

# 分析结构跳跃问题的自适应参数 增量迭代方法\*

赵 琪

(上海市应用数学和力学研究所, 上海大学, 上海 200072)

叶天麒

(西北工业大学飞机工程系, 西安 710072)

## 摘 要

通过对 Riks 切线弧长法和 Crisfield 圆弧长法的综合及改进, 本文提出分析结构跳跃问题的自适应参数增量迭代方法, 并建立相应理论基础。最后文中给出中心分布压力作用下圆底扁球壳跳跃问题的数值结果, 以验证它的有效性。

**关键词** 结构跳跃问题 自适应参数 增量迭代方法

## 一、牛 顿 迭 代 方 法

假设结构非线性问题的离散型控制方程如下:

$$f_i(\mathbf{X}, p) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (1.1)$$

这里  $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$  表示结构广义变形参数向量,  $p$  表示载荷参数。

为了确定结构非线性响应上某点, 通常的做法是取载荷参数  $p$  或某一广义变形参数  $x_\alpha$  做控制参数, 即引入下列方程:

$$f_0 = p - \eta = 0$$

或 
$$f_0 = x_\alpha - \eta = 0$$

其中  $\eta$  是预先给定之值。

于是控制方程就可表示成如下形式:

$$f_\alpha(\mathbf{X}, \eta) = 0 \quad (\alpha=0, 1, 2, \dots, N) \quad (1.2)$$

这里为了表述方便, 记  $\mathbf{X} = [p, \mathbf{X}^T]^T$ 。

假如结构非线性响应曲线上某点之值  $\mathbf{X}_k = \mathbf{X}(\eta_k)$  及其斜率  $\dot{\mathbf{X}}_k = \frac{d}{d\eta} [\mathbf{X}(\eta_k)]$  已求出或已知, 现用下面表达式构造下一点  $\eta_{k+1}$  的初值并进行迭代修正:

$$\sigma_{k+1}^0 = \mathbf{X}_k + \Delta\eta_k \dot{\mathbf{X}}_k \quad (1.3)$$

$$\sigma_{k+1}^m = \sigma_{k+1}^{m-1} + [f_{\alpha'}(\sigma_{k+1}^{m-1})]^{-1} f(\sigma_{k+1}^{m-1}, \eta_k + \Delta\eta_k) \quad (1.4)$$

$(m=1, 2, \dots, M)$

这里  $\sigma_{k+1}^0$  表示迭代初值,  $\sigma_{k+1}^m$  表示第  $m$  次改善解,  $f = [f_0, f_1, \dots, f_N]^T \in R_{N+1}$  表示 (1.2) 式的

\* 赵兴华推荐, 1994年10月10日收到。

残值列阵. 如果当  $m=M$  时, 改善解  $\sigma_{k+1}^M$  满足下式:

$$|\sigma_{k+1}^M - \sigma_{k+1}^{M-1}| < \varepsilon$$

其中  $\varepsilon$  给出解精度. 则表明  $\sigma_{k+1}^M$  已充分逼近真解, 用  $X_{k+1}$  表示. 然后可采用下式计算  $\eta_{k+1}$  点处的斜率:

$$Z = [f_{\sigma, \beta}(X_{k+1})]^{-1} \delta \quad (1.5)$$

$$\dot{X}_{k+1} = Z / |Z| \quad (1.6)$$

其中  $\delta = [df_0/d\eta, 0]^T$ .

上述牛顿方法的有效性很大程度上取决以下三点:

(1) 牛顿方法用列  $[f_{\sigma, \beta}]$  的逆阵, 意味着 Jacobian 矩阵必须满足:

$$J = \det[f_{\sigma, \beta}] \neq 0$$

(2) 若  $J \neq 0$  应存在一个有限域  $|\sigma - X|^2 = \delta^2(X)$ , 如果迭代初值  $\sigma^0$  满足  $|\sigma^0 - X|^2 < \delta^2(X)$  就将导致迭代收敛.

(3) 牛顿方法具有二次收敛速度, 即  $|\sigma - X| = L|\sigma^0 - X|^2$ , 其中  $L$  是一个依赖于结构广义变形参数  $X(\eta)$  的正数.

## 二、自适应参数增量迭代方法

牛顿迭代方法由于构造简单、具有二次收敛速度, 因而在实际结构非线性问题求解中得到广泛应用. 但是牛顿迭代方法本身具有局限性, 首先, 它不易求解载荷参数  $x_0$  (或某一变形参数  $x_e$ ) 有增减情况的结构非线性问题; 其次, 当引入方程  $f_0=0$  所对应的线与结构响应曲线相切时, Jacobian 矩阵  $[f_{\sigma, \beta}]$  奇异, 导致牛顿法失效. 对载荷参数做控制参数而言, 即牛顿法无法计算临界点. 这些问题都是解决结构跳跃问题难以避免的困难, 因此如何选择简单直观、具有单调性质的控制参数, 及如何消除 Jacobian 矩阵的奇异性成为数值方法分析结构跳跃问题的关键.

针对上述困难, 国内外一些学者提出了许多策略和方法. 较为出色的是 Riks 切线弧长法<sup>[1][2]</sup>和 Crisfield 圆弧长法<sup>[3]</sup>, 两者共同之处都是以曲线弧长  $\eta$  做控制参数, 差异在于引入了不同的辅助方程:

$$(I) \quad f_0(X, \eta) = [\dot{X}(\eta_k)]^T [X(\eta) - X(\eta_k)] - (\eta - \eta_k) = 0$$

$$(II) \quad f_0(X, \eta) = [X(\eta) - X(\eta_k)]^T [X(\eta) - X(\eta_k)] - (\eta - \eta_k)^2 = 0$$

Riks 引入的辅助方程 (I) 是一多维面, 该面与曲线上已知点切线  $\dot{X}(\eta_k)$  正交, 与已知点距离为  $(\eta - \eta_k)$ . 只要迭代步长  $(\eta - \eta_k)$  足够小, 平面与曲线交点处的切线与该面法线之间夹角就可保持很小, 可减少迭代次数, 提高收敛速率; 同时防止产生平面与曲线相切的现象, 保证了 Jacobian 矩阵  $[f_{\sigma, \beta}]$  不出现奇异, 如图 1. 所示. Crisfield 引入的辅助方程 (II) 是一个以曲线上已知点  $X(\eta_k)$  为球心, 以  $(\eta - \eta_k)$  为半径的多维球, 如图 2. 所示, 该方法同理也具有上述特点.

上述两种方法在实际应用中表现出如下特点, Riks 方法引入的多维面与响应曲线一般情况下只有一个交点, 单值性好, 但是在计算结构跳跃问题时遇到多交点的情况, 经常导致计算远点的现象. Crisfield 方法改进了 Riks 方法, 通常不会遇到多交点的情况, 即不是出现计算远点的现象, 但是, 它所引入的多维球与曲线有两交点, 单值性不好, 经常出现

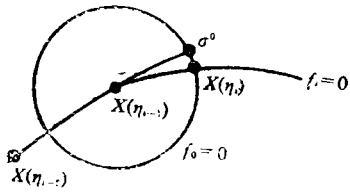


图 1

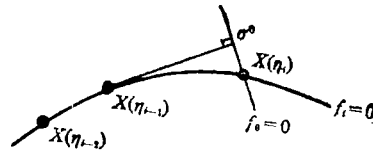


图 2

往回计算的现象。

为了克服往回计算的缺点并保持较好的单值性，本文对这两种方法进行了综合改进，引入了新的辅助方程：

$$f_0(X, \eta) = [X(\eta) - X^*]^T [X(\eta) - X^*] - \left(\frac{\eta - \eta_k}{2}\right)^2 = 0 \quad (2.1)$$

其中  $X^* = X(\eta_k) + \left(\frac{\eta - \eta_k}{2}\right) \dot{X}(\eta_k)$

如图 3 所示，所引入的辅助方程仍表示一个多维球，不同之处在于：该多维球通过已知点  $X(\eta_k)$ ，球心  $X^*$  在曲线已知点切线  $\dot{X}(\eta_k)$  上。本文方法保证了迭代收敛的单值性，因为通过 (1.3) 式构造的迭代初值  $\sigma_{k,1}^0$  总是满足下列关系：

$$|X(\eta_{k+1}) - \sigma_{k,1}^0| < |X(\eta_k) - \sigma_{k,1}^0| \quad (2.2)$$

(2.2) 式保证迭代不会收敛到已知点  $X(\eta_k)$ ，只能收敛到  $X(\eta_{k+1})$ 。

在 (2.1) 式中  $\dot{X}(\eta_k)$  表示对弧长  $s$  的导数，即  $\dot{X}(\eta_k) = \frac{d}{ds} X(\eta_k)$ ，因而满足下列关系：

$$[\dot{X}(\eta_k)]^T [\dot{X}(\eta_k)] = 1 \quad (2.3)$$

对 (2.1) 式除以  $\left(\frac{\eta - \eta_k}{2}\right)^2$ ，得到下式：

$$\left[2 \frac{X(\eta) - X(\eta_k)}{\eta - \eta_k} - \dot{X}(\eta_k)\right]^T \left[2 \frac{X(\eta) - X(\eta_k)}{\eta - \eta_k} - \dot{X}(\eta_k)\right] = 1$$

利用 (2.3) 式以及  $X(\eta) - X(\eta_k) \approx 0$ ，可以得到：

$$\frac{X(\eta) - X(\eta_k)}{\eta - \eta_k} = \frac{d}{ds} X(\eta_k) \quad (2.4)$$

上式表明当  $\eta \rightarrow \eta_k$  时  $(\eta - \eta_k) \rightarrow ds$ ， $\eta$  是曲线弧长  $s$  的近似值。说明本文方法也是以曲线弧长  $s$  做为控制参数的。

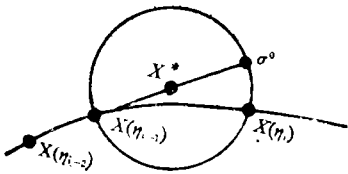


图 3

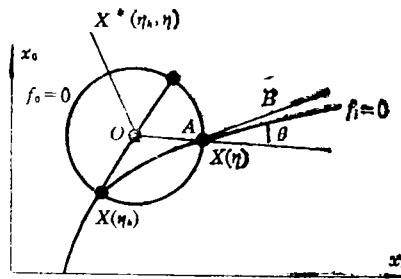


图 4

### 三、本文方法的合理性

本文方法实质是一种修正的牛顿迭代方法,因而它的有效性取决于两点,一是 Jacobian 矩阵  $[f_{\sigma, \rho}]$  的非奇异性,二是迭代初值  $\sigma^0$  逼近真解的程度.

第一点要求考虑到 Jacobian 矩阵的行列式  $J = \det[f_{\sigma, \rho}]$ , 按首行展开如下:

$$J = f_{0,0}D + f_{0,i}d_i = f_{0,a}d_a \quad (3.1)$$

这里  $d_a$  表示  $f_{0,a}$  对应的代数余子式,  $f_0$  是引入的辅助方程 (2.1), 于是有:

$$f_{0,a} = 2[x_a(\eta) - x_a^*(\eta, \eta_k)] \quad (3.2)$$

从中不难看出, 尽管求解  $X(\eta)$ ,  $\dot{X}(\eta)$ ,  $J(\eta)$  也依赖于前一点的状态  $X(\eta_k)$ ,  $\dot{X}(\eta_k)$ .

在进一步分析之前, 先推导一公式. 首先对控制方程 (1.1) 关于  $\eta$  求一阶导数:

$$\frac{d}{d\eta}[f_i(X, p)] = f_{i,j}\dot{x}_j + f_{i,p}\dot{p} = 0 \quad (3.3)$$

对 (3.3) 式两边同乘以  $\frac{\partial D}{\partial f_{j,i}} \cdot \delta_{kj}$ , 其中  $\delta_{kj}$  表示 Kronecker 函数. 并根据代数余子式  $d_i$

的表达式  $d_i = -\frac{\partial D}{\partial f_{j,i}} f_{j,0}$ , 得到下列等式:

$$D\dot{x}_i = d_i\dot{p}$$

$$\text{或} \quad d_0(\eta)\dot{x}_0(\eta) = d_a(\eta)\dot{x}_a(\eta) \quad (3.4)$$

(3.4) 式两边平方可得到下列等式:

$$d_0^2(\eta) = \dot{x}_0^2(\eta) \{d_a(\eta)d_a(\eta)\} \quad (3.5)$$

对 (3.1) 式两边同乘以  $\dot{x}_0(\eta)$  并利用 (3.4) 式得到下式:

$$d_0(\eta)\{f_{0,a}(\eta, \eta_k)\dot{x}_a(\eta)\} = \dot{x}_0(\eta)J(\eta) \quad (3.6)$$

最后由 (3.5) 式和 (3.6) 式得到:

$$J^2(\eta) = \{f_{0,a}(\eta, \eta_k)\dot{x}_a(\eta)\}^2 \{d_a(\eta)d_a(\eta)\} \quad (3.7)$$

从 (3.7) 式可以看出有两种可能性导致  $J(\eta)$  为零, 一是辅助多维球通过点  $X(\eta)$  的半径  $OA$  与该点曲线切线  $\dot{X}(\eta)$  的夹角  $\theta$  等于  $\pi/2$  的情况, 即辅助多维球与曲线相切时将导致  $J(\eta)$  为零. 这种情况基本不会发生, 取较小的步长将完全杜绝这种现象, 如图 4 所示. 二是  $d=0$  这正好是分支点的条件. 因此只要不试图计算分支点和只要步长  $\Delta\eta = \eta - \eta_k$  取得不是很大, 就能完全消除  $[f_{\sigma, \rho}]$  的奇异性.

第二点是关于迭代初值  $\sigma^0$  与真解  $X$  的远近程度, 若采用 (1.3) 构造迭代初值, 它必然满足:

$$|\sigma^0 - X| \leq \frac{1}{2} |X^{(2)}(\eta)| \Delta\eta^2 + |O(\Delta\eta^3)| \quad (3.8)$$

显然, 只要步长  $\Delta\eta$  取得足够小, 所构造的迭代初值可任意逼近真解.

### 四、确定临界状态

分析结构稳定性问题的首要任务就是确定临界状态. 在结构屈曲问题中, 临界状态是指分支点; 在结构跳跃问题中, 临界状态是指极值点及回跳点.

确定临界点的条件可以用控制方程(1.1)的 Jacobian 矩阵 $[f_{i,j}]$ 的最小特征值或其行列式值表征:

$$\omega\{\dot{X}(\eta)\}=0 \quad (4.1)$$

或  $D\{X(\eta)\}=0 \quad (4.2)$

极值点(或回跳点)和分支点的区别在于修正的控制方程(1.2)的 Jacobian 矩阵行列式值 $J=\det[f_{\alpha,\beta}]$ 仅在后者情况下为零值。

为表达方便,上述临界点条件统一用 $T(\eta)=0$ 表示。如何计算临界点?通常策略是采用插值方法。具体做法是沿着结构响应曲线逐点计算 $X(\eta_i)$ 及 $T(\eta_i)$ ,直到改变符号为止,对 $X(\eta)$ 及 $T(\eta)$ 分别构造插值多项式,通过 $T(\eta^*)=0$ 来确定临界点 $X(\eta^*)$ 。该方法的不足之处在于过少的已知点无法保证临界点的准确程度,过多已知点徒增不必要的计算量。为了克服上述方法的不足之处,本文采用如下方式计算临界点:

假设已计算出结构响应曲线上临界点前的一系列点:

$$X(\eta_1), X(\eta_2), \dots, X(\eta_i)$$

$$0 < \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_i$$

进一步假设 $X(\eta_i)$ 已接近临界点 $X(\eta^*)$ ,即满足下式:

$$|T(\eta_i)| < \varepsilon_1 |T(\eta_1)| \quad (4.3)$$

(4.3)式保证了 $T(\eta)$ ( $\eta \geq \eta_i$ )的单调性,于是可以将 $T(\eta)$ 在 $\eta_i$ 处按 Taylor 级数展开如下:

$$T(\eta) = T(\eta_i) + \dot{T}(\eta_i)(\eta - \eta_i) + \dots \quad (4.4)$$

根据临界点条件 $T(\eta^*)=0$ ,可以近似确定临界点的位置及迭代初值:

$$\Delta\eta^* = (\eta^* - \eta_i) = -\frac{T(\eta_i)}{\dot{T}(\eta_i)} \quad (4.5)$$

$$\sigma^* = X(\eta_i) + \Delta\eta^* \dot{X}(\eta_i) \quad (4.6)$$

若上述近似值不能令人满意,可以在更靠近临界点的位置上进行估计。为了保证下一点不越过临界点,可采用下式估计初值:

$$\sigma^0 = X(\eta_i) + \gamma \Delta\eta^* \dot{X}(\eta_i) \quad (0 < \gamma \leq 1) \quad (4.7)$$

这一过程就可以保证逐渐趋近临界点,如图5所示。

如果 $T(\eta_i)$ 或 $\Delta\eta^*$ 满足下式之一,说明该点就是临界点:

$$|T(\eta_i)| < \varepsilon_2 |T(\eta_1)| \quad (4.8)$$

$$|\Delta\eta^*| < \varepsilon_3 \Delta\eta_1 \quad (4.9)$$

这里 $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ 是给定之值。

在(4.5)式中,估计 $\Delta\eta^*$ 用到 $\dot{T}(\eta_i)$ ,无论选择 $\dot{\omega}$ 还是 $\dot{D}$ ,它们准确求解所需计算量和计算机存贮空间是非常大的,准确求解是得不偿失的,因此通常采用近似方法计算:

$$\dot{T}(\eta_i) \cong \frac{T(\eta_i) - T(\eta_{i-1})}{\eta_i - \eta_{i-1}} \quad (4.10)$$

关于最小特征值 $\omega$ 的计算,可参阅有关文献,这里不再赘述。本文在此着重阐述关于 $D$ 的计算,在求解方程(1.4)过程中,可以方便地附带求出 $J=\det[f_{\alpha,\beta}]$ ,因而可以采用下式求解 $D$ 值:

$$D(\eta_i) = \dot{x}_0(\eta_i) J(\eta_i) \{f_{0,\alpha}(\eta_i, \eta_{i-1}) \dot{x}_\alpha(\eta_i)\}^{-1} \quad (4.11)$$

(4.11)式具体推导见(3.6)式。

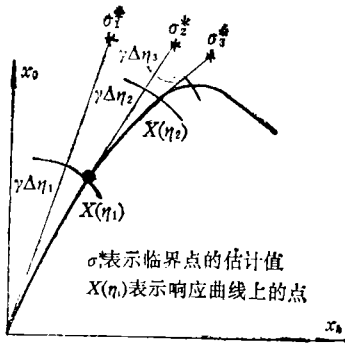


图 5

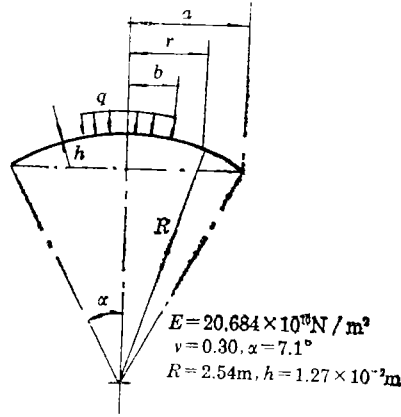


图 6

### 五、算例及结论

本文分析了中心分布压力作用下圆底扁球壳跳跃问题。图 6 给出圆底扁球壳的材料性质和几何特征。采用包含薄膜力  $N_r$  和挠度  $w$  的混合形式控制方程,利用  $B$  样条函数和 Galerkin 方法构造代数控制方程  $f_i = 0$ , 具体形式及推导参见文[4]。在计算过程中,采用下列迭代收敛准则:

$$\delta = \max_i \{ |\sigma_i^{(k+1)} - \sigma_i^{(k)}| \} < \varepsilon = 10^{-4}$$

采用 (4.2) 做为极值点和回跳点的条件, 其中  $\varepsilon_1 = 10^{-2}$ ,  $\varepsilon_2 = 10^{-6}$ ,  $\nu = 0.8$ 。

图 7, 图 8, 图 9 分别给出简单铰支、固定夹紧、可移夹紧三种边界情况下均布压力作用下的几何参数  $K = \sqrt{\frac{12(1-\nu^2)}{Rh}} \frac{a^2}{h}$  取不同值时的圆底扁球壳跳跃曲线; 图 10 给出简单铰支情况下几何参数  $K = 3$  时取不同的载荷作用半径  $R_r = b/a$  的圆底扁球壳跳跃曲线。

计算结果表明本文方法构造简单, 收敛速度快, 能完全克服 Riks 切线弧长法和 Crisfield 圆弧长法的计算远点及往回计算的不足之处, 保证迭代收敛解的单值性, 是分析复杂结构非线性响应的有效数值迭代方法。

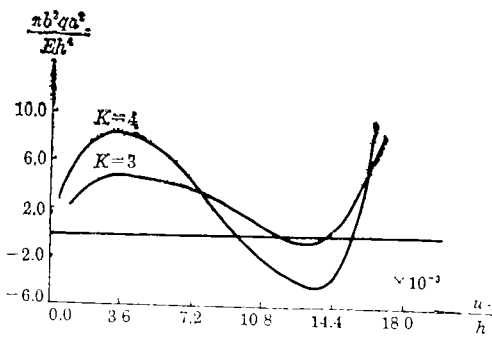


图 7 简单铰支不同  $K$  值的壳中心挠度与载荷的关系

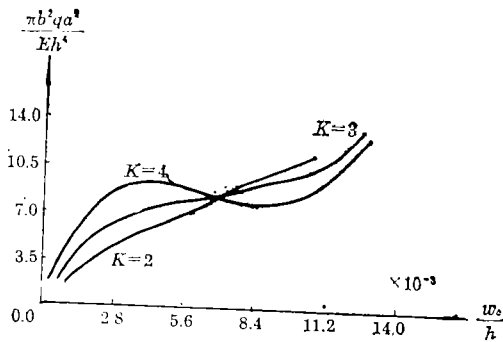


图 8 固定夹紧不同  $K$  值的壳中心挠度与载荷关系

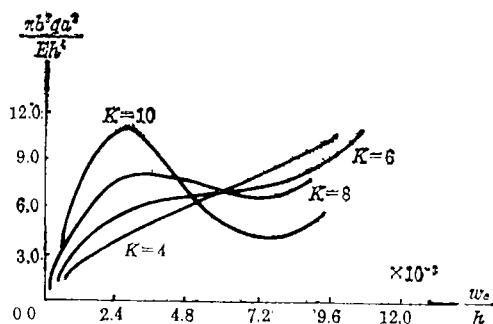


图9 可移夹紧不同 $K$ 值的壳中心挠度与载荷的关系

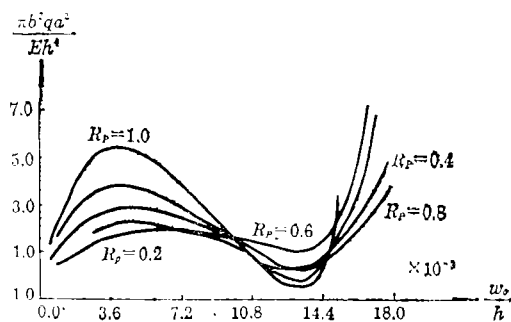


图10 简单铰支不同 $R_p$ 值的壳中心挠度与载荷的关系

### 参 考 文 献

- [1] E. Riks, An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems, *Int. J. Solids Structures*, 5(1979), 529—551.
- [2] E. Riks, Some computational aspects of the stability analysis of nonlinear structures, *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrgt.*, 47(1984), 219—259.
- [3] M. A. Crisfield, A fast incremental iterative solution procedure that handles "snapthrough", *Computers and Structures*, 13(1981), 55—62.
- [4] Zhao Qi and Yeh T. Q., The large deflection of spherical caps under centrally distributed pressures, 7th Brazilian Symposium on Piping and Pressure Vessels Florianopolis, 07—09 De Outubro De (1992).

## The Adaptive Parameter Incremental Method for The Analysis of Snapping Problems

Zhao Qi

(Shanghai Inst. of Appl. Math. & Mech., Shanghai  
University of Technology, Shanghai 20072)

Ye Tianqi

(Aircraft Engineering Dept., Northwestern  
Polytechnical University, Xian 710072)

### Abstract

By improvement of Riks' and Crisfield's arc-length type method, the adaptive parameter incremental method is presented for predicting the snapping response of structures. Its justification is fulfilled. Finally, the effectiveness of this method is demonstrated by solving the snapping response of spherical caps subjected to centrally distributed pressures.

**Key words** snapping problems, adaptive parameter, incremental method