应用数学和力学，第16卷 第9期（1995 年 9 月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

一维广义Ginzburg-Landau方程的指数吸引子

高 洪 俊

（北京应用物理与计算数学研究所，北京 100088）

（李骊推荐，1994年6月18日收到）

摘 要

本文在[1]的基础上，得到了一维广义Ginzburg-Landau方程的指数吸引子的存在性。

关键词 广义Ginzburg-Landau方程 压榨性 指数吸引子

一、引 言

在[1]中，我们考虑了如下方程

$$u_t+\nu u_x=\chi u+(\gamma_r+i\gamma_i)u_{xx}-(\beta_r+i\beta_i)|u|^2u$$
$$-(\delta_r+i\delta_i)|u|^4u-(\lambda_r+i\lambda_i)|u|^2u_x-(\mu_r+i\mu_i)u^2\bar{u}_x \qquad (\chi\in R^1,\ t>0) \tag{1.1}$$

这里 γ_r,δ_r为正常数，$\nu,\chi,\gamma_i,\beta_r,\beta_i,\delta_i,\lambda_r,\lambda_i,\mu_r,\mu_i$为实常数。这个方程是H. R. Rrand和R. J. Deissler在[2]提出来的，它是流体力学中得到的通常Ginzburg-Landau方程的推广形式，它的详细推导见[3]。

我们考虑(1.1)具有周期边界条件：

$$u(x,t)=u(x+L,t) \qquad (x\in R^1,t\geqslant 0) \tag{1.2}$$

这里L是正周期，初值条件为：

$$u(x,0)=u_0(x) \qquad (x\in R^1) \tag{1.3}$$

在[1]中，我们得到了问题(2.1)～(2.3)的解，当

$$\gamma_r>0,\ \delta_r>0,\ 4\delta_r\gamma_r>(\lambda_i-\mu_i)^2 \tag{*}$$

时，在$V_1=H^1_{per}[0,L]$中整体存在唯一并在V_1中存在有限维整体吸引子。

谱裂口条件是证明惯性流形的存在性所必需的，由于方程(1.1)中非线性导数项的出现，根据[4]的结果知此时如谱裂口条件成立，则必需L适当小或γ_r充分大，这在[5]中给出了详细的讨论。在[5]中我们给出了$\gamma_i=0$，$\lambda_r=2\mu_r$，$\lambda_i=2\mu_i$时的惯性形式的存在性，此时还需条件(*)和$\gamma_r>2\sqrt{\mu_r^2+\mu_i^2}$。本文的目的是在条件(*)下证明问题(1.1)～(1.3)在V_1中的指数吸引子的存在性。指数收引子是介于吸引子和惯性流形之间的概念，它包含吸引子，指数吸引所有有界轨道；它不象惯性流形那样具有光滑性，它是一有限维分形。它的存在不需要谱裂口条件——而这是惯性流形存在的必要条件，这就是说指数吸引子是放松了惯性流形的存在性条件的更一般的概念。

二、指数吸引子和压榨性

首先，我们引进一些记号．

$$H=L^2_{per}[0,L]=\{u\in L^2[0,L],\ u(x+L)=u(x)\}$$

$$V_1=H^1_{per}[0,L]=\{u:u\in H,u_x\in H\}$$

这里$(\cdot,\ \cdot)$，$|\cdot|_0$分别表示H中的内积和范数，V_1中的范数定义为：

$$|u|^2_{V_1}=|u|^2_0+|u_x|^2_0$$

设$\mathscr{H}$为一可分的Hilbert空间，B为$\mathscr{H}$中的紧子集．设$\{S(t)\}_{t\geqslant0}$为$\mathscr{H}$上的非线性半群．B关于$S(t)$是不变的．$\mathscr{A}=\bigcap\limits_{t\geqslant0}S(t)B$是$\{S(t)\}_{t\geqslant0}$在$B$上的整体吸引子．

定义2.1 集$\mathscr{M}$称为$(\{S(t)\}_{t\geqslant0},B)$的指数吸引子，如果(i) $\mathscr{A}\subseteq\mathscr{M}\subseteq B$；(ii) $S(t)\mathscr{M}\subseteq\mathscr{M}$，对任何$t\geqslant0$；(iii)对任意$u_0\in B$，$\mathrm{dist}_{\mathscr{H}}(S(t)u_0,\mathscr{M})\leqslant c_1\exp(-c_2t)$，$\forall t\geqslant0$，这里$c_1$，$c_2$为$u_0$，$t$无关的正常数；(iv)$\mathscr{M}$具有有限维分形维数．

定义2.1见[6]，由[6]可知，指数吸引子存在的充分条件是压榨性 (Squeezing property)，即

定义2.2 一连续半群$\{S(t)\}_{t\geqslant0}$在B上是满足压榨性的，如果存在$t_*>0$使得$S_*=S(t_*)$满足：存在一秩为N_0的正交投影P使得对任意$u,v\in B$，如

$$|P(S_*u-S_*v)_{\mathscr{H}}\leqslant|(I-P)(S_*u-S_*v)|_{\mathscr{H}}$$

则

$$|S_*u-\delta_*v|_{\mathscr{H}}\leqslant\frac{1}{8}|u-v|_{\mathscr{H}}$$

定理2.1([6]) 如果$(\{S(t)\}_{t\geqslant0},B)$在$B$上满足压榨性，且如果$S_*=S(t_*)$在$B$上满足Lipschitz常数为$\mathcal{L}$的Lipschitz连续性，则$(\{S(t)\}_{t\geqslant0},B)$存在一指数吸引子$\mathscr{M}$使得

$$d_F(\mathscr{M})\leqslant N_0\max\left\{1,\frac{\ln(16\mathcal{L}+1)}{\ln2}\right\}$$

和

$$\mathrm{dist}_{\mathscr{H}}(S(t)u_0,\mathscr{M})\leqslant c_1\exp\left\{-\frac{c_2}{t_*}t\right\}$$

$\forall u_0\in B$，$t\geqslant0$，c_1，c_2为与t，u_0无关的常数．

显然，下面我们只要证由(1.1)～(1.3)确定的非线性半群满足定义2.2和Lipschitz连续性，即确定t_*和秩为N_0的正交投影P．

三、(1.1)～(1.3)的指数吸引子

现在我们取$\mathscr{H}=V_1=H^1_{per}[0,L]$，$B$选取如下，首先我们取

$$B_0=\{u\in H^1_{per}[0,L],\ |u|_0\leqslant2\rho_0,|u|_1\leqslant2\rho_1\}$$

这里 ρ_0,ρ_1是仅与方程的系数和L有关的常数．如$u_0\in B_0$．由Sobolev嵌入定理有$|u|_{L^\infty}\leqslant\rho$．由[1]和[5]可知$B_0$是$S(t)$在$V_1$中的吸收集，且存在$T_1>0$，有$|u(t)|_2\leqslant2\rho_2$，当$t\geqslant T_1$时，这里$|.|_2$表示$H^2_{per}[0,L]$中的范数，$\rho_2$仅与$\rho_1,\rho_2$无关，由Sobolev嵌入定理，我们有$|u|_{W^{1,\infty}}\leqslant\rho_3$．关于$|u(t)|_2\leqslant2\rho_2$的证明见[5]．令

$$B=\bigcup_{t\geqslant T_1}S(t)B_0$$

则B是V_1中的紧子集，且在$S(t)$的作用之下是不变的．设$\{\lambda_n\}_{n\in N}$表示$-\partial_{xx}$具有周期边界条件的特征值序列，$\{w_n\}_{n\in N}$为对应于$\{\lambda_n\}_{n\in N}$的特征函数序列．令

$$H_N=\mathrm{span}\{w_1,\cdots,w_N\}$$

则我们可定义

$P_N:H\to H_N$　为H到H_N上的正交投影．

$Q_N=I-P_N$

注意P_N,Q_N是H和V_1上的正交投影，容易得到

$$|u|_0^2\leqslant\frac{1}{\lambda_{N_H}}|u|_1^2\qquad(\forall u\in Q_NV_1)\tag{3.1}$$

我们的目的是通过上述正交投影来证明定义2.2所定义的压榨性；一旦t_*和N_0确定了，指数吸引子$\mathscr{M}$的存在性可由定理2.1得到，同时$\mathscr{M}$的分形维数和$\mathscr{M}$的指数收敛率就可以估计出来．

我们首先给出(1.1)的两解之差的估计．不失一般性，我们令$\chi=\nu=0$，设u，v为(1.1)对应于初值u_0，v_0的两个解，则由[1]知

$$u,v\in C([0,\infty);V_1)\cap C^1((0,\infty);V_1)\cap C((0,\infty);H^k_{per}[0,L]))\qquad(\forall n\geqslant 2)$$

令$w=u-v$，则w满足

$$\begin{aligned}\partial_t w=&(\gamma_r+i\gamma_i)w_{xx}-(\beta_r+i\beta_i)(2|v|^2w+u^2\bar{w}+uw\bar{v})\\&-(\delta_r+i\delta_i)(|u|^4w+2|u|^2u^2\bar{w}+|v|^2u^2\bar{w}+|u|^2uw\bar{v}+|v|^2uw\bar{v})\\&-(\lambda_r+i\lambda_i)(|v|^2w_x+w\bar{v}u_x+\bar{w}uu_x)-(\mu_r+i\mu_i)(v^2\bar{w}_x+(u+v)\bar{u}_xw)\end{aligned}\tag{3.2}$$

$$w(x,t)=w(x+L,t)\qquad(x\in R^1,\ t\geqslant 0)\tag{3.3}$$

$$w(x,0)=w_0(t);\quad(x\in R^1)\tag{3.4}$$

取(1.3)与w的内积的实部得：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|_0^2+\gamma_r|w_x|_0^2=&-\beta_r\int_0^L|u|^2|w|^2dx\\&-\mathrm{Re}\Big((\beta_r+i\beta_i)\int_0^L(u^2\bar{w}^2+|w|^2u\bar{v})dx\Big)-\delta_r\int_0^L|v|^4|w|dx\\&-\mathrm{Re}\Big((\delta_r+i\delta_i)\int_0^L(|u|^2u^2\bar{w}^2+|v|^2u^2\bar{w}^2+|u|^2u\bar{v}|w|^2+|v|^2u\bar{v}|w|^2)dx\Big)\\&-\mathrm{Re}\Big((\lambda_r+i\lambda_i)\int_0^L(|v|^2\bar{w}w_x+uu_x\bar{w}^2+\bar{v}u_x|w|^2)dx\Big)\\&-\mathrm{Re}\Big((\mu_r+i\mu_i)\int_0^L(v^2\bar{w}_x\bar{w}+\bar{u}_x(u+v)|w|^2)dx\Big)\end{aligned}$$

由$u_0,v_0\in B$，由B的不变性，我们知$u,v\in B$，则

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|_0^2+\gamma_r|w_x|_0^2\leqslant&|\beta_r|\rho^2|w|_0^2+2\sqrt{\beta_r^2+\beta_i^2}\,\rho^2|w|_0^2\\&+4\sqrt{\delta_r^2+\delta_i^2}\,\rho^4|w|_0^2+\left(\sqrt{\lambda_r^2+\lambda_i^2}+\sqrt{\mu_r^2+\mu_i^2}\right)\left(\int_0^L|w_x||w|dx+2\rho\rho_3|w|_0^2\right)\end{aligned}$$

利用Young不等式，我们有

$$\frac{d}{dt}|w|_0^2+\gamma_r|w_x|_0^2\leqslant M_0|w|_0^2\tag{3.5}$$

这里

$$M_0=2\left(|\beta_r|\rho^2+2\rho^2\sqrt{\beta_r^2+\beta_i^2}+4\rho^4\sqrt{\delta_r^2+\delta_i^2}+2\rho\rho_3\left(\sqrt{\lambda_r^2+\lambda_i^2}+\sqrt{\mu_r^2+\mu_i^2}\right)+\frac{\rho^4}{\gamma_r}(\lambda_r^2+\lambda_i^2+\mu_r^2+\mu_i^2)\right)$$

则 $$\frac{d}{dt}|w|_0^2\leqslant M_0|w|_0^2.$$

同理(1.3)与$-w_{xx}$作内积取实部并进行类似的计算得(M_1仅依赖于方程的系数和L)：

$$\frac{d}{dt}|w_x|_0^2\leqslant M_1(|w_x|_0^2+|w|_0^2),$$

所以

$$\frac{d}{dt}(|w|_0^2+|w_x|_0^2)\leqslant(M_0+M_1)(|w|_0^2+|w_x|_0^2),$$

$$|w|_{V_1}^2=|w|_1^2\leqslant\exp[(M_0+M_1)t]|w(0)|_1^2 \tag{3.6}$$

将Q_N作用到(3.2)的两边，令$\varphi=Q_Nw$，则

$$\varphi_t-(\gamma_r+i\gamma_i)\varphi_{xx}=Q_N(F(u)-F(v)) \tag{3.7}$$

这里$F(u)$为(1.3)的右端减去$(\gamma_r+i\gamma_i)u_{xx}$.

(3.7)的两边与φ作内积取实部，类似于(3.5)的计算得：

$$\frac{d}{dt}|\varphi|_0^2+\gamma_r|\varphi|_1^2\leqslant(M_0+\gamma_r)|\varphi|_0^2\leqslant\frac{M_0+\gamma_r}{\lambda_{N+1}}|w|_1^2.$$

同理

$$\frac{d}{dt}|\varphi_x|_0^2+\gamma_r|\varphi_x|_1^2\leqslant(M_1+\gamma_r)|\varphi_x|_0^2+M_1|\varphi|_0^2$$

因为

$$|\varphi_x|_0^2\leqslant\frac{1}{\lambda_{N+1}}|\varphi_x|_1^2$$

且当$N\to+\infty$时$\lambda_{N+1}\to+\infty$，所以我们可以选择$\bar N_0$使得当$N\geqslant\bar N_0$时

$$\gamma_r\lambda_{N+1}\geqslant M_1+\gamma_r,$$

所以

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}|\varphi_x|_0^2\leqslant M_1|\varphi|_0^2\leqslant\frac{M_1}{\lambda_{N+1}}|w|_1^2\\&\frac{d}{dt}|\varphi|_1^2+\gamma_r|\varphi|_1^2\leqslant\frac{1}{\lambda_{N+1}}(M_0+M_1+\gamma_r)|w|_1^2\end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

如果我们给出t_*和N_0，使得如果

$$|P_{N_0}w(t_*)|_1\leqslant|Q_{N_0}w(t_*)|_1$$

满足，则

$$|w(t_*)|_1\leqslant\frac{1}{6}|w(0)|_1$$

是正确的话，这样我们就完成了证明.

结果(3.6)和(3.8)我们有

$$\frac{d}{dt}|\varphi|_1^2+\gamma_r|\varphi|_1^2\leqslant\frac{1}{\lambda_{N+1}}(M_0+M_1+\gamma_r)|w|_1^2$$

$$\leqslant\frac{1}{\lambda_{N+1}}(M_0+M_1+\gamma_r)\exp[(M_0+M_1)t]|w(0)|_1^2$$

积分上述不等式，我们得到

$$|\varphi|_1^2 \leqslant \exp[-\gamma_r t)|\varphi(0)|_1^2+\frac{1}{\lambda_{N+1}}(\exp[(M_0+M_1)t]-\exp[-\gamma_r t])|w(0)|_1^2$$

$$\leqslant \exp[-\gamma_r t]|\varphi(0)|_1^2+\frac{1}{\lambda_{N+1}}\exp[(M_0+M_1)t]|w(0)|_1^2,$$

即

$$|Q_N w(t)|_1^2 \leqslant \exp[-\gamma_r t]|w(0)|_1^2+\frac{1}{\lambda_{N+1}}\exp[(M_0+M_1)t]|w(0)|_1^2 \tag{3.9}$$

我们首先选择t_*使用

$$\exp[-\gamma_r t_*]=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^2,$$

然后选择N_1充分大，使得:

$$\frac{1}{\lambda_{N+1}}\exp[(M_0+M_1)t_*]\leqslant\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^2$$

我们假定 $|P_{N_1}w(t_*)|_1^2\leqslant|Q_{N_1}w(t_*)|_1^2$，则

$$|w(t_*)|_1^2=|P_{N_1}w(t_*)|_1^2+|Q_{N_1}w(t_*)|_1^2\leqslant 2|Q_{N_1}w(t_*)|_1^2$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{8}\right)^2|w(0)|_1^2$$

因此，取 $N_0=\max(\bar{N}_0,N_1)$，$t_*=\frac{8}{\gamma_r}\ln 2$，$L=\frac{\lambda_{N_0}+1}{512}$，则定理2.1的条件全部满足，我们得到:

定理3.1 存在 $t_*=\frac{8}{\gamma_r}\ln 2$，$N_0$充分大，使得:

$$\lambda_{N_0+1}\geqslant\max\left(512\exp[(M_0+M_1)t_*].1+\frac{M_1}{\gamma_r}\right)$$

则$S(t)$(由(1.1)～(1.3)确定的半群)在B上满足压榨性，且$S_*=S(t_*)$在B上满足Lipschitz常数为L的Lipschitz连续性，由定理2.1有$(\{S(t)\}_{t\geqslant 0},B)$存在一指数吸引子$\mathscr{M}$，使得

$$d_F(\mathscr{M})\leqslant N_0\max\{1,\ln(16L+1)/\ln 2\}$$

和

$$\mathrm{dist}_{V_1}(S(t)u_0,\mathscr{M})\leqslant c_1\exp\left\{\left(-\frac{c_2}{t_*}\right)t\right\}$$

$\forall u_0\in B$，c_1，c_2是与u_0，t无关的正常数，$d_F(\mathscr{M})$为$\mathscr{M}$的分形维数。

参 考 文 献

[1] 郭柏灵、高洪俊，广义 Ginzburg-Landau 方程的有限维行为，《自然科学进展》，4(1994)，423—434。

[2] H. R. Brand and R. J. Deissler, Interaction of localized for Subcritical bifurcation, *Phys. Rev. Lett.*, 63(1989), 2801—4.

[3] A. Doeman, On the nonlinear evolution of pattern (modulation equations and their solutions) *Ph. D. Thesis*, *University of Utrech*, the Netherlands, (1990).

[4] R. Temam, *Infinite Dimensional System in Mechanics and Physics*, Berlin Springer(1988).

[5] 高洪俊，广义 Girzburg-Landan 方程解的长时间行为和正则性，中国工程物理研究院博士论

文(1994).
[6] A. Eden, C. Foias, B. Nicolaenko and R. Temam, Inertial sets for dissipative evolution equations, Part I: Construction and Applications, *IMA Preprint Series* 812, University Minnesota, (1991).

Exponential Attractors for a Generalized Ginzburg-Landau Equation

Gao Hongjun

(*Center of Nonlinear Studies Inst. Appl. Phys. Comp. Math.*, *Beijing* 100088)

Abstract

Based on the paper 1, we obtain the existence of exponential attractors for a generalized Ginzburg-Landau equation in one dimension.

Key words generalized Ginzburg-Landau equation, squeezing property, exponential attractor