应用数学和力学，第16卷 第 8 期（1995年 8 月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

论演化方程的结构*

J.巴德　　孙博华

（德国 波鸿大学力学所，1994年8月16日收到）

摘　　要

本文对演化方程进行了讨论，从而能够唯象地描述微观结构行为，如Maxwell气体的部分可逆流动、恢复性、结构松弛以及从光散射和分子动力学得到的其它实验结果。讨论所得结果涉及Zaremba补充式(ansatz)的重新评价，可用来解决输运方程中具有显著非线性的问题。

关键词　演化方程　唯象描述　微观结构方程　Zaremba 补充式

一、引　　言

无法用线性不可逆热力学严格描述的物理现象很多，勿庸置疑，Maxwell 气体中松弛行为的热力学是其中之一。

耗散现象，例如气体及其混合物中的热传导、物质扩散、流体中的内摩擦等，更多地被当作一种广义的内部运输的特殊情形。有时把热传导称为热能的扩散，类似地流体粘性是线动量的扩散，湍流是角动量的扩散。鉴于这种观点，或许可在宏观上把塑性流动当作准动量扩散现象，而把Lagrange湍流当作准角动量扩散现象。

通常经典场论给我们提供了很大范围的一类数学模型，这些模型可以自然地分成两种截然相反的类别。纯耗散现象，如热流、质量扩散，属于第一类；相反地纯可恢复现象，如瞬时弹性，属于第二类。广义热力学的主要课题就是构造各种中间数学模型，这些模型对于可逆—耗散现象的完全描述很多是预先确定的，并且在现实中不断被找到。

然而在经典唯象演化方程的框架中，象Fourier方程和Navier-Stokes方程，把质量、动量和热能的集中作为具有无穷大速度的信号扩散来处理。为了消除经典演化方程的弱点，即仅作为一种近似处理，可以用更合适的方程（见 Müller [11,14]）来描述在热力学的力作用下可逆—耗散介质的响应。为此，抛物型控制方程被换成了双曲型方程。

广义演化方程最为惯用的途径之一就是仅考虑与松弛有关的那一部分现象。根据经典唯象关系式（例如 Fourier），如果热流与热力成正比，那么该理论描述了被热力运输的有效能的耗散。这就意味着 Fourier 型扩散属于完全耗散现象，因此是完全可逆现象（例如弹性）的对偶部分。根据广义热力学，热力的作用依赖于两个因素。第一个因素是耗散流的净产率，第二个因素则是描述其产率强度的变化，而且第二个因素在所谓的松弛时间这一短暂

* 德国洪堡基金和德国科学基金会资助课题。

陈至达推荐。

时期中起作用。所以热力有效能仅部分耗散，而有部分却累积起来产生内部动力和通常附加给自由能的附加可恢复能量[1,4,7,11,12]。为与旧术语保持一致，我们把这两种力的作用 分 别称为“强制力”和“惯性力”(Natanson[16])。

广义热力学的数学结构从 Poisson 和 Maxwell 建立气体运动方程起已经成熟[1,14,15]。一般认为广义热力学的建立除此之外，开始于严格地利用或不利用Boltzmann方程的“数学结构” 的工作。这样却变成了热流的唯象描述，而确定热声子的运动理论与连续介质变形的严格形式之间的直接关系却存在很大困难。例如，即使把新的位错的运动当作孤气的流动，然而与真实气体中的这种运动相比，物理状态仍然非常复杂。主要原因在于真实气体的运动占据容器中空的空间，而热声子的运动发生在形变的晶体介质中[6,7,17,19]。

因此，直接把广义热力学的数值成果应用于另一领域，如热弹性，存在两个障碍。第一个障碍自然是还没有一个令人满意的描述与可变形连续介质相互作用的由“广义粒子”组成的气体的运动理论，第二个更为严重的障碍是缺少描述热流的严格的理论框架[5,6]。如果我们认为广义热力学的方程仅利用空间描述就能完全导得，由于浸没于固体连续介质中的“广义目标”的描述通常要求得更多，那么一致的Euler方法就被破坏了。这主要与作用于上述粒子和作为一类所谓驱动力的结构力的Lagrange特征有关。根据最近 Maugin和Trimarco的结果[10]，仅仅基于空间描述的观点，似乎不可能构 占“与可变形晶体相互作用的位错的气体运动理论”，而且这个问题本身导致了连续介质力学的一个最困难的课题[17,21,22]。

平衡方程的数学结构在过去20年中已得到充分的研究（见文 献 [1,15]），在这方面新的有待发掘的实用价值很少。然而当我们不是导出任何新的方程，而是旨在说明已知的方程，所加的评论或许并不是没有意义。我们的评论主要涉及Zaremba的补充式的一个重新解释。本文采取推理Euclid-Leibnitz-Berkeley协变量通常所产生的结果这样一个思路。

二、输运方程的一般形式

假设Maxwell气体的每个运动分子的位置与三个固定正交坐标轴($\mathbf{x}=x_i\mathbf{e}_i$, $i=1,2,3$)的Euler实验构架有关，另外还假设任一分子的速度可分解为平均速度$\mathbf{u}$和脉动速度 $\mathscr{C}=\xi\mathbf{e}_1+\eta\mathbf{e}_2+\zeta\mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{c}(\mathbf{x},t)=\mathbf{u}+\mathscr{C}=(u+\xi)\mathbf{e}_1+(v+\eta)\mathbf{e}_2+(w+\zeta)\mathbf{e}_3 \tag{2.1}$$

输运方程描述单位时间通过一单位面积给定平面的分子迁移，它必须确定在单位时间内从该平面负面到正面所迁移的质量、动量、热量等。

根据Maxwell,我们常常把这个平面设想成具有单位面积、垂直于$\mathbf{e}_1$轴且以速度 $\mathbf{u}'=u'\mathbf{e}_1$运动的平面。现在我们扩充这一概念，不是想象成一个单位平面，而是具有充分光滑的边界∂V_r且以任意速度$\mathbf{u}'=\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)$运动的三维参考区域$V_r$。一般地讲，$V_r$参考域也可能包括一些参考面和参考线，所以对穿过物质而与场一起迁移的任何量的平衡很有用。这一概念也意味着V_r中的点具有抽象性，而且仅当$\mathbf{u}'\equiv\mathbf{u}$以及参考域变成物质域$V_s$时，$V_r$中的点才可以看作物质的分子。

V_r依赖于所选定的 $\mathbf{u}'$ 场的性质，可以经历局部的变形，如伸长、膨胀、刚体位移等，特别是局部速度$\mathbf{u}'$的速度梯度可以按加法分解为：

$$\mathbf{l}'=\mathrm{grad}\,\mathbf{u}'=u'_{i,j}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j=(\mathrm{grad}\,\mathbf{u}')_{\mathrm{sym}}+(\mathrm{grad}\,\mathbf{u}')_{\mathrm{antys}}=\mathbf{d}'+\mathbf{w}' \tag{2.2}$$

根据许多物理事件的现象，在物质中储藏的量$N\bar{\mathbf{Q}}$的变化，等于在参考域中所产生的$N\bar{\mathbf{Q}}$

加上在V_r与周围环境间通过边界∂V_r所传输的$N\overline{\mathbf{Q}}$。当参考域V_r运动时，边界∂V_r的运动通过吸收捕获效应对$N\overline{\mathbf{Q}}$的流量产生附加的贡献。即使我们考虑当参考域V_r和物质域V_s重合时的特殊情形，物质域V_s以平均速度$\mathbf{u}$运动，我们也不能肯定V_s总是包含相同的分子，因为分子在不断地穿过∂V_s。所以，属于分子的任何量$\mathbf{Q}$，如质量(m)，线动量$(m\mathbf{c})$，应力$(m\mathbf{c}\otimes\mathbf{c})$，隐藏的脉动能$(m\mathbf{c}^2)$，平动热$(m\mathbf{c}^2\mathbf{c})$等，其输运方程应考虑到，对于所选定的$dN$个分子，其量$\mathbf{Q}$必须平衡。但是一般地讲，分子总数$dN$通过分布函数$dN=\mathscr{L}(\mathscr{C})\,d\xi d\eta d\zeta$与脉动速度有关，因此有

$$N\overline{\mathbf{Q}}=\int \mathbf{Q}dN=\int \mathscr{L}(\mathscr{C})\mathbf{Q}d\xi d\eta d\zeta \tag{2.3}$$

我们可以把量$\overline{\mathbf{Q}}$称为$\mathbf{Q}$的均值。在我们考虑的这一步，不需要知道分布函数的形式，以及函数$\mathscr{L}$如何达到它的平衡状态。然而，$N\overline{\mathbf{Q}}$的产率因具有非参照性不受参考运动的影响。

如果我们采用记号δ来描述由于各个分子的碰撞$\mathbf{Q}$的增加或减少，并且假设改变量δ是与参考域的任何改变无关的量，那么在V_r中$\mathbf{Q}$的平衡具有以下形式

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}(N\overline{\mathbf{Q}})+\operatorname{grad}(N\overline{\mathbf{Q}})\mathbf{u}'-N\overline{\mathbf{Q}}\operatorname{div}\mathbf{u}'-\overline{\left(\frac{\partial\mathbf{u}'}{\partial t}+\mathbf{w}'\mathbf{c}\right)\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial\mathbf{c}}}\\&\quad+\operatorname{div}[N\overline{\mathbf{Q}\otimes\mathscr{C}}+N\overline{\mathbf{Q}}(\mathbf{u}-\mathbf{u}')]-\overline{(\operatorname{grad}\mathbf{u}')\frac{\partial N\mathbf{Q}\otimes\mathscr{C}}{\partial\mathscr{C}}}\\&\quad=\frac{\delta}{\delta t}N\overline{\mathbf{Q}}+N\overline{\mathscr{F}\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial\mathbf{c}}}\end{aligned} \tag{2.4}$$

其中前四项描述V_r中$N\overline{\mathbf{Q}}$的积累，其后两项描述$N\overline{\mathbf{Q}}$的输运以及由于V_r的运动所产生的吸收效应。(2.4)的右端描述由于内部脉动$(\delta/\delta t)N\overline{\mathbf{Q}}$)和外力$(N\overline{\mathscr{F}(\partial\mathbf{Q}/\partial\mathbf{c})})$的产率。

如果我们考虑通常的假设，即参考域运动且均质$(\mathbf{w}'=\operatorname{div}\mathbf{u}'=\partial\mathbf{u}'/\partial t=0)$，则(2.4)简化为Maxwell方程

$$\frac{\partial}{\partial t}(N\overline{\mathbf{Q}})+\operatorname{grad}(N\overline{\mathbf{Q}})\mathbf{u}'+\operatorname{div}[N\overline{\mathbf{Q}\otimes\mathscr{C}}+N\overline{\mathbf{Q}}\otimes(\mathbf{u}-\mathbf{u}')]=\frac{\delta}{\delta t}N\overline{\mathbf{Q}}+N\overline{\mathscr{F}\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial\mathbf{c}}} \tag{2.5}$$

做散度运算并令$\mathbf{u}'=\mathbf{u}$，我们得到(2.5)的物质形式如下：

$$\frac{d}{dt}(N\overline{\mathbf{Q}})+N\overline{\mathbf{Q}}\operatorname{div}\mathbf{u}+\operatorname{div}[N\overline{\mathbf{Q}\otimes\mathscr{C}}]=\frac{\delta}{\delta t}N\overline{\mathbf{Q}}+N\overline{\mathscr{F}\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial\mathbf{c}}} \tag{2.6}$$

其中$(d/dt)(\cdot)=(\partial/\partial t)(\cdot)+\operatorname{grad}(\cdot)\mathbf{u}$为物质导数。

另外，结合方程$\partial_t\rho+\operatorname{div}(\rho\mathbf{u})=0$，$\rho=mN$和(2.6)，我们得到

$$N\frac{d}{dt}(\overline{\mathbf{Q}})+\operatorname{div}[N\overline{\mathbf{Q}\otimes\mathscr{C}}]=N\frac{\delta}{\delta t}\overline{\mathbf{Q}}+N\overline{\mathscr{F}\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial\mathbf{c}}} \tag{2.7}$$

上式为(2.4)的简化形式，也是Maxwell气体运动理论的最为人熟知的出发点[16]。

然而，另一方面，如果我们假设参考域是固定的和不可变形的，那么式(2.4)直接成为以下简化形式

$$\frac{\partial}{\partial t}(N\overline{\mathbf{Q}})+\operatorname{div}[N\overline{\mathbf{Q}\otimes\mathbf{c}}]=N\frac{\delta}{\delta t}\overline{\mathbf{Q}}+N\overline{\mathscr{F}\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial\mathbf{c}}} \tag{2.8}$$

这种形式的输运方程受到I. Müller教授和他的同事的特别推崇，这是因为观察者可以由惯性方程(2.7)改变到非惯性方程(3.1)。

三、Müller方程的评价

为证明输运方程(2.4)的合理性，且为简便起见，我们来考察一特殊情形，即$\mathbf{Q}=m\mathbf{c}\otimes\mathbf{c}$，$N\overline{\mathbf{Q}}=Nm\overline{\mathbf{c}\otimes\mathbf{c}}\equiv\mathbf{m}=m_{ij}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j$，$\rho=Nm$（[13]），则$\mathbf{M}=Nm\overline{\mathscr{C}\otimes\mathscr{C}}$为耗散 Chauchy 应力张量的流通量，在这种情形下方程(2.4)描述了它的演化．零迹张量$\mathbf{M}^0=\mathbf{M}-(\mathrm{tr}\mathbf{M})1/3$代表了第一非守恒变量，因而通过其碰撞积分对耗散有所作用．尽管方程

$$\frac{\delta}{\partial t}M_{11}+\frac{\partial}{\partial t}M_{22}+\frac{\partial}{\delta t}M_{33}=0$$

是Maxwell理论的重要基础之一，Zaremba[25]及其同事[23]仍假定存在两个松弛时间．第一个松弛时间是经典的，描述了由$\mathbf{M}^0$到其平衡的松弛，第二个松弛时间则描述了平均压力$p=(\mathrm{tr}\mathbf{M})/3$到热静态压力的松弛[23]．

我们的证明基于假定在经典场论中常用的主动与被动转换之间的等价关系在此仍旧成立．我们知道，改变参考域保持参考系固定的变换为主动变换；与此相反，保持参考域不动同时改变观察者的位置，这样的变换为被动变换[15,20]．这里我们采用Müller的方法，即主要基于被动的、时间相关的、从惯性系列到非惯性系的Euclid变换[3,13,23]．

根据Müller的开创性工作[3,13]，我们从对非惯性系$\{\Phi_u,\mathbf{e}_\alpha\}$下固定参考域（$\mathbf{u}'=\mathrm{grad}\,\mathbf{u}'=0$）的输运方程着手，该方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}N\overline{\mathbf{Q}}+\mathrm{div}(N\overline{\mathbf{Q}\otimes\mathbf{c}})=\frac{\delta}{\delta t}N\overline{\mathbf{Q}}+N\overline{\mathscr{F}^{(c)}\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial\mathbf{c}}}\tag{3.1}$$

如果$\{\Phi_0,\mathbf{e}_i\}$和$\{\Phi_u,\mathbf{e}_\alpha\}$由以下Euclid变换相关联[13]，

$$x_\alpha=O_{\alpha i}(t)x_i+b_\alpha(t)\tag{3.2}$$

其中$\mathscr{C}(t)=\mathscr{C}_\alpha\mathbf{e}_\alpha$是两参考系原点间的矢径，$O_{\alpha i}(t)$是一个正交变换，那么，$W_{\alpha\beta}=(\partial tO_{\alpha j})\cdot O_{\beta j}^{-1}=-W_{\beta\alpha}$，$\partial_t\equiv\partial/\partial t$和$\partial_t\mathscr{C}_\beta$分别描述了运动构架的旋转和初始$\Phi_u$相对于固定参考架的速度．与跟(3.1)具有相同形式表达式的(2.3)相比，只有给定的外部体力变换成[3,13]

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{(c)}=&\mathscr{L}+\mathscr{F}+2\mathbf{W}\mathbf{c}=\mathscr{L}_\beta\mathbf{e}_\beta+[-W^2_{\alpha\beta}(x_\beta-\mathscr{C}_\beta)-2W_{\alpha\beta}\partial_t\mathscr{C}_\beta\\&+\partial_tW_{\alpha\beta}(x_\beta-\mathscr{C}_\beta)+\partial_{tt}\mathscr{C}_\alpha]\mathbf{e}_\alpha+(2W_{\alpha\beta}c_\beta)\mathbf{e}_\alpha\end{aligned}\tag{3.3}$$

其中虚力由离心力、Coriolis力、Euler力和相对平动力组成．

现在，通过直接计算可以证明

$$\left.\begin{aligned}&N\overline{\mathbf{Q}}\equiv\mathbf{m}=\rho\overline{\mathbf{c}\otimes\mathbf{c}}=\rho\overline{(\mathscr{C}+\mathbf{u})\otimes(\mathscr{C}+\mathbf{u})}=\rho\overline{\mathscr{C}\otimes\mathscr{C}}+\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}=\mathbf{M}+\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}\\&N\overline{\mathbf{Q}\otimes\mathbf{c}}=\rho\overline{\mathbf{c}\otimes\mathbf{c}\otimes\mathbf{c}}=\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}+\mathbf{u}\otimes\mathbf{M}+(\mathbf{M}\otimes\mathbf{u})^{2,3}+\mathbf{J}\\&N\overline{\mathscr{F}^{(c)}\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial\mathbf{c}}}=\rho[(\mathscr{F}+\mathscr{L})\otimes\mathbf{u}+\mathbf{u}\otimes(\mathscr{F}+\mathscr{L})]+2(\mathbf{W}\mathbf{M}+\mathbf{M}\mathbf{W}^T)\\&\qquad+2(\mathbf{W}\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}+\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}\mathbf{W}^T)\end{aligned}\right\}\tag{3.4}$$

其中，$\rho=Nm$，而$\mathbf{J}=m\overline{\mathscr{C}\otimes\mathscr{C}\otimes\mathscr{C}}=J_{\alpha\beta\gamma}\mathbf{e}_\alpha\otimes\mathbf{e}_\beta\otimes\mathbf{e}_\gamma$是对称三阶张量．进而利用以下恒等式

$$\left.\begin{aligned}&\partial_t\rho+\mathrm{div}(\rho\mathbf{u})=0,\quad\mathbf{l}=\mathrm{grad}\,\mathbf{u}\\&\partial_t\mathbf{m}=\partial_t\mathbf{M}+\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}(\partial_t\rho)+\rho\partial_t(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})\\&\mathrm{div}(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})=\mathbf{l}\mathbf{u}\otimes(\rho\mathbf{u})+(\rho\mathbf{u})\otimes\mathbf{u}\mathbf{l}^T-\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}(\partial_t\rho)\\&\mathrm{div}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{M})=\mathrm{grad}\,\mathbf{u}\mathbf{M}^T+\mathbf{u}\otimes\mathrm{div}\mathbf{M}\\&\mathrm{div}(\mathbf{M}\otimes\mathbf{u})=\mathrm{grad}\mathbf{M}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{M}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\\&\mathrm{div}(\mathbf{M}\otimes\mathbf{u})^{2,3}=(\mathrm{div}\mathbf{M})\otimes\mathbf{u}+\mathbf{M}\,\mathrm{grad}^T\mathbf{u}\end{aligned}\right\}\tag{3.5}$$

可由(3.1)得到

$$\partial_t\mathbf{M}+\mathrm{grad}\mathbf{Mu}+\mathbf{lM}+\mathbf{Ml}^T+(\mathrm{tr}\mathbf{l})\mathbf{M}-2(\mathbf{WM}+\mathbf{MW}^T)+\mathrm{div}\mathbf{J}$$
$$+\mathbf{u}\otimes(\rho\partial_t\mathbf{u}+\rho\mathbf{u}\mathrm{grad}^T\mathbf{u}+\mathrm{div}\mathbf{M})+(\rho\partial_t\mathbf{u}+\rho\mathbf{u}\mathrm{grad}^T\mathbf{u}+\mathrm{div}\mathbf{M})\otimes\mathbf{u}$$
$$=\frac{\delta}{\delta t}\mathbf{M}+\mathbf{u}\otimes[2\rho\mathbf{uW}^T+\rho(\mathscr{Z}+\mathscr{C})]+[2\rho\mathbf{Wu}+\rho(\mathscr{Z}+\mathscr{C})]\otimes\mathbf{u} \tag{3.6}$$

利用线动量的守恒律[13]，上述方程可简化为

$$(\dot{\mathbf{M}}-\mathbf{WM}-\mathbf{MW}^T)+(\mathbf{d}+\mathbf{w}-\mathbf{W})\mathbf{M}+\mathbf{M}(\mathbf{d}+\mathbf{w}^T-\mathbf{W}^T)+(\mathrm{tr}\mathbf{l})\mathbf{M}+\mathrm{div}\mathbf{J}=\frac{\delta}{\delta t}\mathbf{M} \tag{3.7}$$

其中(˙)表示物质时间导数．与 Müller 的结果[文[13]，式(27)，$n=2$]完全相符，由此可知，只有存在转动$\mathbf{W}$时，才能看到非惯性参考系的影响．我们也曾默认惯性效应可以在碰撞积分中忽略，因而在任意参考系中，碰撞保持动量和动能守恒．

这里有必要说明如何比较演化方程(3.7)和由主动变换及方程(2.4)所得到的演化方程．为此，利用(3.5)中的恒等式及连续方程

$$\partial_t\rho+\mathrm{div}(\rho\mathbf{u}')=-\mathrm{div}\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{j}\equiv\rho(\mathbf{u}-\mathbf{u}') \tag{3.8}$$

连同

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{grad}\mathbf{u}'\,\overline{\frac{\partial(m\mathbf{c}\otimes\mathbf{c}\otimes\mathscr{C})}{\partial\mathscr{C}}}=\mathbf{l}'\mathbf{M}+\mathbf{Ml}'^T+\mathbf{M}(\mathrm{div}\mathbf{u}')\\&\overline{(\mathbf{w}'\mathscr{C})\frac{\partial(m\mathbf{c}\otimes\mathbf{c})}{\partial\mathscr{C}}}=\mathbf{w}'\mathbf{M}+\mathbf{Mw}'^T\end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

我们得到以下演化方程

$$\partial_t\mathbf{M}+\mathrm{grad}\mathbf{Mu}'-(\mathbf{w}'\mathbf{M}+\mathbf{Mw}'^T)+(\mathrm{div}\mathbf{u}-\mathrm{div}\mathbf{u}')\mathbf{M}$$
$$+(\mathbf{l}-\mathbf{l}')\mathbf{M}+\mathbf{M}(\mathbf{l}^T-\mathbf{l}'^T)+\mathrm{div}\mathbf{J}=\frac{\delta}{\delta t}\mathbf{M} \tag{3.10}$$

其中一般地讲，$\mathbf{l}'=\mathrm{grad}\mathbf{u}'=\mathbf{d}'+\mathbf{w}'$，$\mathbf{M}=M_{jk}\mathbf{e}_j\otimes\mathbf{e}_k$，$\mathbf{J}=J_{ijk}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\otimes\mathbf{e}_k$．假定参考域$V_r$的变形被严格约束，仅有刚体运动，即$\mathbf{d}'=0$，$\mathrm{div}\mathbf{u}'=0$，(3.10)可写成

$$(\partial_t\mathbf{M}+\mathrm{grad}\mathbf{Mu}'-\mathbf{w}'\mathbf{M}-\mathbf{Mw}'^T)+(\mathrm{div}\mathbf{u})\mathbf{M}+(\mathbf{d}+\mathbf{w}-\mathbf{w}')\mathbf{M}+\mathbf{M}(\mathbf{d}+\mathbf{w}^T-\mathbf{w}'^T)+\mathrm{div}\mathbf{J}$$
$$=\frac{\delta}{\delta t}\mathbf{M} \tag{3.11}$$

最后，当参考域V_r选作物质域V_s时，$\mathbf{u}'(\mathbf{x},t)=\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$，$\mathbf{w}'(\mathbf{x},t)=\mathbf{w}(\mathbf{x},t)$，则方程(3.11)取以下物质形式：

$$(\dot{\mathbf{M}}-\mathbf{wM}-\mathbf{Mw}^T)+\mathrm{div}\mathbf{J}=\frac{\delta}{\delta t}\mathbf{M}-(\mathbf{dM}+\mathbf{Md}+\mathbf{M}\mathrm{div}\mathbf{u}) \tag{3.12}$$

注意，虽然方程(3.7)与(3.11)具有等价的形式，二者具有几个重大的差别．其中最为重要的是非惯性系中的演化方程形式由被动的 Euclid 变换得到，这种变换通常被认为是用时间衡量的Galileo变换的一部分．而方程(3.10)或(3.11)似乎也是由 Galileo 变换得到的，但是都是以时间和空间来衡量．仅在$\mathbf{w}(\mathbf{x},t)=\mathbf{W}(t)$[文13，§4]的被动变换和$\mathbf{w}(\mathbf{x},t)=\mathbf{w}'(\mathbf{x},t)$的主动变换的特殊情形下，这种区别才表现出来．另外，从数学上讲，$\mathbf{W}(t)$是某种转动，而$\mathbf{w}'$是$\mathbf{l}'$的反对称部分，这也引起差别．

四、Euclid-(Leibitz-Berkeley) 协变性

由上述分析可知，一般地讲，无法构造在任何瞬时对每一观察都有效的本构关系形式。特别地，在惯性参考系中建立的本构关系，在非惯性参考系中是无法使用的，而总是要增加某些东西。

考虑到对于固定参考域，如果$\partial_t \mathbf{e}_\alpha = \dot{\mathbf{e}}_\alpha = W_{\alpha\beta}(t)\mathbf{e}_\beta$，则

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{w}=(O_{\alpha i}w_{ij}O_{j\beta}+\dot{O}_{\alpha k}O_{k\beta})\mathbf{e}_\alpha\otimes\mathbf{e}_\beta=(\tilde{w}_{\alpha\beta}+W_{\alpha\beta})\mathbf{e}_\alpha\otimes\mathbf{e}_\beta \\ &\mathbf{M}=(M_{ij}O_{\alpha i}O_{j\beta})\mathbf{e}_\alpha\otimes\mathbf{e}_\beta=M_{\alpha\beta}\mathbf{e}_\alpha\otimes\mathbf{e}_\beta,\ \ \mathbf{d}=(O_{\alpha i}d_{ij}O_{j\beta})\mathbf{e}_\alpha\otimes\mathbf{e}_\beta=d_{\alpha\beta}\mathbf{e}_\alpha\otimes\mathbf{e}_\beta \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

这样，可以把$-2(\mathbf{WM}+\mathbf{MW}^T)$当作纯粹的附加项。的确，由于

$$\dot{\mathbf{M}}=(\dot{M}_{\alpha\beta}+W_{\alpha\gamma}M_{\gamma\beta}+M_{\alpha\gamma}W^T_{\gamma\beta})\mathbf{e}_\alpha\otimes\mathbf{e}_\beta$$

我们可把(3.7)的第一部分写为：

$$\begin{aligned} &\dot{\mathbf{M}}-2(\mathbf{WM}+\mathbf{MW}^T)+\mathbf{wM}+\mathbf{Mw}^T+\mathbf{dM}+\mathbf{Md}+\mathbf{M}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{d} \\ &\quad=[\dot{M}_{\alpha\beta}+(\tilde{w}_{\alpha\gamma}+d_{\alpha\gamma})M_{\gamma\beta}+M_{\alpha\gamma}(\tilde{w}^T_{\gamma\beta}+d_{\gamma\beta})+M_{\alpha\beta}d_{\gamma\gamma}]\mathbf{e}_\alpha\otimes\mathbf{e}_\beta \end{aligned} \tag{4.2}$$

对于$\{\mathbf{e}_\alpha\}$的任意 Euclid 变换，(4.2)式具有保持不变的 特 性。如果我们仅局限于其转动部分，则第二个非惯性系$\{\overset{*}{\mathbf{e}}_\rho\}$由[13]定义为 $\overset{*}{\mathbf{e}}_\rho=Q_{\rho\alpha}(t)\mathbf{e}_\alpha$，$\mathbf{Q}\in \mathrm{so}(3,\boldsymbol{R})$，$(\rho,\mu,\sigma=1,2,3)$，且物理量取新的形式，比如，

$$\mathbf{M}=M_{\alpha\beta}\mathbf{e}_\alpha\otimes\mathbf{e}_\beta=M_{\alpha\beta}Q_{\rho\alpha}Q_{\mu\beta}\overset{*}{\mathbf{e}}_\rho\otimes\overset{*}{\mathbf{e}}_\mu=\overset{*}{M}_{\rho\mu}\overset{*}{\mathbf{e}}_\rho\otimes\overset{*}{\mathbf{e}}_\mu$$

$$\mathbf{W}=W_{\alpha\beta}\mathbf{e}_\alpha\otimes\mathbf{e}_\beta=(W_{\alpha\beta}Q_{\rho\alpha}Q_{\mu\beta}+\dot{Q}_{\rho\gamma}Q_{\gamma\mu})\overset{*}{\mathbf{e}}_\rho\otimes\overset{*}{\mathbf{e}}_\mu$$

这样，从(4.1)和(4.2)直接计算可得

$$\begin{aligned} &\dot{\mathbf{M}}-2(\mathbf{WM}+\mathbf{MW}^T)+\mathbf{wM}+\mathbf{Mw}^T+\mathbf{dM}+\mathbf{Md}+\mathbf{M}\,\mathrm{tr}\,\mathbf{d} \\ &\quad=[\dot{M}^*_{\rho\mu}+(\tilde{w}^*_{\rho\sigma}+d^*_{\rho\sigma})M^*_{\sigma\mu}+M^*_{\rho\sigma}(\tilde{w}^{T*}_{\sigma\mu}+d^*_{\sigma\mu})+M^*_{\rho\mu}d^*_{\sigma\sigma}]\overset{*}{\mathbf{e}}_\rho\otimes\overset{*}{\mathbf{e}}_\mu \end{aligned} \tag{4.3}$$

这说明(4.2)具有Euclid协变性。

主动Euclid变换经常被定义为一个附加的虚拟强制刚体运动，

$$\overset{*}{\mathbf{M}}=\mathbf{QMQ}^T,\ \ \overset{*}{\mathbf{d}}=\mathbf{QdQ}^T,\ \ \overset{*}{\mathbf{w}}=\mathbf{QwQ}^T+\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T,\ \ \text{etc} \tag{4.4}$$

仅对这种变换熟悉的人可能会发现(4.2)式在(4.4)下保持不变。然而，尽管主动变换 (4.4) 与被动变换(4.1)在数学上相似，它们描述的却是截然不同的物理过程。

(4.2)式在物理上讲能在(4.1)下保持不变，且不依赖于选择一个什么样的非惯性观察者（加速或匀速）。更精确地讲，(4.2)式仅适用于这样一些参考系，它们在时间上是瞬时局部的，在空间上是全域的。"在空间上全域"在这里我们是指所有质点的运动都是相对于同一个非惯性参考系。所以，由 (4.2) 类推到协变性原理是不完整的。我们可以把形 式 不 变 的 (4.2)式称为Euclid 协变的。这个名字比较合适，无疑它是从连续介质物理中别的显为人知的概念中借用来的。

一般地讲，"协变"一词只具有一个完全的物理意义，而且为此有必要限定绝 对运动不受经验的影响。无疑"协变性"一词与微分几何或其它假设的数学学科毫无二致，尽管有可能导致误解，场论中还是很长时间惯于使用 Galileo、Lorentz及一般协变性的概念[15]。

值得一提的是，(4.2)包含了非惯性系相对于惯性系转动的信息。正如我们以 前所 假设的，结果本构关系是时间相关的，这一结论可以自然地推广到连续介质物理中所使用的每一个唯象关系[23]。

五、Zaremba补充式（ansatz）

现在我们转而介绍Zaremba补充式的基本思想。Zaremba引入三个参考系，第一个作为惯性系记作$\{x,y,z\}$，后两个作为非惯性系分别记作$\{x',y',z'\}$和$\{\xi,\eta,\zeta\}$（分别是我们的$\{\mathbf{e}_i\}$，$\{\mathbf{e}_\alpha\}$和$\{\xi_\rho\}$）。Zaremba区分了两个旋转张量的差别，第一个作为速度张量$\mathbf{w}=-\mathbf{w}^T=\mathbf{w}(t,x)$与时间和空间坐标系有关，而构架转动$\mathbf{W}=\mathbf{W}^T=\mathbf{W}(t)$则在惯性系中消失。他的基本补充式认为，量

$$\mathbf{w}=q_1(\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_3-\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_2)+q_2(\mathbf{e}_3\otimes\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_3)+q_3(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_1)$$

局部地描述了$\{x',y',z'\}$的转动。他写道："按这种方式，量q_1,q_2,q_3描述了在时刻(t)与标架$\{x',y',z'\}$固连的整个粒子共有的角速度"，因而对每一固定时刻，非惯性观察者是局部的、特定的，观察者与一通常可以平动、伸展和转动的物质粒子固连，很显然以转动$\mathbf{W}\equiv\mathbf{w}$运动的观察者不可能观察到任何属于刚体位移的几何量（如张量）的时间变化。一般地，观察者无法对时刻(t)与时刻$(t+\Delta t)$的几何量作比较，而将时刻$(t+\Delta t)$的几何量与考虑观察者被动转动的几何量作比较。因而Z.-H. Guo（郭仲衡）教授把这种本构导数称为"随转导数"[2]。

凭着他的智慧，Zaremba[文献25，§4]第一个给出了寻求随转导数的方法。随转导数必须满足

$$\overset{?}{\mathbf{M}}=\dot{M}_{\alpha\beta}\mathbf{e}_\alpha\otimes\mathbf{e}_\beta$$

[文献25，方程18]。由于现在$\mathbf{e}_\alpha=\mathbf{w}\mathbf{e}_\alpha$，必须给随转基$\mathbf{e}_\alpha$的时间导数补充某些具有负$\mathbf{w}$的表达式。最终，Zaremba得到

$$\mathbf{m}\equiv\mathbf{M}-\mathbf{w}\mathbf{M}+\mathbf{M}\mathbf{w}=(M_{ij}-w_{ik}M_{kj}+M_{ik}w_{kj})\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j=\dot{M}_{\alpha\beta}\mathbf{e}_\alpha\otimes\mathbf{e}_\beta \tag{5.1}$$

的确，回到我们导出的式(3.7)，在Zaremba的补充式$\mathbf{W}=\mathbf{w}$下（固定时刻t），即得下面的形式

$$\overset{?}{\mathbf{M}}+\mathrm{div}\mathbf{J}=\boldsymbol{\sigma} \tag{5.2}$$

其中　$\mathbf{J}=J_{ijk}\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\otimes\mathbf{e}_k$是第三节所定义的应力张量通量，而

$$\boldsymbol{\sigma}\equiv-\frac{p}{\mu}(\mathbf{M}-p\mathbf{I})-\mathbf{d}\mathbf{M}-\mathbf{M}\mathbf{d}-\mathbf{M}\mathrm{tr}\mathbf{d} \tag{5.3}$$

是包含耗散和可逆量的源项。根据Maxwell的强制性假设，第一偏斜部分$(\delta/\delta t)\mathbf{M}=-p(\mathbf{M}-p\mathbf{I})/\mu$描述直接由碰撞积分产生的应力的不可逆通量，$\boldsymbol{\sigma}$的第二部分可简称为对流源。

Maxwell的强制性假设也可以扩充利用于第三个矩$\mathbf{J}$，通常可表述如下。令p，$\mathbf{m}=\rho\mathbf{c}$，$\mathbf{M}^0$和$\mathscr{G}$分别是平均压力、线动量、Cauchy应力偏量和热流，则由近似的梯度处理，得方程

$$\mathrm{div}\mathbf{J}^0=f_J(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots.p,\mathbf{m},\mathbf{M},\mathscr{G}),\quad -\frac{\delta}{\delta t}\mathbf{M}=f_M(\beta_1,\beta_2,\cdots,p,\mathbf{m},\mathbf{M},\mathscr{G}) \tag{5.4}$$

是材料系数$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$和松弛因子$\beta_1,\beta_2.\cdots,\beta_n$的函数。于是$\mathbf{M}$的偏斜部分的演化方程取下面的非线性形式

$$\begin{aligned}((\overset{?}{\mathbf{M}})^0&+\alpha\nabla^2\mathbf{M}^0+\alpha[3\mathrm{grad}(\mathrm{grad}p)-\nabla p\mathbf{I}]+\alpha[3(\mathrm{grad}\mathbf{m}+\mathrm{grad}^T\mathbf{m})-\mathrm{div}\mathbf{m}\mathbf{I}]\\&+\alpha[3(\mathrm{grad}\mathscr{G}+\mathrm{grad}^T\mathscr{G})-\mathrm{div}\mathscr{G}\mathbf{I}]+(\mathbf{d}\mathbf{M}+\mathbf{M}\mathbf{d}+\mathrm{tr}\mathbf{d}\mathbf{M})^0\end{aligned}$$

$$
= -6N\beta_2\mathbf{M}+N(\beta_3-\beta_2)[\mathrm{tr}(\mathbf{M}^{02})\mathbf{I}-3\mathbf{M}^{02}]+\frac{63}{200}N(\beta_4-2\beta_3+\beta_2)
$$

$$
\cdot(3\mathscr{G}\otimes\mathscr{G}-\mathscr{G}^2\mathbf{I}) \tag{5.5}
$$

这些方程描述了Maxwell型材料中应力的微弱非局部和非线性演化。注意，只是含参数β的项才对介质中的不可逆效应有关[8,9,24]。

我们对H. Stumpf的细致和指导性的意见表示深深的谢意。在完成这项工作的过程中，我们得到了Alexander von Humboldt (AvH)基金的部分支持(B. -H. Sun)以及德国科学基金会基金的部分支持(J. Badur)。

参 考 文 献

[1] L. G. Colin, Extended non-equilibrium thermodynamics, scope and limitations, *Revisita Mex. Fisica*, **34** (1988), 344—366.

[2] Z. H. Guo, Time derivatives of tensor fields in nonlinear continuum mechanics, *Arch. Mech. Stosow*, **15** (1963), 131—163.

[3] Maria Heckl and I. Müller, Frame dependence, entropy, entropy flux, and wave speeds in mixtures of gases, *Acta Mech.*, **50** (1983), 71—95.

[4] D. Jou, J. Casas-Vazquez and G. Lebon, Extended irreversible thermodynamics, *Rep. Prog. Phys.*, **51** (1988), 1105—1179.

[5] J. Kestin, A note on the relation between the hypothesis of local equilibrium and the Clausius-Duhem inequality, *J. Non-Equilib. Thermodyn.*, **18** (1990), 193—212.

[6] J. Kestin, Local-equilibrium formalism applied to mechanics of solids, *Int. J. Solids. Struc.*, **29** (1992), 1827—1836.

[7] J. Kestin, Thermodynamics (An essey) in *Zagadnienia Maszyn Przeplyuouycn*, *Proc. of Conf. on 90th Aniversary of Robert Szewalski*, ed. S. Burka, Gdansk (1993), 319—334.

[8] I. L. Liu and I. Müller, On the thermodynamics and thermostatics of fluids in electromagnatic fields, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **46** (1972), 149—176.

[9] I. L. Liu, On thermodynamics of viscoelasticity, in *Proc. 2nd Int. Conf. Nonlinear Mech.*, Beijing, ed. Z. H. Guo, (1993), 174—177.

[10] G. A. Maugin and C. Trimarco, Pseudomomentum and matrical forces in nonlinear elasticity; variational formulations and application to brittle fructure, *Acta Mech.*, **94** (1992), 1—28.

[11] I. Müller, Zum Paradoxon der Wärmeleitungstheorie, *Z. für Physik*, **198** (1967), 329—344.

[12] I. Müller and K. Wilmanski, Extended thermodynamics of a non-Newtonian fluid, *Rheo. Acta*, **25** (1986), 335—349.

[13] I. Müller, On the frame dependence of stress and heat flux, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **45** (1972), 241—250.

[14] I. Müller, The structure of extended thermodynamics, in *Trends in Applications of Mathematics to Mechanics*, ed. W. Schneider, H. Troger, F. Zigler, Longman Sci. & Tech. (1992), 164—173.

[15] I. Müller and T. Ruggeri, Extended Thermodynamics, in *Springer Tracts Natur. Phil.*, ed. C. Truesdell, 37 (1993).

[16] L. Natanson, Sur les lois de la diffusion, *Bull. Int. l'Acad. Sci. Letters, Cracovie(A)* (1901), 335—348.

[17] L. Restuccia and B. Maruszewski, Diffusion and dislocation influence on the dynamics of elastic bodies, *Int. J. Engn. Sci.*, **29** (1991), 1053—1063.

[18] H. Stumpf and J. Badur, On missing links of rate-independent elastoplasticity at finite strain, *Mech. Res. Comm.*, 17(5) (1990), 353—364.

[19] H. Stumpf and J. Badur, On a generalization of elasto-plastic models within the frame of extended thermodynamics, *ZAMM*, **72** (1993), T211—214.

[20] H. Stumpf and J. Badur, On surface objective rates, *Quart. Appl. Math.* **51** (1993), 161—186.

[21] B. H. Sun, *A Simple Review of Elasto-Plastic Models*, CERECAM Report №252, University of Cape Town, South Africa (1994), 1—55.

[22] B. H. Sun and J. Badur, Some remarks on the multiplicative decomposition within elasto-plasticity. (to be submitted)

[23] C. Ttuesdell and R. Toupin, The Classical Field Theories, *Hand. der Phys.*, By Ⅲ/Ⅰ, ed. S. Fllüge, (1960),226—793 (appendix by J. L. Erickse, 794—858.)

[24] K. Wilmanski, Thermodynamics of a heat conducting Maxwellian fluid, *Arch. Mech. Stosow.*, **40** (1988), 217—232.

[25] S. Zaremba, Sur une forme perfectionée de la théorie de la relaxation, *Bull. Int. l'Acad. Sci. Lettres Cracovie, (Cl. Sci. Math. Natur) A* (1903), 594—614.

Remarks on the Structure of Evolution Equations

J. Badur Sun Bohua

(Ruhr-Universität Bochum, Lehrstuhl für Allgemeine Mechanik, D-44780 Bochum 1, Germany)

Abstract

In the paper the evolution equations are discussed so as to enable a phenomenological description of microstructural behaviour e. g. partially reversible flow of Maxwellian gas, recovery, structural relaxation and other experimental results coming from light scattering and molecular dynamics. The result deals with the revaluation of Zaremba's ansatz. It leads to resolution of problems with substantial and available nonlinearities in the transport equation.

Key words evolution equation, phenomenological description, microstructural behaviour, Zaremba's ansatz