柱坐标系, 令管径方向为 r , 管轴方向为 z . 于是有如下本构关系和动量方程.

$$\text{本构关系}^{[5]}: \tau_{rz} = \eta_0 \frac{\partial w}{\partial r} + \beta D^\alpha \left[\frac{\partial w}{\partial r} \right] \quad (2.1)$$

$$\text{动量方程}^{[3]}: \rho \frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \tau_{rz} + \frac{1}{r} \tau_{rz} \quad (2.2)$$

若令:

$$u = \frac{w \eta_0}{\left[\frac{\partial p}{\partial z} \right] R^2}, \quad t = \frac{t' \eta_0}{\rho R^2}, \quad x = \frac{r}{R}, \quad R_0 = \frac{\beta}{\rho R^2} \quad (2.3)$$

则有无量纲形式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 1 + (1 + R_0 D^\alpha) \left[\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] \quad (2.4)$$

这里 τ_{rz} 为切应力分量, w 为速度, r 为径向坐标, z 为轴向坐标, t' 为时间, η_0 为粘性参数, β 为粘弹性参数, ρ 为密度, p 为压力, R 为管半径.

2. 问题的解

对方程(2.4)提如下定解条件

$$u(x, 0) = 0 \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u(0, t) = 0 \quad (0 < t) \quad (2.6)$$

$$u(1, t) = 0 \quad (0 < t) \tag{2.7}$$

对问题(2.4)~(2.7)施行Hankell和Laplace变换, 分别记

$$\bar{u} = \int_0^1 xu(x, t)J_0(\rho_i x) dx \tag{2.8}$$

$$\bar{u} = \int_0^\infty u(x, t) \exp[-st] dt \tag{2.9}$$

其中 $J_0(\cdot)$ 是零阶一类Bessel函数, ρ_i 是其零点, 即 $J_0(\rho_i) = 0$, s 是Laplace变换参量. 由此, 解出问题的解

$$\bar{u} = \frac{1}{s(s + R_c \rho_i^2 s^2 + \rho_i^2)} \frac{J_1(\rho_i)}{\rho_i} \tag{2.10}$$

Hankell变换的反演公式是:

$$u = 2 \sum_{i=1}^\infty \bar{u} \frac{J_0(\rho_i x)}{J_1^2(\rho_i)} \tag{2.11}$$

将(2.10)代入(2.11)有Laplace空间的像函数

$$\bar{u}(x, s) = 2 \sum_{i=1}^\infty \left[\frac{1}{s(s + R_c \rho_i^2 s^2 + \rho_i^2)} \right] \frac{J_0(\rho_i x)}{\rho_i J_1(\rho_i)} \tag{2.12}$$

对像函 \bar{u} 反演, 可获得流场速度.

当 $\alpha=1$ 时, 文[3]给出了解析反演

$$u(x, t) = \frac{1}{4}(1-x^2) - \sum_{i=1}^\infty 2 \exp\left(-\frac{\rho_i^2 t}{1 + R_c \rho_i^2}\right) \frac{J_0(\rho_i x)}{\rho_i^3 J_1(\rho_i)} \tag{2.13}$$

当 $\alpha=0$ 时, 式(2.12)的反演也很容易, 其形式为:

$$u(x, t) = \frac{1}{R_c + 1} \left[\frac{1}{4}(1-x^2) - \sum_{i=1}^\infty 2 \exp(-(R_c + 1)\rho_i^2 t) \frac{J_0(\rho_i x)}{\rho_i^3 J_1(\rho_i)} \right] \tag{2.14}$$

当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时, 我们也较容易地获得(2.12)式的反演, 其形式为:

$$u(x, t) = 2 \sum_{i=1}^\infty f(\rho_i, t) \frac{J_0(\rho_i x)}{\rho_i J_1(\rho_i)} \tag{2.15}$$

这里,

$$f(\rho_i, t) = \frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{r_2 - r_1} \left[\frac{1}{r_2} \exp[r_2 t] \operatorname{erfc}(r_2 \sqrt{t}) - \frac{1}{r_1} \exp[r_1 t] \operatorname{erfc}(r_1 \sqrt{t}) \right] \tag{2.16}$$

$$r_1 = \frac{1}{2}(R_c \rho_i^2 - \sqrt{R_c^2 \rho_i^4 - 4\rho_i^2}), \quad r_2 = \frac{1}{2}(R_c \rho_i^2 + \sqrt{R_c^2 \rho_i^4 - 4\rho_i^2}) \tag{2.17}$$

当 $\alpha=0, \frac{1}{2}$ 和1以外的其它值时, 式(2.12)的反演将极为复杂. 对于这些值, 我们用

Crump^[9]方法计算. 该方法的基本理论在文献中有详细叙述, 这里给出其计算公式:

$$u(x, t) = \frac{\exp[at]}{T} \left\{ \frac{1}{2} \bar{u}(x, a) + \sum_{k=1}^\infty \left[\operatorname{Re} \left(\bar{u} \left(x, a + \frac{k\pi i}{T} \right) \right) \cos \left(\frac{k\pi t}{T} \right) - \operatorname{Im} \left(\bar{u} \left(x, a + \frac{k\pi i}{T} \right) \right) \sin \left(\frac{k\pi t}{T} \right) \right] \right\} + E \tag{2.18}$$

式中 a 是一个选定的实数, 它在数值上大于被反演函数所有奇点坐标的实部, T 是一个选定的计算时间上限的一半, E 是误差, 它由下式判断

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} \exp[-2naT] f(2nT+t) \quad (2.19)$$

一般地式(2.18)的收敛速度比较慢, 我们用Epsilon算法予以加速, 可以节省许多机时。

三、讨 论

1. 式(2.13)和(2.14)给出 $\alpha=1$ 和 $\alpha=0$ 的解, 从时间 $t \rightarrow \infty$ 的结果看

$$\alpha=1, \quad u = \frac{1}{4}(1-x^2) \quad (3.1)$$

$$\alpha=0, \quad u = \frac{1}{R_c+1} \cdot \frac{1}{4}(1-x^2) \quad (3.2)$$

两者有一个因子 $(R_c+1)^{-1}$ 的差别, $\alpha=0$ 的各点速度小于 $\alpha=1$ 的, 但从公式(2.13)和(2.14)分析, $\alpha=0$ 时, 式(2.14)的指数项衰减得快些, 故 $\alpha=0$ 对应的非稳定期短。由此推知, α 越接近1, 流体的粘弹性特征越明显。

2. 当 $R_c=0$ 时, 公式(2.12)给出牛顿流体结果, 与文[3]的结论同。

3. 切应力的表达式。

取切应力的无量纲形式为

$$F = \frac{\tau_{rz}}{\left[\frac{\partial p}{\partial z} \right] R} \quad (3.3)$$

则式(2.2)变为:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 1 + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{F}{x} \quad (3.4)$$

解之有

$$F = \frac{1}{x} \int_0^x \xi \left[-\frac{\partial}{\partial \tau} u(\xi, t) - 1 \right] d\xi \quad (3.5)$$

或

$$F = -\frac{1}{2}x + 2 \sum_{i=1}^{\infty} L^{-1} \left[\frac{1}{s + R_c \rho_i^2 s^\alpha + \rho_i^2} \right] \frac{J_1(\rho_i x)}{\rho_i^2 J_1(\rho_i)} \quad (3.6)$$

式中 $L^{-1}[\cdot]$ 表示Laplace反演。

由式(3.6)知:

当 $x=0$, 即管中心切应力为0, 当 $x=1$, 即管壁切应力为

$$F(1, t) = -\frac{1}{2} + 2 \sum_{i=1}^{\infty} L^{-1} \left[\frac{1}{s + R_c \rho_i^2 s^\alpha + \rho_i^2} \right] \frac{1}{\rho_i^2} \quad (3.7)$$

当 $R_c=0$, $\alpha=0$ 和1, 式(3.7)化成已有的形式^[3],

四、计算结果

由(2.18)式计算速度的时空分布,并用 $\alpha=0, \frac{1}{2}$ 和1的精确解对比(见图1),这是选定时间的管内速度分布,毫无疑问,它们具有非常好的一致性.对变化不大的函数的反演,Crump方法是相当可靠的.另外从图中可见,导数阶数 α 的量值对速度的影响比较明显.

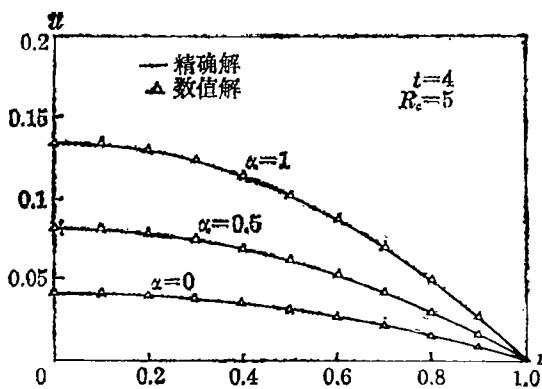


图1 精确解与数值反演解的对比

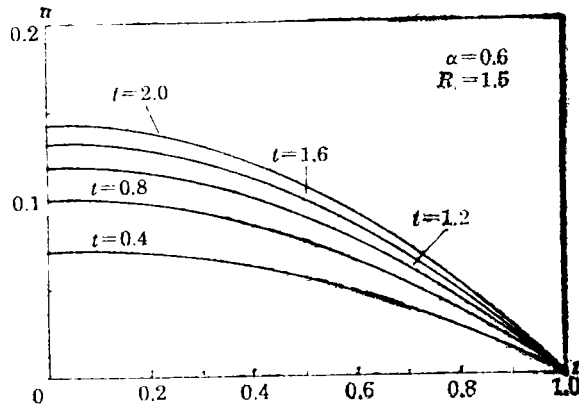


图2 不同时间的速度分布曲线

图2和图3是选定参数下的管内速度分布和变化曲线.从速度分布曲线图(图2)可看见随着时间延续,管中心速度舌进.从速度变化图(图3)可发现导数阶数 α 的影响作用,初始阶段, α 越小速度的变化率越大, α 的作用似乎在一个临界点发生逆转.

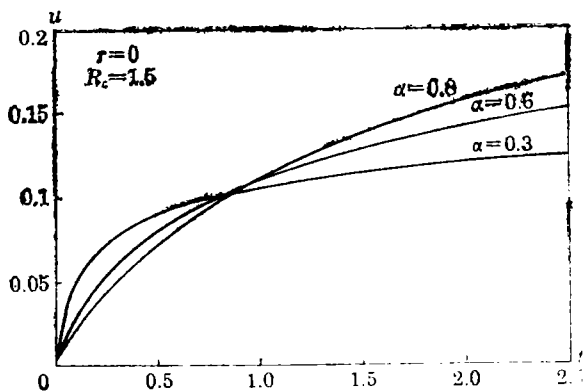


图3 不同 α 值的速度变化曲线

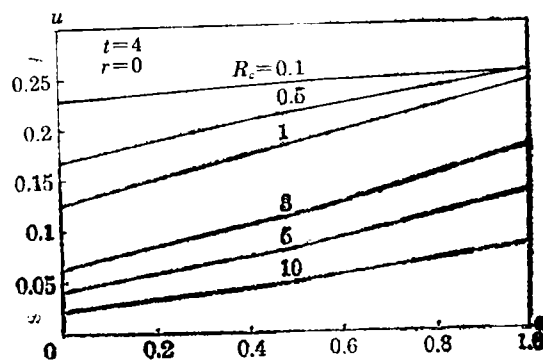


图4 管心处固定时间速度与 α 和 R_e 的关系

图4是几个 R_e 取值时速度随 α 的变化曲线, R_e 小时曲线向下凹, R_e 大时曲线向上凹,且斜率增大.这表明 R_e 越大,即粘弹性特征愈明显的流体,对导数阶数 α 越具有敏感性.这一点在本构关系的假设和构造中具有帮助性.另外,在文[3]的研究中告知, R_e 越小,流体速度趋近于稳态的时间越短.在图4上,明显看出,这一规律对广义二阶流体仍然再现.

图5和6是管壁上切应力变化曲线,这儿分别考察了 α 和 R_e 对切应力的影响作用.从式

(3.7)作定性分析,可知,当 $t \rightarrow \infty$ 时,不论 α 和 R_0 取何值,都有 $F(1,t) = -1/2$,故切应力是在0到 $-1/2$ 之间变化,图5和6的数据证实了这一点.比较图3和5,可以发现速度和应力对 α 的依赖性有差别.初始阶段, α 越小,速度变化越快,而应力则相反,变化越慢.这是广义本构关系所体现的特点,也证明它能描述材料的这种初期行为.当 R_0 改变时,应力的变化曲线(图6)与文[3]结论类似,其对 R_0 的依赖性与速度的相反.

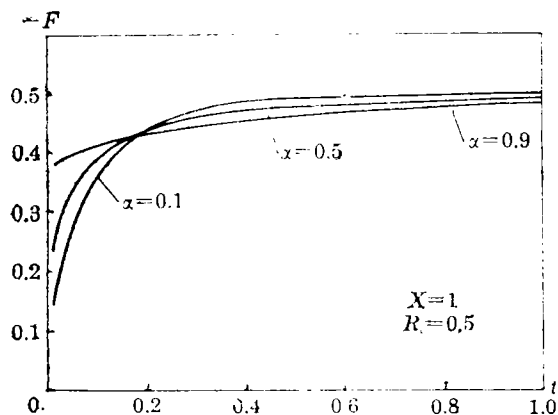


图5 管壁切应力变化曲线

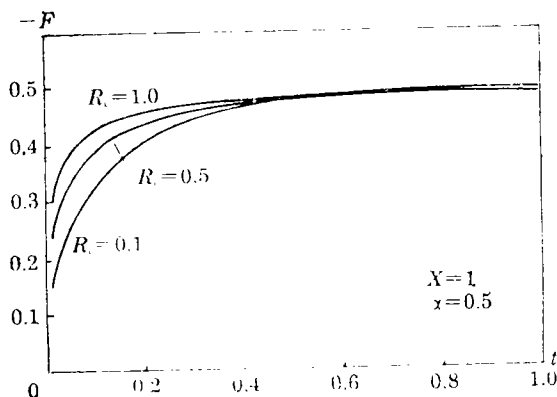


图6 管壁切应力变化曲线

五、结 论

1. 我们获得二阶流体本构关系中时间导数阶数 $\alpha = 1/2$ 时管流问题的解析解和任意分数阶的Laplace数值反演解。
2. 将用Laplace数值反演的Crump法获得的解与获得的精确解析解作对比,证实了Crump数值反演法对此类问题的适用性.基于此,我们用Crump法分析了二阶流体内流动特征。
3. 本构关系中,分数阶导数的阶数 α 对速度的影响非常明显,调节 α 可以反映速度初始阶段的变化性态。
4. 广义本构关系模型较线性关系更具有广泛的适应性,能更近似地描述不同材料的性能。
5. 本文给出的模型和分析方法可以在管道工程设计中应用,具有可靠性。

参 考 文 献

- [1] 韩式方,《非牛顿流体连续介质力学》,四川科学技术出版社(1987)。
- [2] 伍岳庆,非牛顿流体内非常流动研究,中国科学院成都分院,硕士论文,(1988)。
- [3] 刘慈群、黄军旗,非牛顿流体内不定常流的解析解,应用数学和力学,10(11)(1989)。
- [4] G. L. Slonimsky, Laws of mechanical relaxation processes in polymers, *J. Polym. Sci. C*, 16(1967), 1667—1672.
- [5] R. L. Bagley, A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity, *J. of Rheology*, 27(3)(1983), 201—210.

- [6] Lynn Rogers, Operators and fractional derivatives for viscoelastic constitutive equations, *J. of Rheology*, 27(4)(1983), 351—372.
- [7] Chr. Friedrich, Relaxation and retardation function of the Maxwell model with fractional derivatives, *Rheology Acta*, 30(1991), 151—159.
- [8] 李健、江体乾, 带分数导数的粘弹性流体本构方程的研究, 第四届全国多相流、非牛顿流、物理化学流学术会议, 西安石油学院出版社, (1993).
- [9] K. S. Crump, Numerical inversion of Laplace transforms using a Fourier series approximation, *J. Assoc. Comput. Mach.*, 23(1)(1976), 89—96.

General Second Order Fluid Flow in a Pipe

He Guangyu

(Department of Petroleum Engineering, Xi'an Petroleum Institute, Xi'an 710061)

Huang Junqi

(Department of Resources and Environmental Sciences, Beijing Normal University, Beijing 100875)

Liu Ciqun

(Institute of Porous Flow and Fluid Mechanics, Academia Langfang 102801)

Abstract

It is more satisfactory for fluid materials between viscous and elastic to introduce the fractional calculus approach into the constitutive relationship. This paper employs the fractional calculus approach to study second fluid flow in a pipe. At first, we derive the analytical solution whose derivative order is half with the analytical solution verifying the reliability of Laplace numerical inversion based on Crump algorithm for the problem, and then we analyze the characteristics of second order fluid flow in a pipe by using Crump method. The results indicate that the more obvious the viscoelastic properties of fluid is, the more sensitive the dependence of velocity and stress on fractional derivative order is.

Key words second order fluids, axial flow in a pipe, integral transformation